第１問（必答問題）

解答解説のページへ

[1]　不等式$\log_2(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\leqq 0$を満たす$x$の値の範囲は,

$\boxed{\text{ア}}<x\leqq\boxed{\text{イ}}$である。$x$がこの範囲にあるとき,

$$y=4^x-6\cdot 2^x+10$$

の最大値と最小値を求めよう。

$X=2^x$とおくと, Xのとる値の範囲は$\boxed{\text{ウ}}<X\leqq\boxed{\text{エ}}$であり,

$$y=\left(X-\boxed{\text{オ}}\right)^{\boxed{\text{カ}}}+\boxed{\text{キ}}$$

である。したがって, yは$x=\boxed{\text{ク}}$のとき最大値$\boxed{\text{ケ}}$をとり,

$x=\log_2\boxed{\text{コ}}$のとき最小値$\boxed{\text{サ}}$をとる。

[2]　αを$0°<\alpha<180°$を満たす角度とする。$0°\leqq\theta\leqq 180°$の範囲で関数

$$f(\theta)=\sin(\theta-\alpha)-\sin\theta$$

を考える。

(1)　方程式$f(\theta)=0$の解θはαを用いて，$\theta=\boxed{\text{シス}}°+\dfrac{\alpha}{2}$と表される。さらに，この解$\theta$が$\sin(\theta-\alpha)=\dfrac{1}{2}$を満たすならば，$\alpha=\boxed{\text{セソタ}}°$である。

(2)　αを(1)で求めた角度とするとき，関数$f(\theta)$は，$\theta=\boxed{\text{チツテ}}°$のとき最大値$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$，$\theta=\boxed{\text{ニヌ}}°$のとき最小値$-\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}$をとる。

第２問（必答問題）

解答解説のページへ

(1) 座標平面上の放物線 $y=x^2$ を C とする。a は $a\neq 1$ を満たす実数とし，C 上に点 $\mathrm{P}(a+1,\ (a+1)^2)$ と点 $\mathrm{Q}(2a,\ 4a^2)$ をとる。2 点 P，Q を通る直線を l とすると，l の方程式は

$$y=\left(\boxed{\text{ア}}a+\boxed{\text{イ}}\right)x-\boxed{\text{ウ}}a^2-\boxed{\text{エ}}a$$

である。次に，b は $b\neq 1$，$b\neq a$ を満たす実数として，2 点

$$\mathrm{R}(b+1,\ (b+1)^2),\ \mathrm{S}(2b,\ 4b^2)$$

を通る直線を m とする。直線 l, m の交点 T は，

$$\mathrm{T}\left(\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}(a+b+1),\ \ \boxed{\text{キ}}ab+\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}(a+b+1)\right)$$

である。よって，b を限りなく a に近づけるとき，点 T は限りなく点

$$\mathrm{U}\left(\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}a+\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{ケ}}},\ \ \boxed{\text{サ}}a^2+\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}a+\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{ケ}}}\right)$$

に近づく。

(2) (1)で求めた点 U は，a の値によらない放物線

$$D:y=\frac{\boxed{\text{シ}}\,x^2-\boxed{\text{ス}}\,x+\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

上にある。さらに，点 U における放物線 D の接線の傾きは $\boxed{\text{タ}}a+\boxed{\text{チ}}$ である。放物線 D の接線で原点 O を通るものは，$y=x$ と $y=\boxed{\text{ツテ}}x$ の 2 つである。

(3) 2 つの放物線 C, D の共有点の座標は $\left(\boxed{\text{ト}},\ \boxed{\text{ナ}}\right)$ である。放物線 C, D および y 軸で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

第３問（選択問題）

解答解説のページへ

点A(0, 0, 0)を通り，ベクトル$\vec{u}=(1,\ 1,\ 0)$に平行な直線を l とする。また，点B(0, 5, −2)を通り，ベクトル$\vec{v}=(1,\ 0,\ 1)$に平行な直線を m とする。l 上の点 P から m に下ろした垂線の足をP$'$とする。また，m 上の点 Q から l に下ろした垂線の足をQ$'$とする。$\mathrm{PP'}=\mathrm{QQ'}$ かつ$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}\perp\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}$となる P と Q を求めよう。

