第１問（必答問題）

解答解説のページへ

[1] 座標平面上の 3 点 $A(-1,\ 0)$，$B(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$C(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ について，θ が $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲を動くとき，$d = AC + BC$ の最大値と最小値を求めよう。

(1) $AC^2 = \boxed{ア} + 2\cos 2\theta = \boxed{イ}\cos^2\theta$，$BC^2 = \boxed{ウ} - 2\cos\theta = \boxed{エ}\sin^2\dfrac{\theta}{2}$

であるから，$d = \boxed{オ}\,|\cos\theta| + \boxed{カ}\sin\dfrac{\theta}{2}$ である。

(2) $t = \sin\dfrac{\theta}{2}$ とおく。$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ のとき，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{ク}}$ であり，

$d = -\boxed{ケ}t^2 + \boxed{コ}t + 2$ である。$90^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$\dfrac{\sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{ク}} \leqq t \leqq 1$

であり，$d = \boxed{ケ}t^2 + \boxed{コ}t - 2$ である。

したがって，d は $t = \dfrac{\sqrt{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}}$ のとき最小値 $\sqrt{\boxed{ス}}$ をとり，このときの θ の値は $\boxed{セソ}^\circ$ である。また，d は $t = \boxed{タ}$ のとき最大値 $\boxed{チ}$ をとり，このときの θ の値は $\boxed{ツテト}^\circ$ である。

[2] $x,\ y,\ z$ は正の数で $2^x = \left(\dfrac{5}{2}\right)^y = 3^z$ を満たしているとする。このとき，$a = 2x$，$b = \dfrac{5}{2}y$，$c = 3z$ とおき，a, b, c の大小関係を調べよう。

(1) $x = y\left(\log_2 \boxed{ナ} - \boxed{ニ}\right)$ であるから，

$$b - a = y\left(\frac{\boxed{ヌ}}{2} - 2\log_2 \boxed{ナ}\right)$$

である。したがって，a と b を比べると $\boxed{ネ}$ の方が大きい。

(2) $x = z\log_2 \boxed{ノ}$ であるから，$c - a = z\left(3 - 2\log_2 \boxed{ノ}\right)$ である。したがって，a と c を比べると $\boxed{ハ}$ の方が大きい。

(3) $3^5 < \left(\dfrac{5}{2}\right)^6$ であることを用いると，a, b, c の間には大小関係

$$\boxed{ヒ} < \boxed{フ} < \boxed{ヘ}$$

が成り立つことがわかる。

第２問（必答問題）

解答解説のページへ

a を定数とし，放物線 $y = x^2 + 2ax - a^3 - 2a^2$ を C，その頂点を P とする。

(1) 頂点 P の座標は，$\left(\boxed{アイ},\ -a^{\boxed{ウ}} - \boxed{エ}\,a^2 \right)$ である。したがって，どのような定数 a についても，頂点 P は $y = x^{\boxed{オ}} - \boxed{カ}\,x^2$ のグラフ上にある。

(2) a が $-3 \leqq a < 1$ の範囲を動くとする。頂点 P の y 座標の値が最大になるのは $a = \boxed{キ}$ と $a = \boxed{クケ}$ のときであり，最小となるのは $a = \boxed{コサ}$ のときである。

(3) a の値を(2)で求めた $\boxed{キ}$，$\boxed{クケ}$，$\boxed{コサ}$ とするときの放物線 C をそれぞれ C_1，C_2，C_3 とする。放物線 C_2，C_3 の方程式は，

