## 第１問（必答問題）

解答解説のページへ

[1]　$a$ を定数とし，2 次関数 $y=-x^2+(2a-5)x-2a^2+5a+3$ のグラフを $C$ とする。

(1)　グラフ $C$ の頂点の座標は，$\left(\dfrac{2a-\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\ \dfrac{-4a^2+\boxed{\text{ウエ}}}{4}\right)$である。

(2)　グラフ $C$ と $x$ 軸が異なる 2 点で交わるための $a$ の範囲は

$$-\frac{\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}}{\boxed{\text{キ}}}<a<\frac{\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}}{\boxed{\text{キ}}}\ \cdots\cdots\cdots①$$

である。

(3)　$a$ は①を満たす整数とする。このとき，グラフ $C$ と $x$ 軸との 2 つの交点の $x$ 座標がともに整数となるのは，$a=\boxed{\text{ク}}$ または $a=\boxed{\text{ケコ}}$ の場合であり，その場合に限る。$a=\boxed{\text{ケコ}}$ のとき，交点の $x$ 座標は $\boxed{\text{サシ}}$ と $\boxed{\text{スセ}}$ である。ただし，$\boxed{\text{サシ}}$ と $\boxed{\text{スセ}}$ は解答の順序を問わない。

[2]　1 つのさいころを 2 回続けて投げ，出た目の数を順に $a$，$b$ とするとき，$u=\dfrac{a}{b}$ とおく。

(1)　$u=1$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

(2)　$u>1$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。

(3)　$u$ が整数になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ である。

(4)　$T$ を次で定義する。

$u$ が整数になる場合：$u$ が偶数ならば $T=u$，　$u$ が奇数ならば $T=1$

$u$ が整数にならない場合：$T=0$

このとき，$T$ の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{ヌネ}}}{\boxed{\text{ノハ}}}$ である。

## 第２問（必答問題）

解答解説のページへ

[1] $m, n$ を整数とする。$x$ の整式 $A = x^3 + mx^2 + nx + 2m + n + 1$ を考える。

(1) $x$ の整式 $B$ を $B = x^2 - 2x - 1$ とする。$A$ を $B$ で割ると，商 $Q$ と余り $R$ はそれぞれ

$$Q = x + \left(m + \boxed{\text{ア}}\right),\quad R = \left(2m + n + \boxed{\text{イ}}\right)x + \left(3m + n + \boxed{\text{ウ}}\right)$$

である。

また，$x = 1 + \sqrt{2}$ のとき，$B$ の値は $\boxed{\text{エ}}$ であり，さらにこのとき，$A$ の値が $-1$ であるならば，$m, n$ は整数だから，$m = \boxed{\text{オ}}$，$n = \boxed{\text{カキ}}$ である。

(2) 次の $\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを，下の⓪〜⑤のうちから１つ選べ。

$x$ がどのような奇数であっても，$A$ の値が常に偶数になるための必要十分条件は $\boxed{\text{ク}}$ となることである。

⓪ $m$ が奇数　　① $n$ が奇数　　② $m - n$ が奇数

③ $m$ が偶数　　④ $n$ が偶数　　⑤ $m - n$ が偶数

[2] 平面上に２点 O，P があり，$\text{OP} = \sqrt{6}$ である。点 O を中心とする円 $O$ と点 P を中心とする円 $P$ が，２点 A，B で交わっている。円 $P$ の半径は２であり，$\angle\text{AOP} = 45^\circ$ である。このとき，円 $O$ の半径は

$$\sqrt{\boxed{\text{ケ}}} + \boxed{\text{コ}} \quad \text{または} \quad \sqrt{\boxed{\text{ケ}}} - \boxed{\text{コ}}$$

である。

以下，円 $O$ の半径が $\sqrt{\boxed{\text{ケ}}} - \boxed{\text{コ}}$ のときを考える。

$\text{AB} = \sqrt{\boxed{\text{サ}}} - \sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ である。また，OA の A 側への延長と円 $P$ との交点を C とするとき，三角形 ABC について，

$$\angle\text{BAC} = \boxed{\text{スセソ}}^\circ,\quad \text{BC} = \boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}$$

