第１問

解答解説のページへ

[1] 方程式 $2(x-2)^2=|3x-5|$ ……①を考える。

(1) 方程式①の解のうち，$x<\dfrac{5}{3}$ を満たす解は，$x=$ $\boxed{\text{ア}}$，$\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

(2) 方程式①の解は全部で $\boxed{\text{エ}}$ 個ある。その解のうちで最大のものを α とすると，$m \leqq \alpha < m+1$ を満たす整数 m は $\boxed{\text{オ}}$ である。

[2] 集合 A, B を

$A=\{\,n\,|\,n$ は 10 で割り切れる自然数 $\}$

$B=\{\,n\,|\,n$ は 4 で割り切れる自然数 $\}$

とする。

(1) 次の $\boxed{\text{カ}}$ と $\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから 1 つずつ選べ。

自然数 n が A に属することは, n が 2 で割り切れるための $\boxed{\text{カ}}$。

自然数 n が B に属することは, n が 20 で割り切れるための $\boxed{\text{キ}}$。

⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが，十分条件ではない

② 十分条件であるが，必要条件ではない

③ 必要条件でも十分条件でもない

(2) 次の $\boxed{\text{ク}}$ ～ $\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～⑦のうちから 1 つずつ選べ。

$C=\{\,n\,|\,n$ は 10 と 4 のいずれでも割り切れる自然数 $\}$

$D=\{\,n\,|\,n$ は 10 でも 4 でも割り切れない自然数 $\}$

$E=\{\,n\,|\,n$ は 20 で割り切れない自然数 $\}$

とする。自然数全体の集合を全体集合とし，その部分集合 G の補集合を $\overline{G}$ で表すとき，$C=$ $\boxed{\text{ク}}$，$D=$ $\boxed{\text{ケ}}$，$E=$ $\boxed{\text{コ}}$ である。

⓪ $A\cup B$　① $A\cup\overline{B}$　② $\overline{A}\cup B$　③ $\overline{A\cup B}$

④ $A\cap B$　⑤ $A\cap\overline{B}$　⑥ $\overline{A}\cap B$　⑦ $\overline{A\cap B}$

第２問

解答解説のページへ

a を定数とし，x の 2 次関数 $y=x^2-2(a-1)x+2a^2-8a+4$ ……①のグラフを G とする。

(1)　グラフ G が表す放物線の頂点の座標は，$\left(a-\boxed{\text{ア}},\ a^2-\boxed{\text{イ}}a+\boxed{\text{ウ}}\right)$ である。グラフ G が x 軸と異なる 2 点で交わるのは

$$\boxed{\text{エ}}-\sqrt{\boxed{\text{オ}}}<a<\boxed{\text{エ}}+\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

のときである。さらに，この 2 つの交点がともに x 軸の負の部分にあるのは

$$\boxed{\text{カ}}-\sqrt{\boxed{\text{キ}}}<a<\boxed{\text{ク}}-\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$$

のときである。

(2)　グラフ G が表す放物線の頂点の x 座標が 3 以上 7 以下の範囲にあるとする。

このとき，a の値の範囲は，$\boxed{\text{コ}}\leqq a\leqq\boxed{\text{サ}}$ であり，2 次関数①の $3\leqq x\leqq 7$ における最大値 M は

$\boxed{\text{コ}}\leqq a\leqq\boxed{\text{シ}}$ のとき，$M=\boxed{\text{ス}}a^2-\boxed{\text{セソ}}a+\boxed{\text{タチ}}$

$\boxed{\text{シ}}\leqq a\leqq\boxed{\text{サ}}$ のとき，$M=\boxed{\text{ツ}}a^2-\boxed{\text{テト}}a+\boxed{\text{ナニ}}$

である。

したがって，2 次関数①の $3\leqq x\leqq 7$ における最小値が 6 であるならば

$$a=\boxed{\text{ヌ}}+\boxed{\text{ネ}}\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}$$

であり，最大値 M は，$M=\boxed{\text{ハヒ}}-\boxed{\text{フ}}\sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}$ である。