$$C_2 : y = x^2 - \boxed{シ}\,x + \boxed{ス},\quad C_3 : y = x^2 - \boxed{セ}\,x$$

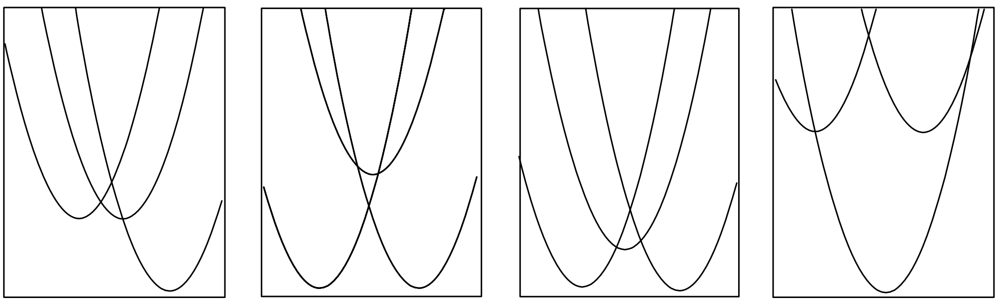
である。

このとき，C_1 と C_2 の交点の x 座標は $\dfrac{\boxed{ソ}}{2}$，C_1 と C_3 の交点の x 座標は $\boxed{タ}$，C_2 と C_3 の交点の x 座標は $\dfrac{\boxed{チ}}{2}$ である。

(4) C_1，C_2，C_3 を座標平面上に図示したとき，それらの位置関係を表す最も適当なものは，下の図⓪～③のうち $\boxed{ツ}$ である。ただし，座標軸や曲線名は省略してある。

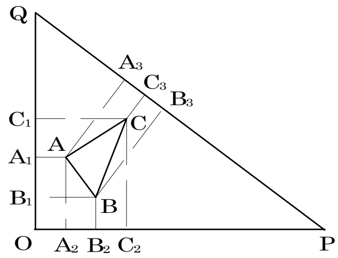
3 つの放物線 C_1，C_2，C_3 で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{テト}}{\boxed{ナ}}$ である。

⓪ ① ② ③



第３問（選択問題）

解答解説のページへ



座標平面上の 3 点O(0, 0)，P(4, 0)，Q(0, 3)を頂点とする三角形 OPQ の内部に三角形 ABC があるとする。A, B, C から直線 OQ に引いた垂線と OQ との交点をそれぞれA_1，B_1，C_1とする。A, B, C から直線 OP に引いた垂線と OP との交点をそれぞれA_2，B_2，C_2とする。A, B, C から直線 PQ に引いた垂線と PQ との交点をそれぞれA_3，B_3，C_3とする。

A_1が線分B_1C_1の中点であり，B_2が線分A_2C_2の中点であり，C_3が線分A_3B_3の中点であるとする。

$\overrightarrow{AB}=(x,\ y)$，$\overrightarrow{AC}=(z,\ w)$とおく。$A_1$が線分$B_1C_1$の中点であるから$w=\boxed{\text{ア}}\,y$である。$B_2$が線分$A_2C_2$の中点であるから$z=\boxed{\text{イ}}\,x$である。線分 AB の中点を D とすると，$C_3$が線分$A_3B_3$の中点であるから，$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{PQ}=\boxed{\text{ウ}}$である。また，$\overrightarrow{PQ}=\left(\boxed{\text{エオ}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$，$\overrightarrow{CD}=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\left(\overrightarrow{AB}-\boxed{\text{ケ}}\,\overrightarrow{AC}\right)$であるから，

$y=\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}x$である。したがって，

$$\overrightarrow{AB}=x\left(1,\ \dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}\right),\ \overrightarrow{AC}=x\left(\boxed{\text{イ}},\ \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\right)$$

である。ゆえに，$AC=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タチ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}AB$，$\cos\angle BAC=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{テト}}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$である。

第４問（選択問題）

解答解説のページへ

2つの複素数 p, q と3つの異なる複素数 α，β，γ は

$$\alpha+\beta+\gamma=0 \cdots\cdots ①,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=p \cdots\cdots ②,\quad \alpha\beta\gamma=q \cdots\cdots ③$$