である。

## 第３問（選択問題）

解答解説のページへ

(1) 整数からなる等比数列$\{a_n\}$が$a_1+a_2=32$，$a_4+a_5=864$を満たしている。このとき，$a_n=\boxed{\text{ア}}\cdot\boxed{\text{イ}}^{n-1}$であり，

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+4k-2)=\boxed{\text{ウ}}\cdot\boxed{\text{エ}}^{n}+\boxed{\text{オ}}n^2-\boxed{\text{カ}}$$

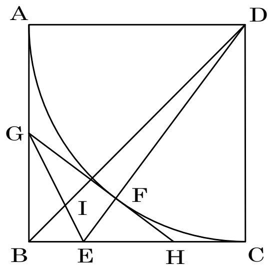
となる。

(2) 分数$\dfrac{9}{37}$を小数で表したときに小数第$n$位に現れる数を$b_n$とする。すべての自然数$n$に対して$b_{n+p}=b_n$となる最小の自然数$p$は$\boxed{\text{キ}}$であり，$\displaystyle\sum_{k=1}^{100}b_k=\boxed{\text{クケコ}}$である。

## 第4問（選択問題）

解答解説のページへ

1辺の長さが1の正方形ABCDの辺BCを1 : 3に内分する点をEとする。Dを中心とする半径1の円と，線分DEとの交点をFとする。点Fにおけるこの円$D$の接線と辺AB, BCとの交点をそれぞれG, Hとする。さらに直線GEと直線BDとの交点をIとする。$\boxed{キ}$～$\boxed{サ}$には，次の⓪～Ⓕのうちから正しいものを1つずつ選べ。




| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ⓪ EH | ① FD | ② FE | ③ GE | | |
| ④ GF | ⑤ GH | ⑥ GI | ⑦ GJ | ⑧ IE | ⑨ JB |
| Ⓐ BEI | Ⓑ BIE | Ⓒ EBI | Ⓓ EFG | Ⓔ FEG | Ⓕ FGE |

(1) 点Iが△BGHの内心であることを示す。EはBCを1 : 3に内分するから，

$EC = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。△ECDにおいて三平方の定理（ピタゴラスの定理）を用いれば，$ED = \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ となる。よって $EF = \dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ である。

△GBEと△GFEは直角三角形で，斜辺GEを共有し，$BE = \boxed{キ}$であるから，△GBE ≡ △GFEが成り立つ。ゆえに$\angle BGE = \angle\boxed{ク}$となる。一方，

$\angle GBI = 45° = \angle\boxed{ケ}$

であるから, Iは△BGHの内心であることがわかる。

(2) 次に，△BGHの内接円$I$の半径$r$を求める。GA = GF = GBなので，GはABの中点であることがわかる。IからGBに下ろした垂線とGBとの交点をJとする。$JI = \boxed{コ} = r$ であって JI // BE であるから，$GB : BE = \boxed{サ} : JI$が成り立つ。

ゆえに $r = \dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ となる。

## 第５問（選択問題）

解答解説のページへ

次のプログラムを考える。ただし，120 行の THEN の後は，コロン「：」で区切られた複数の命令をその順に実行させるものである。

```
100  INPUT  ″A=″; A
110  INPUT  ″B=″; B
120  IF  B<=0  THEN  PRINT  ″B<=0 です。終了します。″: GOTO  240
130  X=0
140  Y=A
150  IF  A<0  THEN  GOTO  200
160  IF  Y<B  THEN  GOTO  230
170  X=X+1
180  Y=Y-B
190  GOTO  160
200  X=X-1
210  Y=Y+B
220  IF  Y<0  THEN  GOTO  200
230  PRINT  ″X は″; X; ″,Y は″; Y; ″ です。″
240  END
```

(1) A＝？に対して 50, B＝？に対して 11 を入力すると, 170 行は $\boxed{\text{ア}}$ 回, 210 行は $\boxed{\text{イ}}$ 回実行され,

