

第 1 問

解答解説のページへ

[1] 2 次方程式 $x^2 - 3x - 1 = 0$ の解が α, β で、 $\alpha > \beta$ とするとき、

$$\alpha = \frac{\boxed{\text{ア}} + \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{2}, \quad \beta = \frac{\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{2}$$

である。また、 $m < \alpha < m + 1$ を満たす整数 m の値は $m = \boxed{\text{エ}}$ 、 $n < \beta < n + 1$ を満たす整数 n の値は $n = \boxed{\text{オカ}}$ である。

次に、 $\alpha + \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\boxed{\text{キク}}}$ であり、 $\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} = \boxed{\text{ケコ}} \sqrt{\boxed{\text{サシ}}}$ である。

[2] a は実数とし、 b は 0 でない実数とする。 a と b に関する条件 p, q, r を次のように定める。

p : a, b はともに有理数である q : $a + b, ab$ はともに有理数である

r : $\frac{a}{b}$ は有理数である

(1) 次の $\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものを、下の ①～③のうちから 1 つ選べ。

条件 p の否定 \bar{p} は $\boxed{\text{ス}}$ である。

- ① 「 a, b はともに有理数である」 ④ 「 a, b はともに無理数である」
 ② 「 a, b の少なくとも一方は有理数である」
 ③ 「 a, b の少なくとも一方は無理数である」

(2) 次の $\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものを、下の ①～③のうちから 1 つ選べ。

条件「 q かつ r 」は条件 p が成り立つための $\boxed{\text{セ}}$ 。

- ① 必要十分条件である
 ② 必要条件であるが十分条件ではない
 ③ 十分条件であるが必要条件ではない
 ④ 必要条件でも十分条件でもない

(3) 次の ①～⑤のうち、正しいものは $\boxed{\text{ソ}}$ である。

- ① 「 $p \Rightarrow q$ 」は真、「 $p \Rightarrow q$ 」の逆は真、「 $p \Rightarrow q$ 」の対偶は真である。
 ② 「 $p \Rightarrow q$ 」は真、「 $p \Rightarrow q$ 」の逆は偽、「 $p \Rightarrow q$ 」の対偶は真である。
 ③ 「 $p \Rightarrow q$ 」は真、「 $p \Rightarrow q$ 」の逆は偽、「 $p \Rightarrow q$ 」の対偶は偽である。
 ④ 「 $p \Rightarrow q$ 」は偽、「 $p \Rightarrow q$ 」の逆は真、「 $p \Rightarrow q$ 」の対偶は真である。
 ⑤ 「 $p \Rightarrow q$ 」は偽、「 $p \Rightarrow q$ 」の逆は真、「 $p \Rightarrow q$ 」の対偶は偽である。

- ⑥ 「 $p \Rightarrow q$ 」は偽, 「 $p \Rightarrow q$ 」の逆は偽, 「 $p \Rightarrow q$ 」の対偶は真である。
- ⑦ 「 $p \Rightarrow q$ 」は偽, 「 $p \Rightarrow q$ 」の逆は偽, 「 $p \Rightarrow q$ 」の対偶は偽である。

第 2 問

解答解説のページへ

2 次関数 $y = 6x^2 + 11x - 10$ ……①について考える。

①において、 $y \leq 0$ となる x の値の範囲は、 $\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}} \leq x \leq \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

①のグラフを x 軸方向に a 、 y 軸方向に b だけ平行移動して得られるグラフを G とする。 G が原点 $(0, 0)$ を通るとき、

$$b = \boxed{\text{カキ}} a^2 + \boxed{\text{クケ}} a + \boxed{\text{コサ}}$$

であり、このとき G を表す 2 次関数は、

$$y = \boxed{\text{シ}} x^2 - (\boxed{\text{スセ}} a - \boxed{\text{ソタ}}) x \dots\dots\dots②$$

である。

$x = -2$ と $x = 3$ に対応する 2 次関数②の値が等しくなるのは、 $a = \frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$ のとき

である。このとき、2 次関数②の $-2 \leq x \leq 3$ における最小値は $\frac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ 、最大値は

$\boxed{\text{ネノ}}$ である。

解答解説のページへ

第3問

右の図のような直方体 $ABCD-EFGH$ において、
 $AE = \sqrt{10}$ 、 $AF = 8$ 、 $AH = 10$ とする。

このとき、 $FH =$ であり、

$\cos \angle FAH = \frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$ である。また、三角形 AFH

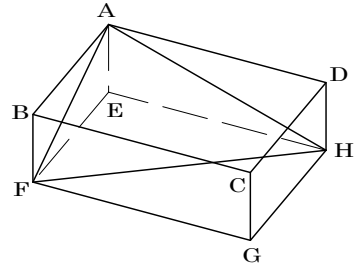
の面積は $\sqrt{\text{キ}}$ である。

次に、 $\angle AFH$ の二等分線と辺 AH の交点を P 、
 $\angle FAH$ の二等分線と辺 FH の交点を Q 、線分 FP と線分 AQ の交点を R とする。この
 とき、 R は三角形 AFH の である。次の①～③のうちから に当てはまる
 ものを1つ選べ。