を満たすとする。複素数 α，β，γ が複素数平面上で表す点をそれぞれ A, B, C とし，三角形 ABC は，AB = AC の直角二等辺三角形であるとする。

このとき，$\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm\boxed{\text{アイ}}^\circ$，$\left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=\boxed{\text{ウ}}$ である。ここで，複素数 z の偏角 $\arg z$ は $-180^\circ \leqq \arg z < 180^\circ$ を満たすとする。

以下，$\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\boxed{\text{アイ}}^\circ$ であるとする。このとき，①を用いると

$$\beta=\frac{\boxed{\text{エオ}}+\boxed{\text{カ}}\,i}{\boxed{\text{キ}}}\alpha,\quad \gamma=\frac{\boxed{\text{クケ}}-\boxed{\text{コ}}\,i}{\boxed{\text{サ}}}\alpha$$

である。

さらに，②，③から，$p=\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\alpha^{\boxed{\text{セ}}}$，$q=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\alpha^{\boxed{\text{チ}}}$ である。したがって，p と q は，$\boxed{\text{ツテ}}\,p^{\boxed{\text{ト}}}=\boxed{\text{ナニ}}\,q^{\boxed{\text{ヌ}}}$ を満たさなければならない。

さらに，複素数平面上に点 D があり，四角形 ABDC が正方形であるとき，D を表す複素数は $\boxed{\text{ネノ}}\,\alpha$ である。

第５問（選択問題）

解答解説のページへ

さいころを最大 5 回まで投げ，目の出方に応じてポイントを得る次のゲームを D さんが行う。D さんは最初 a ポイントをもっている。

さいころを投げて，5 または 6 の目が出る事象を A とする。事象 A が初めて起こった時点では 1 ポイントを得て引き続きゲームを続行し，2 度目に事象 A が起これば，2 ポイントが加算されて合計 3 ポイントを得て，その時点でゲームを終了する。なお，さいころを 5 回投げても，事象 A が一度しか起こらない場合には，1 度目に得た 1 ポイントのままで終了する。もし 5 回投げても，事象 A が一度も起こらない場合には，あらかじめ定めた m ポイントが減点されて終了する。ただし，a と m は自然数で，$a \geqq m$ とする。

このゲームが終了した時点での D さんのもつポイント数を確率変数 X とする。

(1) $X = a + 1$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{243}$ である。

(2) ちょうど 4 回目でゲームが終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ であり，終了する時点が 4 回目または 5 回目となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である。

(3) 3 回目までに一度も事象 A が起こらない確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である。

また，3 回目までに一度も事象 A が起こらないとき，$X > a$ となる条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

(4) 確率変数 X の平均(期待値)は，$E(X) = a + \dfrac{\boxed{\text{ソタチ}} - \boxed{\text{ツテ}}\, m}{243}$ で，$E(X) > a$ となるような最大の自然数 m は $\boxed{\text{トナ}}$ である。

第６問（選択問題）

解答解説のページへ

ある銀行では毎期末に預金残高に対し 5%の利率で利息がつく。この銀行に，たとえば a 万円を一定期間預金すると，期末には$1.05\times a$ 万円の預金残高になることになる。

第 1 期の初めに，A さんはこの銀行に b 万円の預金を持っている。A さんは，まず b 万円から第 1 期分 m 万円を引き出す。残りの預金に対し第 1 期末に 5%の利息がつく。ここで，$b>m$ とする。第 2 期目からも毎期初めにこの預金から m 万円ずつを引き出す予定である。ただし，預金残高が m 万円に満たないときには，その全額を引き出すものとする。

以下の問題中，INT(X)は X を超えない最大の整数を表す関数である。

(1)　預金残高が 0 円になるのに何期間を要するかを調べるため，次の〔プログラム 1〕を作った。このプログラムでは，自然数 b と m を与えるとき，第 n 期初めに預金を引き出した直後に預金残高が 0 円になれば，そのときの自然数 n を出力する。