(1) 実数t，t'，s，s'により，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\vec{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{BP'}}=t'\vec{v}$，$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=s\vec{v}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ'}}=s'\vec{u}$と表される。

直線PP$'$と直線 m が直交するから，$t'=\boxed{\text{ア}}+\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}t$である。ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$の成分を t を用いて表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}=\left(\boxed{\text{エ}}-\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}t,\quad \boxed{\text{キ}}-t,\quad \boxed{\text{クケ}}+\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}t\right)$$

である。同様に直線QQ$'$と直線 l が直交するから，$s'=\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}s$である。ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}$の成分を s を用いて表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}=\left(\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}-\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}s,\quad \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}+\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}s,\quad \boxed{\text{ナ}}-s\right)$$

である。

(2) さて，$\mathrm{PP'}^2+\mathrm{QP'}^2=\mathrm{PQ}^2=\mathrm{QQ'}^2+\mathrm{PQ'}^2$であるから，$\mathrm{PP'}=\mathrm{QQ'}$であるための条件は$\mathrm{QP'}=\mathrm{PQ'}$である。$\overrightarrow{\mathrm{PQ'}}=(s'-t)\vec{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{QP'}}=(t'-s)\vec{v}$であるから，$\mathrm{PQ'}=\mathrm{QP'}$となるのは，$s=\boxed{\text{ニ}}-t$ ……①または$s=\boxed{\text{ヌネ}}+t$ ……②のときである。

(3) ①が成り立つとき，$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$と$\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}$が垂直になるのは$t=\boxed{\text{ノ}}$または$t=\boxed{\text{ハ}}$のときである。（$\boxed{\text{ノ}}$と$\boxed{\text{ハ}}$は解答の順序は問わない）

②が成り立つときは，$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$と$\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}$が垂直になるような実数 t の値はない。

第４問（選択問題）

解答解説のページへ

複素数$z = x + yi$ （x, y は実数）は$y \neq 0$を満たし，かつ 1，z，z^2，z^3は相異なるとする。またzに共役な複素数を$\overline{z} = x - yi$とする。

(1) 複素数平面において 1，z，z^2，z^3の表す点をそれぞれA_0，A_1，A_2，A_3とする。線分A_0A_1と線分A_2A_3が両端以外で交わる条件を求めよう。線分A_0A_1と線分A_2A_3が両端以外の点 B で交わるとする。点 B を表す複素数をwとする。点 B が線分A_0A_1を$a : (1-a)$に内分していれば，$w = az + 1 - a$と表される。ここで$0 < a < 1$である。点 B が線分A_2A_3を$b : (1-b)$に内分していれば，$w = bz^3 + (1-b)z^2$と表される。ここで$0 < b < 1$である。ゆえに

$$bz^3 + (1-b)z^2 = az + 1 - a$$

すなわち$\left(z - \boxed{\text{ア}}\right)\left(\boxed{\text{イ}}z^2 + z + 1 - \boxed{\text{ウ}}\right) = 0$である。

zは実数でないから

$$z + \overline{z} = -\frac{1}{\boxed{\text{エ}}}, \quad z\overline{z} = \frac{1 - \boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

である。これからaとbを, xとyを用いて表すと,

$$a = \boxed{\text{キ}} + \frac{x^{\boxed{\text{ク}}} + y^{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}\,x}, \quad b = -\frac{1}{\boxed{\text{サ}}\,x}$$

である。

したがって，$0 < a < 1$，$0 < b < 1$より，線分A_0A_1と線分A_2A_3が両端以外で交わる条件は

$$x < \frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}} \quad \text{かつ} \quad \left(x + \boxed{\text{ソ}}\right)^2 + y^2 < \boxed{\text{タ}}$$