- ① 重心 ② 外心 ③ 内心

また、 $AP =$ であり、したがって、 $PF : PR =$: 1 となる。さらに、四

面体 $EAPR$ の体積は $\sqrt{\text{シ}}$ である。



第 4 問

解答解説のページへ

袋 A, B, C, D があり、それぞれに 4 枚のカードが入っている。各袋のカードには、1 から 4 までの番号がつけられている。袋 A, B, C, D からカードを 1 枚ずつ取り出し、出た数をそれぞれ a, b, c, d とする。

(1) a, b, c, d の最大の数が 3 以下である場合は 通りあり、最大の数が 4 である場合は 通りある。

(2) a, b, c, d について、 $a < b < c$ となる場合は 通りある。

(3) 出た数 a, b, c, d によって、次のように得点を定める。

$a \leq b \leq c \leq d$ のときは $(d - a + 1)$ 点、それ以外のときは 0 点

(i) 得点が 1 点となる確率は $\frac{\text{ク}}{\text{ケコ}}$ であり、得点が 4 点となる確率は $\frac{\text{サ}}{\text{シスセ}}$

である。

(ii) 得点の期待値は $\frac{\text{ソタ}}{\text{チツテ}}$ 点である。

第 1 問

問題のページへ

[1] $x^2 - 3x - 1 = 0$ より, $x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$ となり, この解を α, β ($\alpha > \beta$) とおくと,

$$\alpha = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \quad \beta = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

ここで, $3 < \sqrt{13} < 4$ から, $3 < \alpha < \frac{7}{2}$, $-\frac{1}{2} < \beta < 0$ となり, α, β の整数部分 m, n は,

$$m = 3, \quad n = -1$$

また, $\alpha + \frac{1}{\alpha} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} + \frac{2}{3 + \sqrt{13}} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} + \frac{\sqrt{13} - 3}{2} = \sqrt{13}$ から,

$$\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 - 3\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = 13\sqrt{13} - 3\sqrt{13} = 10\sqrt{13}$$

[2] (1) 条件「 a, b はともに有理数」の否定は, 「 a, b の少なくとも一方は有理数でない」, すなわち「 a, b の少なくとも一方は無理数」である。

(2) $a = \sqrt{2}$, $b = -\sqrt{2}$ とすると, $a + b$, ab , $\frac{a}{b}$ は有理数であるが, a, b は有理数でない。逆に, a, b がともに有理数のとき, $a + b$, ab , $\frac{a}{b}$ は有理数である。

よって, 条件「 q かつ r 」は, 条件 p が成り立つための必要条件であるが十分条件ではない。

(3) (2) より, 「 $p \Rightarrow q$ 」は真, 「 $p \Rightarrow q$ 」の逆「 $q \Rightarrow p$ 」は偽となる。また, 「 $p \Rightarrow q$ 」が真より, 「 $p \Rightarrow q$ 」の対偶「 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ 」は真となる。

[解説]

新課程となり, 問題の構成に変化が見られました。この第 1 問は, 数学 I 「方程式と不等式」と数学 A 「命題と論理」の小問 2 題の組合せとなっています。[2] はセンター試験としては目新しいものです。

第 2 問

問題のページへ

2 次関数 $y = 6x^2 + 11x - 10$ ……①に対して、 $y \leq 0$ とすると、 $6x^2 + 11x - 10 \leq 0$

$$(2x + 5)(3x - 2) \leq 0, \quad -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}$$

①のグラフを x 軸方向に a , y 軸方向に b だけ平行移動すると、

$$y - b = 6(x - a)^2 + 11(x - a) - 10$$

$$y = 6x^2 - (12a - 11)x + (6a^2 - 11a - 10 + b)$$

原点 $(0, 0)$ を通るので、 $6a^2 - 11a - 10 + b = 0$, $b = -6a^2 + 11a + 10$ となり、

$$y = 6x^2 - (12a - 11)x \dots\dots\dots②$$

$$②を变形して, \quad y = 6\left(x - \frac{12a - 11}{12}\right)^2 - \frac{(12a - 11)^2}{24}$$

さて、 $x = -2$ と $x = 3$ に対応する値が等しくなることより、②のグラフの軸の方程式は $x = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$ であるので、

$$\frac{12a - 11}{12} = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{17}{12}$$

このとき、 $-2 \leq x \leq 3$ において、2 次関数②は $x = \frac{1}{2}$ で最小、 $x = -2$ または $x = 3$ で最大となる。

よって、最小値は $-\frac{(17-11)^2}{24} = -\frac{3}{2}$ 、最大値は $6 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) = 36$ である。

[解説]

やや易しめの定番の 2 次関数です。後半はグラフの軸に注目しましたが、普通に $x = -2$ と $x = 3$ の値が等しいとして計算しても、量的にはほとんど変わりません。