〔プログラム 1〕

```
100  INPUT  ″B=″; B
110  INPUT  ″M=″; M
120  N=0
130  N=N+1
140  B=1.05*(B-N)
150  IF  B>0  THEN  GOTO  [アイウ]
160  PRINT  N
170  END
```

このプログラムの空欄 $\boxed{\text{アイウ}}$ をうめて，プログラムを完成せよ。

(2)　このプログラムの 160 行を変更して，最終期の引き出し金額の 1 万円未満を切り捨てたものも出力するようにするには，160 行を $\boxed{\text{エ}}$ と変更すればよい。ただし，この金額の単位は万円とする。また，$\boxed{\text{エ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～⑤から 1 つ選べ。

⓪　PRINT　N, INT(B)

①　PRINT　N, INT(B+M)

②　PRINT　N, INT(B-M)

③　PRINT　N, INT(1.05*B)

④　PRINT　N, INT(B/1.05+M)

⑤　PRINT　N, INT(B/1.05-M)

(3)　第 1 期初めの預金額を 2150 万円，引き出し額を 100 万円とすると，第 1 期末の預金残高は，約 2152 万円となり，第 1 期初めの 2150 万円より増える。

一般に，毎期の初めに m 万円引き出すものとし，第 n 期末の預金残高を c_n 万円

とする。このとき，$c_{n+1}=1.05(c_n-m)$ であるので，

$$c_{n+1}-c_n=1.05(c_n-c_{n-1}),\quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

が成り立つ。ただし，$c_0=2150$ とする。

よって，$c_1-c_0 \geqq 0$ ならば，預金残高は減少しないことがわかる。ここで，c_1 は m と c_0 によって決まり，$c_1-c_0 \geqq 0$ を満たす最大の自然数 m は $\boxed{\text{オカキ}}$ である。

(4) 次に，A さんの預金残高が n 期間にわたり 0 円にならないために必要な第 1 期初めの預金額 b 万円を計算するため，次の〔プログラム 2〕を作った。このプログラムでは，自然数 n と m を与えるとき，預金残高が n 期間にわたり 0 円にならないために必要な第 1 期初めの預金額 b 万円を計算する。ただし，$n \geqq 2$ とする。

〔プログラム 2〕

```
100  INPUT  ″N=″; N
110  INPUT  ″M=″; M
120  I=N
130  B=M
140  B=B/1.05+M
150  I=I-1
160  IF  I>1  THEN  GOTO  [クケコ]
170  PRINT  [ サ ]
180  END
```

このプログラム空欄 $\boxed{\text{クケコ}}$ と $\boxed{\text{サ}}$ をうめて，このプログラムを完成せよ。ただし，$\boxed{\text{サ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～④から 1 つ選べ。

⓪ INT(B)　　① INT(B/1.05)　　② INT(B/1.05+1)

③ INT(B+1)　　④ INT((B+1)/1.05)

このプログラムを実行して N=? に対し 3，M=? に対し 90 を入力したとき，170 行において $\boxed{\text{シスセ}}$ と出力される。このとき，140 行は $\boxed{\text{ソ}}$ 回実行される。

第１問[1]

問題のページへ

(1) まず，$\mathrm{AC}^2=(\cos 2\theta+1)^2+\sin^2 2\theta=2+2\cos 2\theta=2\cdot 2\cos^2\theta=4\cos^2\theta$

$$\mathrm{BC}^2=(\cos 2\theta-\cos\theta)^2+(\sin 2\theta-\sin\theta)^2$$
$$=2-2(\cos 2\theta\cos\theta+\sin 2\theta\sin\theta)=2-2\cos\theta=2\cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2}=4\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$0°\leqq\theta\leqq 180°$ より，$0°\leqq\dfrac{\theta}{2}\leqq 90°$ なので，

$$d=\mathrm{AC}+\mathrm{BC}=\sqrt{4\cos^2\theta}+\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}=2|\cos\theta|+2\sin\frac{\theta}{2}$$