である。

(2) z^4の表す点をA_4とする。zが(1)の条件を満たすとき，すなわち線分A_0A_1と線分A_2A_3が両端以外で交わるとき，線分A_3A_4と線分A_1A_2は両端以外で$\boxed{\text{チ}}$。

$\boxed{\text{チ}}$に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから１つ選べ。

⓪ 必ず交わる

① 交わることはない

② 交わることも，交わらないこともある

第５問（選択問題）

解答解説のページへ

2つのさいころAとBがあり，各面に1, 2, 3, 4, 5, 6という目が書かれている。これらのさいころについて, Aのさいころの各面には1, 3, 4, 5, 6, 8の目のシールを貼り, Bのさいころの各面には1, 2, 2, 3, 3, 4の目のシールを貼った。

はじめに硬貨を投げ，次にAとBのさいころを同時に投げる次の試行を行う。

● 硬貨を投げて表が出れば，両方のさいころのシールをすべてはがして2つのさいころを同時に投げる。

● 硬貨を投げて裏が出れば，両方ともシールをはがさずに2つのさいころを同時に投げる。

この試行について次の問いに答えよ。ただし，シールの有無にかかわらず，さいころの各面の出方は同様に確からしいとする。

(1) 2つのさいころの目の和が3の倍数になる場合は，硬貨を投げて表が出たとき $\boxed{\text{アイ}}$ 通りあり，裏が出たとき $\boxed{\text{ウエ}}$ 通りある。したがって，この試行において 2 つのさいころの目の和が 3 の倍数になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。また，目の和が 3 の倍数であるという条件のもとで，2 つのさいころの目の差が 2 以下である条件つき確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

(2) この試行における2つのさいころの目の和を表す確率変数を X とする。

硬貨を投げて表が出たとき，同時に投げた 2 つのさいころの目の和の平均（期待値）は $\boxed{\text{ケ}}$ であり，その分散は $\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

硬貨を投げて裏が出たとき，2 つのさいころの目の和の平均は $\boxed{\text{ス}}$ であり，その分散は $\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

したがって，この試行における X の平均 $E(X)$ は $\boxed{\text{チ}}$，分散 $V(X)$ は $\dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。

第６問（選択問題）

解答解説のページへ

自然数 x, p および n を入力して x^p を n で割った余りを出力するプログラムを作成する。ただし，このプログラムを実行するコンピュータは 2^{63} 以上の数値を取り扱うことができないとする。

ここで，INT(X) は X をこえない最大の整数を表す関数である。また，必要ならば $\log_{10} 2 = 0.3010$ を用いてもよい。

〔プログラム 1〕

```
100  INPUT  " X,P,N" ; X,P,N
110  A=1
120  FOR  K=1  TO  [ ア ]
130    A=A*X
140  NEXT  K
150  A=[ イ ]
160  PRINT  A
170  END
```

(1)　〔プログラム 1〕の 120 行から 140 行の FOR 〜 NEXT 文で x^p を求めている。

$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，次の⓪〜⑥のうちから 1 つ選べ。

⓪ P　① 2*P　② P*P　③ P*X　④ A　⑤ N　⑥ X

また，150 行で x^p を n で割った余りを求めている。$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを，次の⓪〜⑤のうちから 1 つ選べ。

⓪ INT(A/N)　① INT(A/N)*N　② A−INT(A/N)

③ A+INT(A/N)　④ A−INT(A/N)*N　⑤ A+INT(A/N)*N

(2)　2^{63} は 10 進法で $\boxed{\text{ウエ}}$ 桁の数である。$x=4$ ならば $p \geqq \boxed{\text{オカ}}$ のとき，$x=8$ ならば $p \geqq \boxed{\text{キク}}$ のとき，おのおの $x^p \geqq 2^{63}$ であるので，〔プログラム 1〕による計算は，このコンピュータでは取り扱うことができない。ただし，$\boxed{\text{オカ}}$，$\boxed{\text{キク}}$ にはそれぞれ条件に適する最小の自然数を答えよ。