X は $\boxed{\text{ウ}}$, Y は $\boxed{\text{エ}}$ です。

と表示される。

(2) A＝？に対して －50 , B＝？に対して 6 を入力すると, 170 行は $\boxed{\text{オ}}$ 回, 210 行は $\boxed{\text{カ}}$ 回実行され,

X は $\boxed{\text{キク}}$, Y は $\boxed{\text{ケ}}$ です。

と表示される。

(3) A＝？に対して 14.9, B＝？に対して 2.5 を入力すると, X の値として

X は $\boxed{\text{コ}}$

と表示され，その右に Y の値として表示される数を既約分数で表すと $\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ となる。

## 第１問 [1]

問題のページへ

(1) $C$: $y=-x^2+(2a-5)x-2a^2+5a+3$ より，

$$y=-\left(x-\frac{2a-5}{2}\right)^2+\left(\frac{2a-5}{2}\right)^2-2a^2+5a+3$$

$$=-\left(x-\frac{2a-5}{2}\right)^2+\frac{-4a^2+37}{4}$$

よって, $C$ の頂点の座標は，$\left(\frac{2a-5}{2},\ \frac{-4a^2+37}{4}\right)$である。

(2) グラフ $C$ と $x$ 軸が異なる 2 点で交わる条件は，$\frac{-4a^2+37}{4}>0$ より，

$4a^2-37<0$， $-\frac{\sqrt{37}}{2}<a<\frac{\sqrt{37}}{2}$

(3) グラフ $C$ と $x$ 軸との交点の $x$ 座標は，$y=0$ を代入して，

$-\left(x-\frac{2a-5}{2}\right)^2+\frac{-4a^2+37}{4}=0$， $x=\frac{2a-5}{2}\pm\frac{\sqrt{-4a^2+37}}{2}$

$x$ が整数であるためには，まず $-4a^2+37$ が平方数であることが必要で，

$-4a^2+37=0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36$

$a$ が整数から，$-4a^2+37=1$ すなわち $a=\pm3$ の場合だけになる。

$a=3$ のときは $x=\frac{6-5}{2}\pm\frac{1}{2}$ より $x=1,\ 0$，$a=-3$ のときは $x=\frac{-6-5}{2}\pm\frac{1}{2}$ より

$x=-6,\ -5$ となり，ともに $x$ は整数である。

### [解 説]

(3)は整数問題ですが，値を絞り込んで答を見つけるのに，苦労は不要です。

## 第１問 ［2］

問題のページへ

(1)　$u=1$ すなわち $a=b$ となる $(a,\ b)$ の組は 6 通りあり，この確率は $\dfrac{6}{6^2}=\dfrac{1}{6}$ である。

(2)　$u>1$ すなわち $a>b$ となる $(a,\ b)$ の組は，1 から 6 までの整数から 2 つの整数を選び，大きい方を $a$，小さい方を $b$ に対応させると考え，これから ${}_6\mathrm{C}_2\times 1=15$ 通りとなる。よって，この確率は $\dfrac{15}{6^2}=\dfrac{5}{12}$ である。

(3)　(1)より，$u=1$ となる確率は $\dfrac{6}{36}$ であり，同様にして確率を求めると，

(i)　$u=2\ (a=2b)$ のとき　$(a,\ b)=(2,\ 1),\ (4,\ 2),\ (6,\ 3)$ から，$\dfrac{3}{36}$ である。

(ii)　$u=3\ (a=3b)$ のとき　$(a,\ b)=(3,\ 1),\ (6,\ 2)$ から，$\dfrac{2}{36}$ である。

(iii)　$u=4\ (a=4b)$ のとき　$(a,\ b)=(4,\ 1)$ から，$\dfrac{1}{36}$ である。

(iv)　$u=5\ (a=5b)$ のとき　$(a,\ b)=(5,\ 1)$ から，$\dfrac{1}{36}$ である。

(v)　$u=6\ (a=6b)$ のとき　$(a,\ b)=(6,\ 1)$ から，$\dfrac{1}{36}$ である。

以上より, $u$ が整数になる確率は,

$$\frac{6}{36}+\frac{3}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{7}{18}$$

