第１問（必答問題）

解答解説のページへ

[1]　a を定数とし，x の 2 次関数 $y=x^2-2(a+2)x+a^2-a+1$ のグラフを G とする。

(1)　グラフ G と y 軸との交点の y 座標を Y とする。Y の値が最小になるのは，$a=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ のときで，最小値は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。このときグラフ G は x 軸と異なる 2 点で交わり，その交点の x 座標は $\dfrac{\boxed{オ}\pm\sqrt{\boxed{カキ}}}{\boxed{ク}}$ である。

(2)　グラフ G が y 軸に関して対称になるのは $a=-\boxed{ケ}$ のときで，このときのグラフを G_1 とする。グラフ G が x 軸に接するのは $a=-\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ のときで，このときのグラフを G_2 とする。グラフ G_1 を x 軸方向に $\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$，$y$ 軸方向に $\boxed{セソ}$ だけ平行移動するとグラフ G_2 に重なる。

[2]　大小 2 個のさいころを投げ，出た目の数をそれぞれ a, b とし，2 次関数 $y=x^2-\dfrac{b-2}{a}$ のグラフを C とする。

(1)　グラフ C と x 軸との共有点の個数が 0 個である確率(すなわちグラフ C が x 軸と共有点をもたない確率)は $\dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}$ であり，共有点の個数が 1 個である確率は $\dfrac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}$，共有点の個数が 2 個である確率は $\dfrac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}$ である。

(2)　グラフ C と x 軸との共有点の個数の期待値は $\dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$ である。

(3)　グラフ C と x 軸との共有点をもち，かつ共有点の x 座標がすべて整数となる確率は $\dfrac{\boxed{ネノ}}{\boxed{ハヒ}}$ である。

第２問（必答問題）

解答解説のページへ

[1]　a, b を実数とし, x の整式

$$A = x^4 + (a^2 - a - 1)x^2 + (-a^2 + b)x + b^3,\quad B = x^2 - x - a$$

を考える。A を B で割った商を Q, 余りを R とすると,

$$Q = x^2 + x + a^{\boxed{ア}},\quad R = (a+b)x + a^{\boxed{イ}} + b^{\boxed{ウ}}$$

である。

(1)　$R = x + 7$ のとき, $a = \boxed{エ}$ または $a = \boxed{オカ}$ である。

(2)　$\boxed{キ}$ と $\boxed{ク}$ に当てはまるものを, 下の⓪〜③のうちから１つずつ選べ。

(i)　$a < -\dfrac{1}{2}$ は, すべての実数 x に対して $Q > 0$ となるための $\boxed{キ}$。

(ii)　$a + b = 0$ は, A が B で割り切れるための $\boxed{ク}$。

⓪　必要十分条件である

①　必要条件であるが十分条件ではない

②　十分条件であるが必要条件ではない

③　必要条件でも十分条件でもない

[2]　線分 AB を直径とする半円周上に 2 点 C, D があり, $\mathrm{AC} = 2\sqrt{5}$, $\mathrm{AD} = 8$, $\tan\angle\mathrm{CAD} = \dfrac{1}{2}$ であるとする。

このとき, $\cos\angle\mathrm{CAD} = \dfrac{\boxed{ケ}\sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}}$, $\mathrm{CD} = \boxed{シ}\sqrt{\boxed{ス}}$ である。

さらに, $\triangle\mathrm{ADC}$ の面積は $\boxed{セ}$, $\mathrm{AB} = \boxed{ソタ}$ である。

第３問（選択問題）

解答解説のページへ

(1)　数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ が

$$S_n = -n^2 + 24n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で与えられるものとする。このとき$a_1 = \boxed{\text{アイ}}$，$a_2 = \boxed{\text{ウエ}}$である。また$a_n < 0$ となる自然数 n の値の範囲は$n \geqq \boxed{\text{オカ}}$であり，$\sum_{k=1}^{40} |a_k| = \boxed{\text{キクケ}}$となる。