(2) $0°\leqq\theta\leqq 90°$ のとき $0°\leqq\dfrac{\theta}{2}\leqq 45°$ より，$t=\sin\dfrac{\theta}{2}$ とおくと，$0\leqq t\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

このとき $\cos\theta\geqq 0$ から，

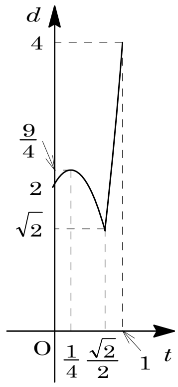
$$d=2\cos\theta+2\sin\frac{\theta}{2}=2\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+2\sin\frac{\theta}{2}=-4t^2+2t+2\cdots\cdots\cdots①$$

また，$90°\leqq\theta\leqq 180°$ のとき $45°\leqq\dfrac{\theta}{2}\leqq 90°$ より，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqq t\leqq 1$

このとき $\cos\theta\leqq 0$ から，

$$d=-2\cos\theta+2\sin\frac{\theta}{2}=-2\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+2\sin\frac{\theta}{2}$$
$$=4t^2+2t-2\cdots\cdots\cdots②$$

①より $d=-4\left(t-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{9}{4}$，②より $d=4\left(t+\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{9}{4}$ となるので，まとめると，右図のようになる。



したがって，d は $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $(\theta=90°)$ のとき最小値 $\sqrt{2}$ をとり，また $t=1$ $(\theta=180°)$ のとき最大値 4 をとる。

［解 説］

難問というわけではないのですが，問題量が多く，解くのに時間がかかります。

第１問[2]

問題のページへ

(1) $2^x=\left(\frac{5}{2}\right)^y$ より，$x=\log_2\left(\frac{5}{2}\right)^y=y(\log_2 5-\log_2 2)=y(\log_2 5-1)$

$b-a=\frac{5}{2}y-2y(\log_2 5-1)=y\left(\frac{9}{2}-2\log_2 5\right)$

ここで，$\frac{9}{2}-2\log_2 5=\frac{1}{2}(\log_2 2^9-\log_2 5^4)<0$ から，$b-a<0$，$b<a$

(2) $2^x=3^z$ より，$x=\log_2 3^z=z\log_2 3$ となり，

$c-a=3z-2z\log_2 3=z(3-2\log_2 3)$

ここで，$3-2\log_2 3=\log_2 2^3-\log_2 3^2<0$ から，$c-a<0$，$c<a$

(3) $\left(\frac{5}{2}\right)^y=3^z$ より，$z=\log_3\left(\frac{5}{2}\right)^y=y\log_3\frac{5}{2}$ となり，

$c-b=3y\log_3\frac{5}{2}-\frac{5}{2}y=\frac{y}{2}\left(6\log_3\frac{5}{2}-5\right)=\frac{y}{2}\left\{\log_3\left(\frac{5}{2}\right)^6-\log_3 3^5\right\}$

ここで，$3^5<\left(\frac{5}{2}\right)^6$ から，$c-b>0$，$c>b$ となり, (1)(2)より，$b<c<a$ である。

［解 説］

同じ作業を３回くり返すだけですが, 前問と同じく計算量は多めです。

第２問

問題のページへ

(1) $y=x^2+2ax-a^3-2a^2=(x+a)^2-a^3-3a^2$ より，頂点 $\mathrm{P}(-a,\ -a^3-3a^2)$ となる。そこで，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，