(4)　求める $T$ の期待値は, (3)より,

$$1\times\frac{6}{36}+2\times\frac{3}{36}+1\times\frac{2}{36}+4\times\frac{1}{36}+1\times\frac{1}{36}+6\times\frac{1}{36}=\frac{25}{36}$$

### ［解 説］

数え上げて確率を求める基本問題です。(2)の考え方も有名です。

## 第２問 [1]

問題のページへ

(1) $A$ を $B$ で割ると，$A = B(x+m+2)+(2m+n+5)x+(3m+n+3)$ ……(＊)より，

$$Q = x+m+2,\ R = (2m+n+5)x+(3m+n+3)$$

また，$x = 1+\sqrt{2}$ のとき，

$$B = (1+\sqrt{2})^2 - 2(1+\sqrt{2}) - 1 = 1+2\sqrt{2}+2-2-2\sqrt{2}-1 = 0$$

このとき, (＊)より,

$$A = (2m+n+5)(1+\sqrt{2})+(3m+n+3) = (5m+2n+8)+(2m+n+5)\sqrt{2}$$

ここで，$A = -1$ で，しかも $m, n$ は整数なので，

$$5m+2n+8 = -1,\ 2m+n+5 = 0$$

よって，$m = 1$，$n = -7$

(2) $x$ が奇数のとき，$B = (x-1)^2 - 2$ より，$B$ は偶数となり，$BQ$ もつねに偶数であるので, $A$ が偶数になるのは, $R$ が偶数になる場合である。

そこで, $R$ を $m, n$ についてまとめると，

$$R = m(2x+3)+n(x+1)+(5x+3)$$

$x$ が奇数のとき，$2x+3$ は奇数，$x+1$ は偶数，$5x+3$ は偶数となる。

よって, $m$ が偶数であることが, $A$ の値がつねに偶数になるための必要十分条件である。

### [解 説]

(1)は過去に何度も類題が出ています。(2)は(＊)を用いて $R$ の偶奇を考えていますが, 直接 $A$ を考察することで結論を導くことも可能です。

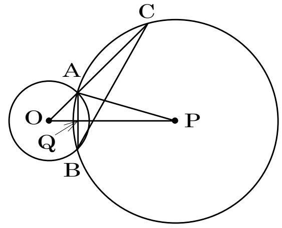
## 第２問［2］

問題のページへ

円 $O$ の半径を $x$ とおき，$\triangle$AOP に余弦定理を適用すると，

$$4 = x^2 + 6 - 2x\sqrt{6}\cos 45^\circ = x^2 + 6 - 2\sqrt{3}\,x$$

$x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 2 = 0$ より，$x = \sqrt{3} \pm 1$




さて，$\mathrm{OA} = \sqrt{3} - 1$ のとき，$\angle\mathrm{AOP} = 45^\circ$ から $\triangle$OAB は $\angle\mathrm{AOB} = 90^\circ$ の直角二等辺三角形となり，

$$\mathrm{AB} = \sqrt{2}\,\mathrm{OA} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

また, AB と OP の交点を Q とするとき,

$$\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{AOB} + \angle\mathrm{AQO} = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$$

そこで，$\triangle$ABC に正弦定理を適用すると，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin 135^\circ} = 2\cdot 2,\quad \mathrm{BC} = 4\sin 135^\circ = 2\sqrt{2}$$

### ［解 説］

三角比についての基本問題です。最後の設問は，いろいろな考え方ができます。たとえば，$\triangle$BCP が直角二等辺三角形であるのを発見するのも，その１つです。