(2)　初項 1，公比 3 の等比数列を$\{b_k\}$とおく。各自然数 n に対して，$b_k \leqq n$ を満たす最大のb_kをc_nとおく。たとえば，$n = 5$のとき，$b_2 = 3$，$b_3 = 9$であり，

$$b_1 < b_2 \leqq 5 < b_3 < b_4 < \cdots\cdots$$

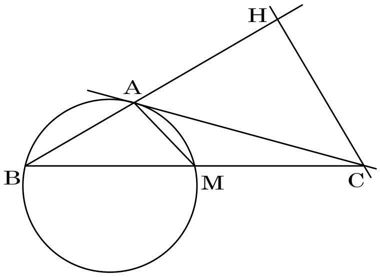
なので$c_5 = b_2 = 3$である。

(i)　$c_{10} = \boxed{\text{コ}}$であり，$c_n = 27$である自然数 n は全部で$\boxed{\text{サシ}}$個ある。

(ii)　$\sum_{k=1}^{30} c_k = \boxed{\text{スセソ}}$である。

第４問（選択問題）

解答解説のページへ



$\triangle$ABC において，$\angle$A は鈍角で，$\angle B = 30^\circ$ である。点 C から直線 AB に引いた垂線と直線 AB との交点を H とする。辺 BC の中点を M とし，直線 AC は 3 点 A, B, M を通る円と点 A で接しているとする。

下の$\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{ク}}$については，最も適当なものを次の⓪～Ⓕのうちから 1 つずつ選べ。

⓪ 鋭角三角形　① 直角二等辺三角形　② 二等辺三角形
③ 正三角形　④ 直角三角形
⑤ ABC　⑥ AMB　⑦ HMC　⑧ MAB　⑨ MCA
Ⓐ AB　Ⓑ AC　Ⓒ AM　Ⓓ BC　Ⓔ BH　Ⓕ CH

直角三角形 HBC において $\angle HBC = 30^\circ$ なので，BC = 2$\boxed{\text{ア}}$である。一方，$\angle MAC = \angle$$\boxed{\text{イ}}$なので，$\triangle$MAC と$\triangle$$\boxed{\text{イ}}$は相似になる。したがって

$AC^2 = MC \cdot$$\boxed{\text{ウ}}$となる。M は辺 BC の中点なので，$AC = \sqrt{\boxed{\text{エ}}}\,CH$ が成り立つ。したがって$\triangle$HAC は$\boxed{\text{オ}}$であり，$\angle AMB =$$\boxed{\text{カキ}}$°となる。

AC と HM の交点を K，直線 BK と HC の交点を L とする。$\triangle$HBK と$\triangle$BCK の面積比は HL : LC であり，$\triangle$CHK と$\triangle$BCK の面積比は$\triangle$CHK : $\triangle$BCK = HA : $\boxed{\text{ク}}$である。また，M は辺 BC の中点だから，$\triangle$HBK と$\triangle$CHK の面積は等しい。ゆえに，HL : LC = HA : $\boxed{\text{ク}}$が成り立つ。

したがって，$\triangle$HAL と$\triangle$HBC の面積比は$\triangle$HAL : $\triangle$HBC = 1 : $\boxed{\text{ケ}}$となる。

第５問（選択問題）

解答解説のページへ

次のプログラムを考える。ただし，N には自然数を入力するものとする。また，INT(X)は X を超えない最大整数を与える関数である。

```
100  INPUT  ″N=″; N
110  IF  N>9  THEN  GOTO  230
120  FOR  A=1  TO  N
130    FOR  B=1  TO  N
140    IF  B=2*INT(B/2)  THEN  GOTO  210
150    IF  B=A  THEN  GOTO  210
160      FOR  C=1  TO  N
170        IF  C=A  THEN  GOTO  200
180        IF  C=B  THEN  GOTO  200
190        PRINT  100*A+10*B+C
200      NEXT  C
210    NEXT  B
220  NEXT  A
230  END
```

(1)　上のプログラムを実行し，N=?に 3 を入力すると，3 桁の数が $\boxed{\text{ア}}$ 個表示される。特に，2 番目に表示される 3 桁の数は $\boxed{\text{イウエ}}$ である。

(2)　上のプログラムを実行し，N=?に 5 を入力すると，150 行は $\boxed{\text{オカ}}$ 回実行され，$\boxed{\text{イウエ}}$ は $\boxed{\text{キ}}$ 番目に表示される。