(3)　〔プログラム 1〕について(2)で述べた x と p の大きさに関する制限を改善するため，次の性質を利用してプログラムを変更する。

「S, T を自然数とするとき，S, T を n で割った余りを s, t とする。このとき，$s<n$ かつ $t<n$ であり，積 ST を n で割った余りと積 st を n で割った余りは等しい」

〔プログラム 2〕

```
100 INPUT "X,P,N"; X,P,N
110 B=[ケ]
120 A=1
130 FOR K=1 TO [ア]
140   A=A*B
150   A=[イ]
160 NEXT K
170 PRINT A
180 END
```

〔プログラム 2〕の 110 行で x を n で割った余りを計算している。$\boxed{\text{ケ}}$に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから 1 つ選べ。

⓪ INT(X/N)　　① INT(X/N)*N　　② X-INT(X/N)

③ X+INT(X/N)　　④ X-INT(X/N)*N　　⑤ X+INT(X/N)*N

〔プログラム 2〕を実行し，変数 X, P, N にそれぞれ 8, 25, 5 を入力する。このとき, 110 行の B の値は$\boxed{\text{コ}}$である。さらに, 130 行から 160 行の FOR ～ NEXT 文の各ステップにおける 140 行の A*B の値のなかでの最大値は$\boxed{\text{サシ}}$である。

130 行から 160 行までのループを 1 回処理するのに10^{-8}秒必要であり，その他の行の処理時間は無視できるものとする。$p = 2^{62}$ のとき，〔プログラム 2〕を実行するのに必要な時間を s 秒とすると，$10^{\boxed{\text{スセ}}} \leqq s < 10^{\boxed{\text{スセ}}+1}$ である。

第１問[1]

問題のページへ

不等式 $\log_2(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\leqq 0$ ……(＊)に対して，$x-1>0$ かつ $3-x>0$ より，

$$1<x<3 \cdots\cdots\cdots ①$$

また(＊)より，$\log_2(x-1)+\dfrac{\log_2(3-x)}{\log_2 2^{-1}}\leqq 0$，$\log_2(x-1)-\log_2(3-x)\leqq 0$

$$\log_2(x-1)\leqq \log_2(3-x),\ x-1\leqq 3-x,\ x\leqq 2 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$1<x\leqq 2$

すると，$2^1<2^x\leqq 2^2$ より，$2<X\leqq 4$ であり，

$$y=4^x-6\cdot 2^x+10=X^2-6X+10=(X-3)^2+1$$

よって, y は $X=4$ $(x=2)$ で最大値 2 をとり，$X=3$ $(x=\log_2 3)$ で最小値 1 をとる。

[解 説]

基本題です。例年より簡単です。

第 1 問[2]

問題のページへ

(1) $\sin(\theta-a)-\sin\theta=0$ より，$\sin(\theta-a)=\sin\theta$

ここで，$-180°<\theta-a<180°$，$0°\leqq\theta\leqq180°$，$\theta-a<\theta$ より，

$$\theta-a=180°-\theta,\ \theta=90°+\frac{a}{2}$$

このとき，$\sin(\theta-a)=\dfrac{1}{2}$ より，$\sin\left(90°-\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$，$\cos\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{2}$

$0°<\dfrac{a}{2}<90°$ から，$\dfrac{a}{2}=60°$，$a=120°$

(2) $a=120°$ のとき，

$$f(\theta)=\sin(\theta-120°)-\sin\theta=\sin\theta\cos120°-\cos\theta\sin120°-\sin\theta$$
$$=-\frac{3}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=-\sqrt{3}\sin(\theta+30°)$$

$30°\leqq\theta+30°\leqq210°$ より，関数 $f(\theta)$ は $\theta+30°=210°$ $(\theta=180°)$ のとき最大値 $-\sqrt{3}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ をとり，$\theta+30°=90°$ $(\theta=60°)$ のとき最小値 $-\sqrt{3}\times1=-\sqrt{3}$ をとる。