## 第３問

問題のページへ

(1)　公比を $r$ とすると，$a_1+a_2=32$ より，$a_1+a_1r=32$ ………①

$a_4+a_5=864$ より，$a_1r^3+a_1r^4=864$，$(a_1+a_1r)r^3=864$ ………②

①②より，$r^3=\dfrac{864}{32}=27$ となり，$r$ は実数より，$r=3$

①から $a_1=8$ なので，$a_n=8\cdot 3^{n-1}$ である。

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+4k-2)=8\cdot\frac{3^n-1}{3-1}+4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-2n=4\cdot 3^n+2n^2-4$$

(2)　$\dfrac{9}{37}=0.\dot{2}4\dot{3}$ より，$b_{n+p}=b_n$ となる最小の自然数 $p$ は $p=3$ である。

また，$100=3\times 33+1$ より，

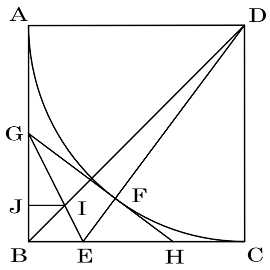
$$\sum_{k=1}^{100}b_k=\sum_{k=1}^{99}b_k+b_{100}=(2+4+3)\times 33+2=299$$

### ［解 説］

(1)はありふれた問題ですが，(2)は，割り算を実行するまでは，難易の見当がつかないものでした。しかし，周期が 3 の数列が現れ，予想以上に簡単でした。

## 第４問

問題のページへ




(1)　点 E は BC を $1:3$ に内分することより,

$$EC=\frac{3}{4}BC=\frac{3}{4}$$

△ECD に三平方の定理を用いると,

$$ED^2=CD^2+CE^2=1+\frac{9}{16}=\frac{25}{16},\quad ED=\frac{5}{4}$$

よって，$EF=ED-DF=\dfrac{1}{4}$

△GBE と△GFE において,

$\angle GBE=\angle GFE=90^\circ$, GE は共通，$BE=FE=\dfrac{1}{4}$ なので,

$$\triangle GBE\equiv\triangle GFE$$

よって，$\angle BGE=\angle FGE$ となり，さらに $\angle GBI=\angle EBI=45^\circ$ より，I は△BGH の 2 つの内角の二等分線の交点となるので，△BGH の内心である。

(2)　まず，$GA=GF=GB$ なので, G は AB の中点であり，$GB=\dfrac{1}{2}$ である。

また，△IJB は直角二等辺三角形より，$JI=JB=r$ となる。

ここで, $JI\,/\!/\,BE$ から，$GB:BE=GJ:JI$ となり,

$$\frac{1}{2}:\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}-r\right):r,\quad \frac{1}{2}r=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-r\right),\quad r=\frac{1}{6}$$

［解 説］

例年，この第 4 問は，解いていくうちに苛立ってしまうのですが，今年の本試は，その程度が軽いものでした。

## 第５問

問題のページへ

(1)　$A=50$，$B=11$ のとき, $X$, $Y$ の値の変化は次の表のようになる。

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $Y$ | 50 | 39 | 28 | 17 | 6 |

まず, $A>0$ から 210 行は実行されない。

また，この表から 170 行は 4 回実行され，最右列の数値より，

X は 4, Y は 6 です。

と表示される。

(2)　$A=-50$，$B=6$ のとき, $X$, $Y$ の値の変化は次の表のようになる。

| $X$ | 0 | −1 | −2 | −3 | −4 | −5 | −6 | −7 | −8 | −9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y$ | −50 | −44 | −38 | −32 | −26 | −20 | −14 | −8 | −2 | 4 |

まず, $A<0$ から 170 行は実行されない。

また，この表から 210 行は 9 回実行され，最右列の数値より，

X は−9, Y は 4 です。

と表示される。

(3)　$A=14.9$，$B=2.5$ のとき, $X$, $Y$ の値の変化は次の表のようになる。

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y$ | 14.9 | 12.4 | 9.9 | 7.4 | 4.9 | 2.4 |

この表の最右列の数値より，

X は 5, Y は 2.4 です。

と表示されるので, $Y$ の値を既約分数で表すと，$2.4=\dfrac{12}{5}$ となる。

［解 説］

プログラムを読み，値を計算していけば，空欄を埋めることのできる基本問題です。