(3)　上のプログラムの 160 行と 180 行を，それぞれ次のように書き直す。

```
160      FOR  C=B  TO  N
180        IF  C=B*INT(C/B)  THEN  GOTO  200
```

変更したプログラムを実行し，N=?に 7 を入力する。このとき，表示される 3 桁の数のうち，最大の数は $\boxed{\text{クケコ}}$ であり，300 以上 500 以下の数は $\boxed{\text{サ}}$ 個である。

第１問 [1]

問題のページへ

(1) G： $y=x^2-2(a+2)x+a^2-a+1$ ……(∗)に対して, y 切片 Y は,

$$Y=a^2-a+1=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

よって，$a=\dfrac{1}{2}$ のとき, Y は最小値 $\dfrac{3}{4}$ をとる。

このとき, (∗)は $y=x^2-5x+\dfrac{3}{4}$ より, x 軸との交点は,

$$x^2-5x+\frac{3}{4}=0,\quad x=\frac{5\pm\sqrt{22}}{2}$$

(2) (∗)より，$y=\{x-(a+2)\}^2-(a+2)^2+a^2-a+1=\{x-(a+2)\}^2-5a-3$

G が y 軸に関して対称になるのは，$a+2=0$，$a=-2$ より,

$$G_1: y=x^2+7$$

G が x 軸に接するのは，$-5a-3=0$，$a=-\dfrac{3}{5}$ より,

$$G_2: y=\left(x-\frac{7}{5}\right)^2$$

すると，G_1 の頂点 $(0,\ 7)$，G_2 の頂点 $\left(\dfrac{7}{5},\ 0\right)$ となり，G_1 を x 軸方向に $\dfrac{7}{5}$, y 軸方向に -7 だけ平行移動すると G_2 に重なる。

[解 説]

穏やかな問題からスタートです。計算量も例年よりは少なめです。

第１問 [2]

問題のページへ

(1) $C : y = x^2 - \dfrac{b-2}{a}$ が x 軸と共有点をもたないのは，$-\dfrac{b-2}{a} > 0$ のときであり，$a > 0$ から $b-2 < 0$，すなわち $b = 1$ のときである。

よって，この確率は，$\dfrac{6\times 1}{6^2} = \dfrac{1}{6}$ である。

共有点の個数が 1 個となるのは，$-\dfrac{b-2}{a} = 0$ すなわち $b = 2$ のときであり，この確率は，$\dfrac{6\times 1}{6^2} = \dfrac{1}{6}$ である。

C と x 軸との共有点の個数は 2 個以下なので，これが 2 個となる確率は，

$$1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3}$$

(2) C と x 軸との共有点の個数の期待値は，

$$0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$$

(3) C と x 軸との共有点は, $b \geqq 2$ において，$x = \pm\sqrt{\dfrac{b-2}{a}}$ ………(＊)

(＊)が整数となるのは，$b-2=0$ または $1 \leqq a \leqq b-2 \leqq 4$ に注意して，

$$(a,\ b-2) = (1,\ 0),\ (2,\ 0),\ (3,\ 0),\ (4,\ 0),\ (5,\ 0),\ (6,\ 0),$$
$$(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (1,\ 4),\ (4,\ 4)$$