$x=-a$ ………①，$y=-a^3-3a^2$ ………②

①から $a=-x$，②に代入すると，P の軌跡は，

$y=-(-x)^3-3(-x)^2=x^3-3x^2$

(2) ②より，$y'=-3a^2-6a=-3a(a+2)$

$-3\leqq a<1$ において，右表より，y は $a=0$ と $a=-3$ のとき最大になり，$a=-2$ のとき最小になる。

a	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	↘	-4	↗	0	↘	-4

(3) $a=0$ のとき，$C_1: y=x^2$ ………③

$a=-3$ のとき，$C_2: y=(x-3)^2=x^2-6x+9$ ………④

$a=-2$ のとき，$C_3: y=(x-2)^2-4=x^2-4x$ ………⑤

このとき，C_1 と C_2 の交点は，③④から，

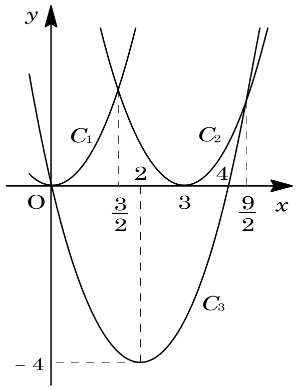
$x^2=x^2-6x+9$，$x=\dfrac{3}{2}$

また，C_1 と C_3 の交点は，③⑤から，

$x^2=x^2-4x$，$x=0$

さらに，C_2 と C_3 の交点は，④⑤から，

$x^2-6x+9=x^2-4x$，$x=\dfrac{9}{2}$



(4) (3)から，C_1，C_2，C_3 の位置関係を図示すると，右図のようになる。

これらで囲まれた図形の面積を S とすると，

$$S=\int_0^{\frac{3}{2}}\{x^2-(x^2-4x)\}dx+\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}}\{(x^2-6x+9)-(x^2-4x)\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{3}{2}}4x\,dx+\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}}(-2x+9)\,dx$$

すると，S は 3 点 $(0,\ 0)$，$\left(\dfrac{3}{2},\ 6\right)$，$\left(\dfrac{9}{2},\ 0\right)$ を頂点とする三角形の面積に一致し，

$$S=\frac{1}{2}\times\frac{9}{2}\times 6=\frac{27}{2}$$

［解 説］

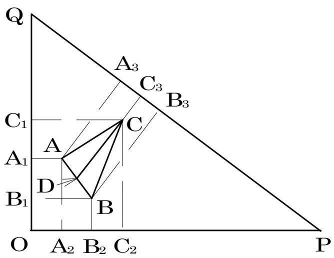
第 1 問と異なり，複雑な計算もなく，量的にも少なめです。なお，最後の積分計算は，上端と下端の値が整数でないので，三角形の面積を対応させました。

第３問

問題のページへ

$\overrightarrow{AB}=(x,\ y)$，$\overrightarrow{AC}=(z,\ w)$ において，A_1 が線分 B_1C_1 の中点なので，

$$w+y=0,\ w=-y\ \cdots\cdots\cdots①$$



$\overrightarrow{BA}=(-x,\ -y)$，$\overrightarrow{BC}=(z-x,\ w-y)$ において，B_2 が線分 A_2C_2 の中点なので，

$$-x+(z-x)=0,\ z=2x\ \cdots\cdots\cdots②$$

AB の中点を D とすると，D，C，C_3 は一直線上にあるので，$\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{PQ}$ となり，

$$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{PQ}=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(-4,\ 3)$，$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC})\ \cdots\cdots\cdots④$

①②より，$\overrightarrow{AC}=(2x,\ -y)$ であるので，④から，

$$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\{(x,\ y)-2(2x,\ -y)\}=\frac{3}{2}(-x,\ y)$$

よって，③より，$-4(-x)+3y=0$ から，$y=-\frac{4}{3}x$ となり，

$$\overrightarrow{AB}=x\left(1,\ -\frac{4}{3}\right),\ \overrightarrow{AC}=x\left(2,\ \frac{4}{3}\right)$$