［解 説］

方程式は因数分解からという基本に従えば，和積公式の利用でしょうが，出題者の意図は，たぶん上の解法でしょう。

第２問

問題のページへ

(1)　直線 l は，$a\neq 1$ より，$y-4a^2=\dfrac{4a^2-(a+1)}{2a-(a+1)}(x-2a)=(3a+1)(x-2a)$

$$y=(3a+1)(x-2a)+4a^2=(3a+1)x-2a^2-2a\cdots\cdots\cdots①$$

同様にして，直線 m は，$y=(3b+1)x-2b^2-2b\cdots\cdots\cdots②$

①②の交点は，$(3a+1)x-2a^2-2a=(3b+1)x-2b^2-2b$

$$3(a-b)x=2(a^2-b^2)+2(a-b)$$

$b\neq a$ より，$3x=2(a+b)+2$，$x=\dfrac{2}{3}(a+b+1)$

①に代入して，$y=(3a+1)\cdot\dfrac{2}{3}(a+b+1)-2a^2-2a=2ab+\dfrac{2}{3}(a+b+1)$ より，

$$\mathrm{T}\Big(\frac{2}{3}(a+b+1),\ 2ab+\frac{2}{3}(a+b+1)\Big)$$

$b\to a$ のとき，$\dfrac{2}{3}(a+b+1)\to\dfrac{4}{3}a+\dfrac{2}{3}$，$2ab+\dfrac{2}{3}(a+b+1)\to 2a^2+\dfrac{4}{3}a+\dfrac{2}{3}$ より，

$$\mathrm{U}\Big(\frac{4}{3}a+\frac{2}{3},\ 2a^2+\frac{4}{3}a+\frac{2}{3}\Big)$$

(2)　点 $\mathrm{U}(x,\ y)$ とすると，(1)より，$x=\dfrac{4}{3}a+\dfrac{2}{3}\cdots\cdots③$，$y=2a^2+\dfrac{4}{3}a+\dfrac{2}{3}\cdots\cdots④$

③より $a=\dfrac{1}{4}(3x-2)$ となり，④に代入して，

$$D:y=2\cdot\frac{1}{16}(3x-2)^2+x=\frac{9x^2-4x+4}{8}\cdots\cdots\cdots⑤$$

$y'=\dfrac{1}{4}(9x-2)$ より，$x=\dfrac{4}{3}a+\dfrac{2}{3}$ のとき $y'=\dfrac{9}{4}\Big(\dfrac{4}{3}a+\dfrac{2}{3}\Big)-\dfrac{1}{2}=3a+1$ となり，点 U における接線の傾きは $3a+1$ となる。

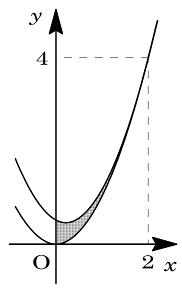
また，⑤の原点を通る接線を $y=mx$ とおくと，⑤と連立して，

$$\frac{9x^2-4x+4}{8}=mx,\quad 9x^2-(4+8m)x+4=0$$

重解をもつことより，$D/4=(2+4m)^2-36=0$ から，$m=1,\ -2$ である。

(3)　$C:y=x^2$ と D との共有点は，$x^2=\dfrac{9x^2-4x+4}{8}$ より，

$x=2$ となり，その座標は $(2,\ 4)$ である。



また，右図の網点部の面積 S は，

$$S=\int_0^2\Big(\frac{9x^2-4x+4}{8}-x^2\Big)dx=\frac{1}{8}\int_0^2(x-2)^2dx$$

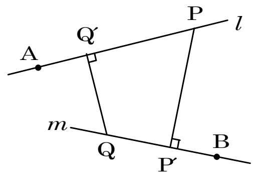
$$=\frac{1}{24}\Big[(x-2)^3\Big]_0^2=\frac{1}{3}$$