第３問

解答解説のページへ

$\triangle$ABC において，AB = 2，BC = $\sqrt{5}+1$，CA = $2\sqrt{2}$ とする。また，$\triangle$ABC の外接円の中心を O とする。

(1) このとき，$\angle$ABC = $\boxed{\text{アイ}}$° であり，外接円 O の半径は，$\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(2) 円 O の円周上に点 D を，直線 AC に関して点 B と反対側の弧の上にとる。$\triangle$ABD の面積を S_1，$\triangle$BCD の面積を S_2 とするとき

$$\frac{S_1}{S_2} = \sqrt{5}-1 \cdots\cdots\cdots ①$$

であるとする。$\angle$BAD + $\angle$BCD = $\boxed{\text{カキク}}$° であるから，CD = $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$AD となる。

このとき，CD = $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}$ である。

さらに，2 辺 AD，BC の延長の交点を E とし，$\triangle$ABE の面積を S_3，$\triangle$CDE の面積を S_4 とする。このとき

$$\frac{S_3}{S_4} = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \cdots\cdots\cdots ②$$

である。①と②より

$$\frac{S_2}{S_4} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

となる。

第４問

解答解説のページへ

1 辺の長さ 1 の正六角形があり，その頂点の 1 つを A とする。1 つのさいころを 3 回投げ，点 P を次の(a)，(b)，(c)にしたがって，この正六角形の辺上を反時計回りに進める。

(a)　頂点 A から出発して，1 回目に出た目の数の長さだけ点 P を進める。

(b)　1 回目で点 P がとまった位置から出発して，2 回目に出た目の数の長さだけ点 P を進める。

(c)　2 回目で点 P がとまった位置から出発して，3 回目に出た目の数の長さだけ点 P を進める。

(1)　3 回進めたとき，点 P が正六角形の辺上を 1 周して，ちょうど頂点 A に到達する目の出方は $\boxed{\text{アイ}}$ 通りである。

3 回進める間に，点 P が 1 回も頂点 A にとまらない目の出方は $\boxed{\text{ウエオ}}$ 通りである。

(2)　3 回進める間に，点 P が 3 回とも頂点 A にとまる確率は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キクケ}}}$ であり，ちょうど 2 回だけ頂点 A にとまる確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である。

3 回進める間に，点 P がちょうど 1 回だけ頂点 A にとまる確率は $\dfrac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ である。

(3)　3 回進める間に，点 P が頂点 A にとまる回数の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ 回である。

第１問

問題のページへ

[1]　(1)　方程式$2(x-2)^2=|3x-5|$……①に対して，$x<\frac{5}{3}$のとき，

$2(x-2)^2=-(3x-5)$，$2x^2-5x+3=0$，$(x-1)(2x-3)=0$

よって，$x=1,\ \frac{3}{2}$　（ともに$x<\frac{5}{3}$を満たす）

(2)　①より，$x\geqq\frac{5}{3}$のとき，$2(x-2)^2=3x-5$，$2x^2-11x+13=0$，$x=\frac{11\pm\sqrt{17}}{4}$

ここで，$169>9\times17$より$13>3\sqrt{17}$となり，

$3(11-\sqrt{17})>20$，$\frac{11-\sqrt{17}}{4}>\frac{5}{3}$

よって，xの値はともに$x\geqq\frac{5}{3}$を満たし，これより方程式①の解は4個存在する。

また，最大の解αは$\alpha=\frac{11+\sqrt{17}}{4}$であり，$4<\sqrt{17}<5$から$\frac{15}{4}<\alpha<4$となり，$m\leqq\alpha<m+1$を満たす整数$m$は$m=3$である。

[2]　(1)　集合Aは10の倍数である自然数，Bは4の倍数である自然数の集合を表す。

すると，nがAに属することは，nが2で割り切れるための，十分条件であるが，必要条件ではない。

また，自然数nがBに属することは，nが20で割り切れるための，必要条件であるが，十分条件ではない。

(2)　集合Cは10の倍数であり，かつ4の倍数である自然数，Dは10の倍数でなく，しかも4の倍数でもない自然数の集合を表すので，

$C=A\cap B$，$D=\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$

集合Eは20の倍数でない自然数の集合を表すので，集合Cの補集合となり，

$E=\overline{C}=\overline{A\cap B}$

［解 説］

[1]は，グラフを書いて解の個数を判断してもよいのですが，数式だけで処理すると，無理数の大小関係のチェックに時間がかかります。[2]は，今後，定番となりそうな問題です。