すると，$|\overrightarrow{AB}|=x\sqrt{1+\frac{16}{9}}=\frac{5}{3}x$，$|\overrightarrow{AC}|=x\sqrt{4+\frac{16}{9}}=\frac{2\sqrt{13}}{3}x$ より，

$$AC=\frac{2\sqrt{13}}{3}\cdot\frac{3}{5}AB=\frac{2\sqrt{13}}{5}AB$$

さらに，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=x^2\left(2-\frac{16}{9}\right)=\frac{2}{9}x^2$ から，

$$\cos\angle BAC=\frac{\frac{2}{9}x^2}{\frac{5}{3}x\cdot\frac{2\sqrt{13}}{3}x}=\frac{1}{5\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{13}}{65}$$

［解 説］

スタートがうまくできれば，流れに乗ることができます。得点差のつく問題です。

第４問

問題のページへ

条件より，$\alpha+\beta+\gamma=0$ ……①，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=p$ ……②，$\alpha\beta\gamma=q$ ……③

まず，$\triangle\mathrm{ABC}$ は $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ の直角二等辺三角形なので，$\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$ であり，

$$\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm 90^\circ,\ \left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=\frac{|\gamma-\alpha|}{|\beta-\alpha|}=1$$

ここで，$\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=90^\circ$ のとき，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ=i$ より，

$$\gamma-\alpha=i(\beta-\alpha),\ \gamma=(1-i)\alpha+i\beta \cdots\cdots\cdots ④$$

①に代入して，$\alpha+\beta+(1-i)\alpha+i\beta=0$，$(1+i)\beta=(-2+i)\alpha$

$$\beta=\frac{-2+i}{1+i}\alpha=\frac{-1+3i}{2}\alpha$$

④に代入して，$\gamma=(1-i)\alpha+i\cdot\dfrac{-1+3i}{2}\alpha=\dfrac{-1-3i}{2}\alpha$

次に，①②より，$p=\alpha(\beta+\gamma)+\beta\gamma=-\alpha^2+\dfrac{-1+3i}{2}\cdot\dfrac{-1-3i}{2}\alpha^2=\dfrac{3}{2}\alpha^2 \cdots\cdots\cdots ⑤$

③より，$q=\alpha\beta\gamma=\alpha\cdot\dfrac{-1+3i}{2}\cdot\dfrac{-1-3i}{2}\alpha^2=\dfrac{5}{2}\alpha^3 \cdots\cdots\cdots ⑥$

⑤より $\alpha^2=\dfrac{2}{3}p$，⑥より $\alpha^3=\dfrac{2}{5}q$ なので，

$$\left(\frac{2}{3}p\right)^3=\left(\frac{2}{5}q\right)^3,\ \frac{8}{27}p^3=\frac{4}{25}q^2,\ 50p^3=27q^2$$

さらに，四角形 ABDC が正方形であるとき，D を表す複素数を δ とおくと，

$$\frac{\alpha+\delta}{2}=\frac{\beta+\gamma}{2}$$

①より，$\delta=(\beta+\gamma)-\alpha=-\alpha-\alpha=-2\alpha$

［解 説］

複素数平面の標準的な問題です。なお，最後の設問は，文脈と無関係に解くことができます。

第５問

問題のページへ

(1) まず，事象 A の起こる確率は $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ である。

さて，$X=a+1$ となるのは，5 回投げて事象 A が 1 回だけ起こる場合より，その確率は，${}_5\mathrm{C}_1\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{243}$ である。

(2) 4 回目でゲームが終了するのは，3 回目までに事象 A が 1 回だけ起こり，さらに 4 回目に 2 度目の A が起こる場合であり，その確率は,

$$ {}_3\mathrm{C}_1\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27} $$

また，5 回目でゲームが終了するのは，事象 A が一度も起こらない場合，A が一度だけ起こる場合, 5 回目に 2 度目の A が起こる場合のいずれかであり,

$$ \left(\frac{2}{3}\right)^5+{}_5\mathrm{C}_1\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_1\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{1}{3}=\frac{16}{27} $$