［解　説］

盛りだくさんの出題です。なお，(2)の後半は，誘導を無視しました。

第３問

問題のページへ



(1)　$\vec{u}=(1,\ 1,\ 0)$，$\vec{v}=(1,\ 0,\ 1)$ より，$|\vec{u}|=|\vec{v}|=\sqrt{2}$，

$\vec{u}\cdot\vec{v}=1$ となり，また $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,\ 5,\ -2)$ である。

$$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}=\overrightarrow{\mathrm{AP'}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t'\vec{v}-t\vec{u}$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}\cdot\vec{v}=0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{v}+t'|\vec{v}|^2-t\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

よって，$-2+2t'-t=0$ となるので，

$$t'=1+\frac{1}{2}t$$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}=(0,\ 5,\ -2)+t'(1,\ 0,\ 1)-t(1,\ 1,\ 0)=(t'-t,\ 5-t,\ -2+t')$

$$=\left(1-\frac{1}{2}t,\ 5-t,\ -1+\frac{1}{2}t\right)=\frac{1}{2}(2-t,\ 10-2t,\ -2+t)$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}-s\vec{v}+s'\vec{u}=(-s+s',\ -5+s',\ 2-s)$ で，$\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}\cdot\vec{u}=0$ より，同様にすると $s'=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}s$ となり，これより $\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}=\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}s,\ -\frac{5}{2}+\frac{1}{2}s,\ 2-s\right)$

(2)　$\mathrm{PP'}=\mathrm{QQ'}$ から，$\mathrm{QP'}=\mathrm{PQ'}$ となるので，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QP'}}|$ より，

$$|s'-t||\vec{u}|=|t'-s||\vec{v}|,\quad \sqrt{2}\left|\frac{5}{2}+\frac{1}{2}s-t\right|=\sqrt{2}\left|1+\frac{1}{2}t-s\right|$$

よって，$|5+s-2t|=|2+t-2s|$

(i)　$5+s-2t=-(2+t-2s)$ のとき　$s=7-t$

(ii)　$5+s-2t=2+t-2s$ のとき　$s=-1+t$

(3)　$s=7-t$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}=\frac{1}{2}(-2+t,\ 2-t,\ -10+2t)$

$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}\perp\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}=0$ なので，

$$(2-t)(-2+t)+(10-2t)(2-t)+(-2+t)(-10+2t)=0$$

$t^2-8t+12=0$ より，$t=2,\ 6$

また，$s=-1+t$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}=\frac{1}{2}(6-t,\ -6+t,\ 6-2t)$

同様にすると，$t^2-8t+20=0$ となり，実数 t は存在しない。

［解　説］

問題文を読み飛ばさずに，順を追って計算を進めると，10 分程度では終わりそうにありません。新傾向でしょうか。

第４問

問題のページへ

(1)　まず, w が線分 $\mathrm{A_0A_1}$ を $a:(1-a)$ に内分しているとき，$w=az+1-a$

また, w が線分 $\mathrm{A_2A_3}$ を $b:(1-b)$ に内分しているとき，$w=bz^3+(1-b)z^2$

$$bz^3+(1-b)z^2=az+1-a\,,\ bz^3+(1-b)z^2-az+a-1=0$$

よって，$(z-1)(bz^2+z+1-a)=0$ となり, z は実数ではないので,

$$bz^2+z+1-a=0\cdots\cdots\cdots①$$

a, b は実数より，①は z と $\overline{z}$ を解にもつ。

$$z+\overline{z}=-\frac{1}{b}\cdots\cdots\cdots②,\ z\overline{z}=\frac{1-a}{b}\cdots\cdots\cdots③$$