第２問

問題のページへ

(1)　G： $y=x^2-2(a-1)x+2a^2-8a+4$ ……①に対して,

$$y=\{x-(a-1)\}^2-(a-1)^2+2a^2-8a+4=\{x-(a-1)\}^2+a^2-6a+3$$

よって, 頂点の座標は, $(a-1,\ a^2-6a+3)$ となる。

すると, G が x 軸と異なる 2 点で交わる条件は, $a^2-6a+3<0$ より,

$$3-\sqrt{6}<a<3+\sqrt{6}\ \cdots\cdots\text{②}$$

さらに, この 2 つの交点がともに x 軸の負の部分にある条件は, ②に加えて,

$$a-1<0\ \cdots\cdots\text{③},\quad 2a^2-8a+4>0\ \cdots\cdots\text{④}$$

③より $a<1$, ④より $a<2-\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}<a$ となり, ②③④を満たす a の値の範囲は, $3-\sqrt{6}<2-\sqrt{2}$ に注意すると,

$$3-\sqrt{6}<a<2-\sqrt{2}$$

(2)　条件より, $3\leqq a-1\leqq 7$ なので, $4\leqq a\leqq 8$ となる。

さて, グラフの軸の位置で場合分けをして, $3\leqq x\leqq 7$ における最大値を求める。

(i)　$3\leqq a-1\leqq 5$ $(4\leqq a\leqq 6)$ のとき

①は $x=7$ で最大となり, 最大値 M は,

$$M=49-14(a-1)+2a^2-8a+4=2a^2-22a+67$$

(ii)　$5\leqq a-1\leqq 7$ $(6\leqq a\leqq 8)$ のとき

①は $x=3$ で最大となり, 最大値 M は,

$$M=9-6(a-1)+2a^2-8a+4=2a^2-14a+19$$

また, $3\leqq a-1\leqq 7$ なので, $3\leqq x\leqq 7$ における最小値は $x=a-1$ でとり, その値が 6 であることより,

$$a^2-6a+3=6,\quad a^2-6a-3=0,\quad a=3\pm 2\sqrt{3}$$

すると, $4\leqq a\leqq 8$ から, $a=3+2\sqrt{3}$ となる。

このとき, $3+2\sqrt{3}>6$ から, 最大値 M は,

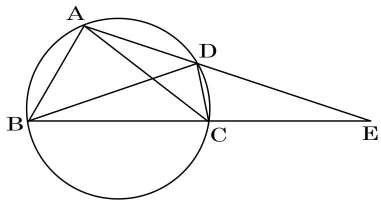
$$M=2(3+2\sqrt{3})^2-14(3+2\sqrt{3})+19=19-4\sqrt{3}$$

［解 説］

2 次関数の基本問題です。場合分けは必要ですが, 複雑なものではありません。完答することが望まれます。

第３問

問題のページへ



(1) △ABC に余弦定理を適用して,

$$\cos B=\frac{2^2+(\sqrt{5}+1)^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot 2(\sqrt{5}+1)}$$

$$=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{4(\sqrt{5}+1)}=\frac{1}{2}$$

よって，$\angle\mathrm{ABC}=60^\circ$ となり，△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

$$2R=\frac{2\sqrt{2}}{\sin 60^\circ},\quad R=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

(2) $\angle\mathrm{BAD}+\angle\mathrm{BCD}=180^\circ$ より，$\sin\angle\mathrm{BAD}=\sin(180^\circ-\angle\mathrm{BCD})=\sin\angle\mathrm{BCD}$ であり，

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot 2\mathrm{AD}\sin\angle\mathrm{BAD}=\mathrm{AD}\sin\angle\mathrm{BAD}$$

$$S_2=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\mathrm{CD}\sin\angle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\mathrm{CD}\sin\angle\mathrm{BAD}$$