これより，$(a,\ b)$ の組は 11 個存在し，この確率は $\dfrac{11}{6^2} = \dfrac{11}{36}$ である。

［解　説］

2 次関数との融合問題ですが，内容は平易です。(3)では，$x = 0$ を数え忘れないことが重要です。もっとも解答枠から気付きますが。

第２問［1］

問題のページへ

A を B で割った商 Q, 余り R は,
右の組立除法より,

$$Q=x^2+x+a^2$$
$$R=(a+b)x+a^3+b^3$$

	1	0	a^2-a-1	$-a^2+b$	b^3
a			a	a	a^3
1		1	1	a^2	
	1	1	a^2	$a+b$	a^3+b^3

(1)　$R=x+7$ のとき,

$a+b=1$ ………①,　$a^3+b^3=7$ ………②

①より $b=1-a$ となり, ②に代入して,　$a^3+(1-a)^3=7$

$a^2-a-2=0$,　$a=2,\ -1$

(2)　(i)　すべての実数 x に対して $Q>0$ となる条件は,

$D=1-4a^2<0$,　$(2a-1)(2a+1)>0$,　$a<-\dfrac{1}{2}$,　$\dfrac{1}{2}<a$

よって,　$a<-\dfrac{1}{2}$ は, すべての実数 x に対して $Q>0$ となるための, 十分条件であるが必要条件ではない。

(ii)　A が B で割り切れるための条件は,

$a+b=0$ ………③,　$a^3+b^3=0$ ………④

③より $b=-a$ となり, ④は $a^3+(-a)^3=0$ から, つねに成り立ち, ③かつ④は③と同値である。

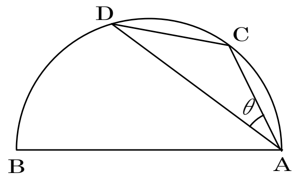
よって,　$a+b=0$ は, A が B で割り切れるための, 必要十分条件である。

［解 説］

除法についての等式をたて, Q と R を係数比較で求めても OK です。また, (2)で, 久々に 4 択問題が出ましたが, 引っ掛けるような内容ではありませんでした。

第２問［2］

問題のページへ



$\angle\mathrm{CAD}=\theta$ とおくと，$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=\dfrac{5}{4}$ から，

$$\cos^2\theta=\frac{4}{5},\ \cos\theta=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}\quad(0^\circ<\theta<90^\circ)$$

ここで，$\triangle\mathrm{ADC}$ に余弦定理を適用して，

$$\mathrm{CD}^2=(2\sqrt{5})^2+8^2-2\cdot2\sqrt{5}\cdot8\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}=20$$

よって，$\mathrm{CD}=2\sqrt{5}$

さて，$\sin\theta=\tan\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ より，$\triangle\mathrm{ADC}=\dfrac{1}{2}\cdot8\cdot2\sqrt{5}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{5}=8$

また，$\triangle\mathrm{ADC}$ の外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

$$\frac{2\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=2R,\ \mathrm{AB}=2R=10$$

［解 説］

記憶にないほど基本的な問題です。このようなときは，爆弾のような設問が最後に置かれている，というのが通例だったのですが。

第３問

問題のページへ

(1)　$a_1=S_1=-1^2+24=23$ であり, $n \geqq 2$ において,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(-n^2+24n)-\{-(n-1)^2+24(n-1)\}=-2n+25$$

この式は $n=1$ のときも成立する。これより，数列 $\{a_n\}$ は公差 -2 の等差数列であり，$a_2=21$ となる。

また，$a_n<0$ となるのは，$-2n+25<0$ より，$n \geqq 13$ である。

ここで，$a_{12}=1$，$a_{13}=-1$，$a_{40}=-55$ なので,

$$\sum_{k=1}^{40}|a_k|=\sum_{k=1}^{12}a_k+\sum_{k=13}^{40}(-a_k)=\frac{23+1}{2}\times 12-\frac{-1-55}{2}\times 28=928$$

(2)　(i)　$b_k=3^{k-1}$ より，$b_1=1$，$b_2=3$，$b_3=9$，$b_4=27$，$b_5=81$，…となる。

$b_k \leqq 10$ を満たす最大の b_k は b_3 より，$c_{10}=b_3=9$

$c_n=27=b_4$ となる n の値は $27 \leqq n \leqq 80$ より，全部で $80-27+1=54$ 個ある。

(ii)　$c_n=b_1=1$ となる n の値は $1 \leqq n \leqq 2$ より，$c_1=c_2=1$

$c_n=b_2=3$ となる n の値は $3 \leqq n \leqq 8$ より，$c_3=c_4=\cdots=c_8=3$

$c_n=b_3=9$ となる n の値は $9 \leqq n \leqq 26$ より，$c_9=c_{10}=\cdots=c_{26}=9$

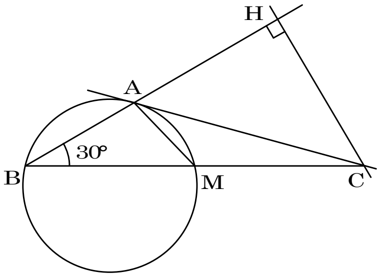
(i)と合わせて，$\displaystyle\sum_{k=1}^{30}c_k=1\times 2+3\times 6+9\times 18+27\times 4=290$