②より，$2x=-\dfrac{1}{b}$，$b=-\dfrac{1}{2x}$

③より，$x^2+y^2=\dfrac{1-a}{b}$，$a=1-b(x^2+y^2)=1+\dfrac{x^2+y^2}{2x}$

$0<a<1$，$0<b<1$ より，

$$0<1+\frac{x^2+y^2}{2x}<1\cdots\cdots\cdots④,\ 0<-\frac{1}{2x}<1\cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤より $0>\dfrac{1}{2x}>-1$ から, $x<0$ となり，$1<-2x$，$x<-\dfrac{1}{2}$

④より，$0>2x+x^2+y^2>2x$ となるが，$x^2+y^2>0$ は $y\neq 0$ より成立するので, $2x+x^2+y^2<0$ から，$(x+1)^2+y^2<1$

(2)　(1)より，$w=az+1-a$ なので，$wz=az^2+(1-a)z$

また，$w=bz^3+(1-b)z^2$ なので，$wz=bz^4+(1-b)z^3$

よって，(1)の条件，すなわち $0<a<1$，$0<b<1$ を満たすとき，線分 $\mathrm{A_1A_2}$ と線分 $\mathrm{A_3A_4}$ とは wz で表される両端以外の点で交わる。

［解　説］

前問ほどではないにせよ，途中の結果が問題文中に書かれており，スタートするまでに時間がかかります。これも新傾向でしょうか。

第５問

問題のページへ

(1) 硬貨を投げて表が出たとき，目の和が 3 の倍数になる場合は，和 3(1＋2, 2＋1)が 2 通り，和 6(1＋5, 2＋4, 3＋3, 4＋2, 5＋1)が 5 通り，和 9(3＋6, 4＋5, 5＋4, 6＋3)が 4 通り，和 12(6＋6)が 1 通り，合わせて 12 通りある。

硬貨を投げて裏が出たとき，目の和が 3 の倍数になる場合は，和 3(1＋2)が 2 通り，和 6(3＋3, 4＋2, 5＋1)が 2＋2＋1 の 5 通り，和 9(5＋4, 6＋3, 8＋1)が 1＋2＋1 の 4 通り，和 12(8＋4)が 1 通り，合わせて 12 通りある。

よって，目の和が 3 の倍数になる確率は，$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{12}{36}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$

また，目の和が 3 の倍数であり，しかも目の差が 2 以下である場合は，表が出たとき 8 通り，裏が出たとき 7 通りあり，その確率は，

$$\frac{1}{2}\times\frac{8}{36}+\frac{1}{2}\times\frac{7}{36}=\frac{5}{24}$$

したがって，和が 3 の倍数であるという条件のもとで，差が 2 以下である条件つき確率は，$\dfrac{5}{24}\div\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{8}$ である。

(2) さいころ A の目，さいころ B の目を表す確率変数を，それぞれ X_a，X_b とおく。すると，X_a と X_b は独立で，$X=X_a+X_b$ である。

硬貨を投げて表が出たとき, X の平均を $E_1(X)$，分散を $V_1(X)$ とおく。

$$E_1(X_a)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$$

$$V_1(X_a)=\left(1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}+5^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$$

同様に，$E_1(X_b)=\dfrac{7}{2}$，$V_1(X_b)=\dfrac{35}{12}$ なので,

$$E_1(X)=E_1(X_a+X_b)=E_1(X_a)+E_1(X_b)=7$$

$$V_1(X)=V_1(X_a+X_b)=V_1(X_a)+V_1(X_b)=\frac{35}{6}$$

硬貨を投げて裏が出たとき, X の平均を $E_2(X)$，分散を $V_2(X)$ とおく。

$$E_2(X_a)=1\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}+8\times\frac{1}{6}=\frac{9}{2}$$

$$V_2(X_a)=\left(1^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}+5^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{6}+8^2\times\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{9}{2}\right)^2=\frac{59}{12}$$

同様に，$E_2(X_b)=1\times\dfrac{1}{6}+2\times\dfrac{1}{3}+3\times\dfrac{1}{3}+4\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{2}$

$$V_2(X_b)=\left(1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{11}{12}$$