よって，$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{2\mathrm{AD}}{(\sqrt{5}+1)\mathrm{CD}}$ となり，$\dfrac{S_1}{S_2}=\sqrt{5}-1$ ……①から，

$$2\mathrm{AD}=(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)\mathrm{CD},\quad \mathrm{CD}=\frac{1}{2}\mathrm{AD}$$

ここで，$\angle\mathrm{CDA}=180^\circ-60^\circ=120^\circ$ から，$\mathrm{CD}=x$ とおき，△ACD に余弦定理を適用すると，

$$(2\sqrt{2})^2=x^2+(2x)^2-2x\cdot 2x\cos 120^\circ,\quad 8=7x^2$$

よって，$x=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{14}}{7}$

さて，$\angle\mathrm{ABE}=\angle\mathrm{CDE}$ より，$\triangle\mathrm{ABE}\backsim\triangle\mathrm{CDE}$ となり，

$$\frac{S_3}{S_4}=\left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}}\right)^2=\left(\frac{7}{\sqrt{14}}\right)^2=\frac{7}{2}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$\dfrac{S_2}{S_4}=\dfrac{S_3-S_1-S_4}{S_4}=\dfrac{S_3-(\sqrt{5}-1)S_2-S_4}{S_4}=\dfrac{7}{2}-(\sqrt{5}-1)\dfrac{S_2}{S_4}-1$

よって，$\sqrt{5}\dfrac{S_2}{S_4}=\dfrac{5}{2}$ から，$\dfrac{S_2}{S_4}=\dfrac{5}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

［解 説］

センター試験において，過去に何度も出題された円に内接する四角形を題材としています。ただ，相似な図形の面積比は，相似比の 2 乗であることを用いる設問に，現行課程らしさを感じます。

第４問

問題のページへ

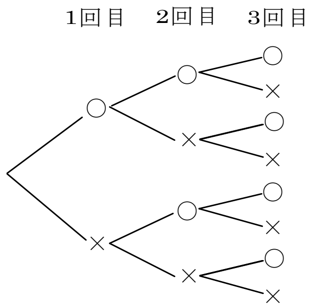
(1) さいころを投げ, 1 回目, 2 回目, 3 回目に出た目をそれぞれ a, b, c とする。

3 回進めたとき, 点 P が 1 周して頂点 A に到達する条件は,

$$a+b+c=6 \quad (1 \leqq a \leqq 6,\ 1 \leqq b \leqq 6,\ 1 \leqq c \leqq 6) \cdots\cdots\cdots (*)$$

よって, $(*)$を満たす$(a,\ b,\ c)$の組は, ${}_5\mathrm{C}_2=10$ 通りある。

さて, 点 P を進めて, A にとまる場合を○, A にとまらない場合を×と記すと, 右のような樹形図ができる。



また, それぞれの枝別れについて, ○に進む場合は 1 通り, ×に進む場合は 5 通りの目の出方がある。

これより, 3 回進める間に, 点 P が 1 回も頂点 A にとまらない目の出方は,

$$5\times5\times5=125 \text{ 通り}$$

(2) 3 回進める間に, 点 P が 3 回とも頂点 A にとまる確率は, $\dfrac{1}{6^3}=\dfrac{1}{216}$ であり, 2 回だけ頂点 A にとまる確率は, $\dfrac{3\times5\times1^2}{6^3}=\dfrac{5}{72}$ である。

さらに, 1 回だけ頂点 A にとまる確率は, $\dfrac{3\times5^2\times1}{6^3}=\dfrac{25}{72}$ である。

(3) 点 P が頂点 A にとまる回数の期待値は, (2)より,

$$0\times\frac{125}{216}+1\times\frac{25}{72}+2\times\frac{5}{72}+3\times\frac{1}{216}=\frac{1}{2}$$

［解 説］

最初の設問にはまり, これをもとに場合分けをしようとすると, 時間がなくなります。上のような樹形図を描くと一目瞭然で, 一気呵成に最後の設問まで進みます。