［解 説］

(2)は題意を把握するのに時間がかかります。このようなときは, n に 1, 2, 3, …と具体的な数値を代入し, 実験していくことが有効です。

第４問

問題のページへ



直角三角形 HBC について，$\angle HBC = 30°$ より，

$$BC = 2CH \cdots\cdots\cdots ①$$

一方，接弦定理より，$\angle MAC = \angle ABC$ となり，

$$\triangle MAC \backsim \triangle ABC$$

よって，$MC : AC = AC : BC$ から，

$$AC^2 = MC \cdot BC$$

ここで, M は BC の中点より，

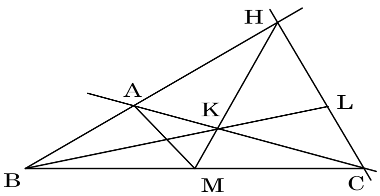
$$AC^2 = \frac{BC}{2} \cdot BC = \frac{1}{2} BC^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$AC^2 = \frac{1}{2} \cdot 4CH^2 = 2CH^2$，$AC = \sqrt{2}\,CH$

したがって，$\triangle HAC$ は直角二等辺三角形であり，

$$\angle AMB = \angle MAH - \angle ABM = (30° + 45°) - 30° = 45°$$

さて，点 K, L を題意のように定めると，



$$\triangle HBK : \triangle BCK = HL : LC \cdots\cdots\cdots ③$$

$$\triangle CHK : \triangle BCK = HA : AB \cdots\cdots\cdots ④$$

さらに M は BC の中点より，$\triangle HBK = \triangle CHK$ であるので，③④から，

$$HL : LC = HA : AB$$

よって, $AL \mathbin{/\!/} BC$ となり，$\triangle HAL \backsim \triangle HBC$

以上より，$\triangle HAL : \triangle HBC = HA^2 : HB^2 = HC^2 : (\sqrt{3}\,HC)^2 = 1 : 3$

［解 説］

来年，出題されても違和感のない問題で，なめらかに最後の設問まで流れていきます。方べきの定理やチェバの定理に誘導がついているのも，その現れでしょうか。

第５問

問題のページへ

(1) 9 以下の自然数 N に対して, A, B, C は, $1 \leqq A \leqq N$, $1 \leqq B \leqq N$, $1 \leqq C \leqq N$ を満たし, 140 行から B が奇数, 150 行から $A \neq B$, 170 行から $C \neq A$, 180 行から $C \neq B$ と条件づけられている。このとき, 百の位の数を A, 十の位の数を B, 一の位の数を C とする 3 桁の数を小さい順に表示するプログラムである。

ここで, $N = 3$ のとき, 奇数 B は $B = 1$ または $B = 3$ となり, $B = 1$ のとき表示される 3 桁の数は 213, 312 であり, $B = 3$ のとき 132, 231 である。

よって, 3 桁の数は 4 個表示され, 2 番目に表示されるのは 213 である。

(2) $N = 5$ のとき, 奇数 B は $B = 1,\ 3,\ 5$ となる。

ここで, 150 行は B が奇数のときに A と B が等しいかどうかを判断する行であるので, $3 \times 5 = 15$ 回実行される。

このとき, 小さい順に表示される 3 桁の数は,

132, 134, 135, 152, 153, 154, 213, ……

これから, 213 は 7 番目である。

(3) プログラムを書き直したとき, 160 行から $B \leqq C \leqq N$, 180 行から C は B の倍数ではないという条件が追加される。すなわち, 十の位の数は奇数, 一の位の数は十の位の数以上でその倍数ではなく, しかも各位の数はすべて異なる 3 桁の数を, 小さい順に表示するプログラムとなる。

すると, $N = 7$ のとき, 最大数は 756 である。また 300 以上 500 以下の数は, 356, 357, 435, 437, 456, 457 から 6 個表示される。

[解 説]

3 重のループがプログラムに入っています。数学ⅠA のコンピュータ問題は, 1997 年に初登場したのですが, ずいぶん難化しました。