よって，$E_2(X)=E_2(X_a+X_b)=E_2(X_a)+E_2(X_b)=7$

$$V_2(X)=V_2(X_a+X_b)=V_2(X_a)+V_2(X_b)=\frac{35}{6}$$

以上より，$E(X)=\dfrac{1}{2}\times E_1(X)+\dfrac{1}{2}\times E_2(X)=7$

また，$V_1(X)=E_1(X^2)-(E_1(X))^2$ より，$E_1(X^2)=V_1(X)+(E_1(X))^2$

同様に，$E_2(X^2)=V_2(X)+(E_2(X))^2$ となり，

$$E(X^2)=\frac{1}{2}\times E_1(X^2)+\frac{1}{2}\times E_2(X^2)$$
$$=\frac{1}{2}\{V_1(X)+(E_1(X))^2\}+\frac{1}{2}\{V_2(X)+(E_2(X))^2\}$$

よって，$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$ より，

$$V(X)=\frac{1}{2}\{V_1(X)+(E_1(X))^2\}+\frac{1}{2}\{V_2(X)+(E_2(X))^2\}$$
$$-\left\{\frac{1}{2}E_1(X)+\frac{1}{2}E_2(X)\right\}^2$$
$$=\frac{1}{2}V_1(X)+\frac{1}{2}V_2(X)+\frac{1}{4}\left\{E_1(X)-E_2(X)\right\}^2$$
$$=\frac{35}{6}$$

［解 説］

$E(X)$ と $V(X)$ の値は，$E_1(X)=E_2(X)$，$V_1(X)=V_2(X)$ から「明らかに」としてもよいのですが，「明らかに」という言葉は「面倒くさい」と同義なことが多いので，しつこく計算してみました。時間内に終わることは期待できませんが……。

第６問

問題のページへ

(1) A の値を x^p にするには, 1 に x を p 回かければよいので, 120 行は,

```
120  FOR  K=1  TO  P
```

150 行は, A の値を n で割った余りを, A に代入する計算なので,

```
150  A=A-INT(A/N)*N
```

(2) $\log_{10} 2^{63} = 63\log_{10} 2 = 63 \times 0.3010 = 18.963$ より,

$18 < \log_{10} 2^{63} < 19$, $10^{18} < 2^{63} < 10^{19}$

よって, 2^{63} は 19 桁の数である。

さて, $x^p \geqq 2^{63}$ を満たす p は, $x = 4$ のとき, $4^p \geqq 2^{63}$

$2^{2p} \geqq 2^{63}$, $2p \geqq 63$

p は自然数より, $p \geqq 32$

また, $x = 8$ のとき, 同様にして $8^p \geqq 2^{63}$, $2^{3p} \geqq 2^{63}$, $3p \geqq 63$

p は自然数より, $p \geqq 21$

(3) 110 行は, x を n で割った余りを B に代入する計算なので,

```
110  B=X-INT(X/N)*N
```

さて, $x = 8$, $p = 25$, $n = 5$ のとき, 110 行の B の値は 8 を 5 で割った余りとなるので, $B = 3$ である。また, 130 行の K の値, 140 行の A*B の値, 150 行の A の値の変化を表にまとめると,

K	1	2	3	4	5	6	…
A*B	3	9	12	6	3	9	…
A	3	4	2	1	3	4	…

これより, A*B の値は 3, 9, 12, 6 を周期 4 でくり返すことがわかり, A*B の値の最大値は 12 である。

また, 130 行から 160 行までのループを $p = 2^{62}$ 回処理するのにかかる時間を s 秒とすると, $s = 10^{-8} \times 2^{62}$ なので,

$$\log_{10} s = -8 + 62\log_{10} 2 = 10.662$$

よって, $10 \leqq \log_{10} s < 11$ より, $10^{10} \leqq s < 10^{11}$

［解 説］

常用対数を利用して概数を求めることと, コンピュータの処理能力を関連させた出題です。