第 3 問

問題のページへ

三平方の定理より, $FE = \sqrt{8^2 - 10} = \sqrt{54}$, $EH = \sqrt{10^2 - 10} = \sqrt{90}$ となり,

$$FH = \sqrt{54 + 90} = 12$$

また, 余弦定理から, $\cos \angle FAH = \frac{8^2 + 10^2 - 12^2}{2 \cdot 8 \cdot 10} = \frac{1}{8}$ なので,

$$\triangle AFH = \frac{1}{2} AF \cdot AH \sin \angle FAH = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = 15\sqrt{7}$$

さて, $\angle AFH$ の二等分線と $\angle FAH$ の二等分線の交点が R なので, R は三角形 AFH の内心である。

FP は $\angle AFH$ を二等分するので, 内角の二等分線の定理より, $AP : PH = FA : FH = 8 : 12 = 2 : 3$ となり,

$$AP = \frac{2}{2+3} \times 10 = 4$$

また, AR は $\angle FAP$ を二等分するので, 同様にすると, $FR : RP = AF : AP = 8 : 4 = 2 : 1$ となり,

$$PF : PR = 3 : 1$$

これより, 三角形 ARP の面積は,

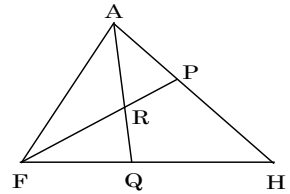
$$\triangle ARP = \frac{PR}{PF} \triangle AFP = \frac{PR}{PF} \times \frac{AP}{AH} \triangle AFH = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \triangle AFH = \frac{2}{15} \triangle AFH$$

一方, 四面体 EAFH の体積 V_0 は,

$$V_0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} FE \cdot EH \cdot AE = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{54} \cdot \sqrt{90} \cdot \sqrt{10} = 15\sqrt{6}$$

よって, 四面体 EAPR の体積 V は,

$$V = \frac{\triangle ARP}{\triangle AFH} V_0 = \frac{2}{15} \times 15\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$



[解説]

数学 A の「平面図形」の出題形式については, いろいろな憶測が流れましたが, 初年度は数学 I の「図形と計量」との融合という形になりました。なお, 最後の設問は, 旧課程でもよくあったように, 解くのに時間がかかります。

第 4 問

問題のページへ

(1) a, b, c, d の最大の数が 3 以下である場合は, $3^4 = 81$ 通りある。

最大の数が 4 である場合は, すべての場合から, 最大の数が 3 以下である場合を除いたものであり, $4^4 - 81 = 175$ 通りある。

(2) $a < b < c$ となる場合は, 1 から 4 までの数から異なる 3 つを取り出し, 小さい方から a, b, c と対応させ, d は任意と考えて, ${}_4C_3 \times 4 = 16$ 通りある。

(3) (i) 得点が 1 点となるのは, $d - a + 1 = 1$ すなわち $d = a$ から, $a = b = c = d$ の場合だけであり, その確率は, $\frac{4}{4^4} = \frac{4}{256} = \frac{1}{64}$ となる。

得点が 4 点となるのは, $d - a + 1 = 4$ すなわち $d = a + 3$ から, $a = 1$ かつ $d = 4$ となり, $1 \leq b \leq c \leq 4$ である。すると, (b, c) の組は $1 \leq b < c \leq 4$ のとき ${}_4C_2 = 6$ 通り, $1 \leq b = c \leq 4$ のとき ${}_4C_1 = 4$ 通りで, 合わせて 10 通りとなる。よって, この確率は, $\frac{10}{4^4} = \frac{10}{256} = \frac{5}{128}$ である。

(ii) 得点が 3 点となるのは, $d - a + 1 = 3$ すなわち $d = a + 2$ から, $1 \leq b \leq c \leq 3$ または $2 \leq b \leq c \leq 4$ である。すると, $1 \leq b \leq c \leq 3$ のとき ${}_3C_2 + {}_3C_1 = 6$ 通り, $2 \leq b \leq c \leq 4$ のとき ${}_3C_2 + {}_3C_1 = 6$ 通りで, その確率は, $\frac{6+6}{4^4} = \frac{12}{256}$ となる。

得点が 2 点となるのは, $d - a + 1 = 2$ すなわち $d = a + 1$ から, $1 \leq b \leq c \leq 2$ または $2 \leq b \leq c \leq 3$ または $3 \leq b \leq c \leq 4$ である。同様に考えると, いずれの場合も ${}_2C_2 + {}_2C_1 = 3$ 通りずつなので, その確率は, $\frac{3+3+3}{4^4} = \frac{9}{256}$ となる。

以上より, 得点の期待値は,

$$1 \times \frac{4}{256} + 2 \times \frac{9}{256} + 3 \times \frac{12}{256} + 4 \times \frac{10}{256} = \frac{49}{128}$$

[解 説]

場合の数の比重の大きい確率分野の問題です。(3)では組合せを利用して数えましたが, 適する場合をすべて書き並べた方が実戦的かもしれません。もっとも, 重複組合せでもできますが。なお, 10 年も前のこととなりますが, 1997 年からセンター試験が大幅に形式変更するため, その前年に大学入試センターが例題というのを作ったことがあります。類題が出題されているような気がしましたので, 調べたところ, その中に本問と似た問題が入っていました。