よって, 4 回目または 5 回目でゲームが終了する確率は，$\frac{4}{27}+\frac{16}{27}=\frac{20}{27}$ である。

(3) 3 回目までに一度も事象 A が起こらない確率は，$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$ である。

また，3 回目までに一度も事象 A が起こらず，しかも $X>a$ となるのは，A が 4 回目または 5 回目で起こる場合より，その確率は,

$$ \left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{3}\times1+1\times\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{27}\times\frac{5}{9} $$

よって，3 回目までに一度も事象 A が起こらないとき，$X>a$ となる条件付き確率は，$\left(\frac{8}{27}\times\frac{5}{9}\right)\div\frac{8}{27}=\frac{5}{9}$ である。

(4) まず, X の値は $X=a-m$，$a+1$，$a+3$ のいずれかである。

$X=a-m$ となる確率は $\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$，$X=a+1$ となる確率は，(1)より $\frac{80}{243}$，$X=a+3$ となる確率は，$1-\left(\frac{32}{243}+\frac{80}{243}\right)=\frac{131}{243}$ である。すると X の平均 $E(X)$ は,

$$ E(X)=(a-m)\times\frac{32}{243}+(a+1)\times\frac{80}{243}+(a+3)\times\frac{131}{243}=a+\frac{473-32m}{243} $$

$E(X)>a$ となるのは，$473-32m>0$，$m<14+\frac{25}{32}$

よって，自然数 m の最大値は 14 である。

［解 説］

条件付き確率を求める設問以外は，数学Ⅰの内容です。ただ，問題文が長く，頭を整理するのに時間がかかります。

第６問

問題のページへ

(1) 140 行が実行されたとき, B は第 N 期末の預金残高を表し, もし $B>0$ であれば, 次の期間に進むことができるので, 150 行は,

```
150  IF  B>0  THEN  GOTO  130
```

(2) 第 N 期末に $B\leqq 0$ になるとき, 160 行が実行されるので, 最終期の初めに引き出すことのできる金額は, $\dfrac{B}{1.05}+M$ 万円となる。1 万円未満は切り捨てることより, 160 行は,

```
160  PRINT  N,INT(B/1.05+M)
```

(3) $c_1=1.05(c_0-m)=1.05(2150-m)$ となり, $c_1-c_0\geqq 0$ とすると,

$$1.05(2150-m)\geqq 2150\,,\ \ m\leqq\frac{5\times 2150}{105}=102+\frac{8}{21}$$

よって, 自然数 m の最大値は 102 である。

(4) 120 行, 130 行において, 第 n 期初めの預金残高が m 万円という条件を設定している。次に, 140 行では, 1 期前の期間の初めにおける預金残高を計算しているので, 160 行は,

```
160  IF  I>1  THEN  GOTO  140
```

170 行は $I=1$ となったときに実行される。このとき, B は第 1 期初めに必要な預金額を表している。すると, この B より大きい最小の整数を b としたとき, b 万円を第 1 期初めに預金しておけば, 預金残高が n 期間にわたり 0 円にならない。これから 170 行は,

```
170  PRINT  INT(B+1)
```

また, $n=3$, $m=90$ のとき, この条件のもとで, 140 行を 1 回実行すると, 第 2 期初めの預金残高が得られ,

$$B=\frac{90}{1.05}+90\fallingdotseq 175.7$$

さらに, 140 行をもう 1 回実行したとき, 第 1 期初めに必要な預金額が得られ,

$$B=\frac{175.7}{1.05}+90\fallingdotseq 257.3$$

このとき, $B+1\fallingdotseq 258.3$ となり, 小数部分を切り捨て, $[B+1]=258$ である。

よって, 170 行では 258 と出力され, 140 行は 2 回実行される。

［解 説］

問題文を読み, 内容を理解するのに 10 分以上かかってしまいました。また, 最後の小数計算も, 電卓なしでは乗り気になれません。