第１問

解答解説のページへ

[1]　不等式 $\sin 2x > \sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{1}{2}$ を満たす x の範囲を求めよう。ただし，$0 \leqq x < 2\pi$ とする。

$a=\sin x$，$b=\cos x$ とおくと，与えられた不等式は，

$$\boxed{\text{ア}}\,ab+\boxed{\text{イ}}\,a-\boxed{\text{ウ}}\,b-1>0$$

となる。左辺の因数分解を利用して x の範囲を求めると

$$\frac{\pi}{\boxed{\text{エ}}}<x<\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi \quad \text{または} \quad \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi<x<\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi$$

である。

[2]　不等式 $2+\log_{\sqrt{y}}3<\log_y 81+2\log_y\left(1-\dfrac{x}{2}\right)$ の表す領域を求めよう。

y と $\sqrt{y}$ は対数の底であるから $y>\boxed{\text{サ}}$，$y \neq \boxed{\text{シ}}$ である。真数は正であるから $x<\boxed{\text{ス}}$ である。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という。

また，$\log_{\sqrt{y}}3=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\log_3 y}$，$\log_y 81=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\log_3 y}$ であるから，与えられた不等式は，

$$1<\frac{\boxed{\text{タ}}}{\log_3 y}+\frac{\log_3\left(1-\dfrac{x}{2}\right)}{\log_3 y}$$

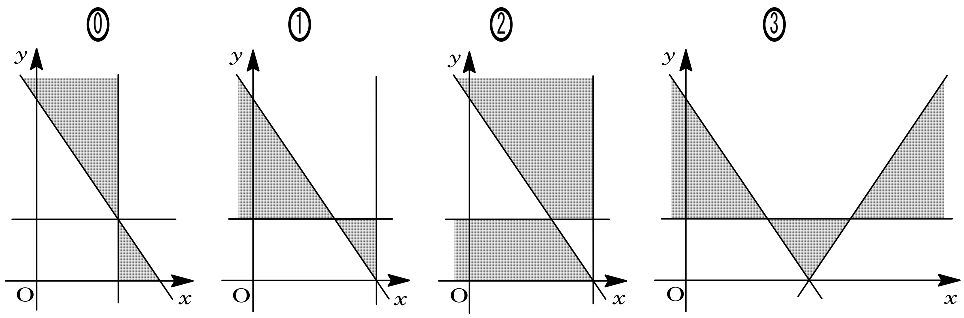
となる。よって，

$$y>\boxed{\text{チ}} \text{ のとき，} \log_3 y<\log_3\left\{\boxed{\text{ツ}}\left(1-\frac{x}{2}\right)\right\}$$

$$\boxed{\text{テ}}<y<\boxed{\text{チ}} \text{ のとき，} \log_3 y>\log_3\left\{\boxed{\text{ツ}}\left(1-\frac{x}{2}\right)\right\}$$

となる。

求める領域を図示すると，次の図 $\boxed{\text{ト}}$ の影をつけた部分となる。ただし，境界(境界線)は含まない。$\boxed{\text{ト}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから１つ選べ。



第２問

解答解説のページへ

$a>0$ として, x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ を

$$f(x)=x^3-x,\quad g(x)=f(x-a)+2a$$

とする。

(1) 2つの関数の差 $g(x)-f(x)$ は

$$g(x)-f(x)=a\left(\boxed{アイ}x^2+\boxed{ウ}ax-a^2+\boxed{エ}\right)$$

と表され, x の方程式 $g(x)-f(x)=0$ が異なる2つの実数解をもつような a の範囲は, $0<a<\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}$ である。

また, $g(x)-f(x)$ は $x=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ のとき, 最大値 $\dfrac{a}{\boxed{ケ}}\left(\boxed{コサ}-a^{\boxed{シ}}\right)$ をとる。

(2) (1)で得られた最大値を

$$h(a)=\frac{a}{\boxed{ケ}}\left(\boxed{コサ}-a^{\boxed{シ}}\right)$$

と表す。$h(a)$ を a の関数と考えるとき, $h(a)$ は $a=\boxed{ス}$ で最大値 $\boxed{セ}$ をとる。

(3) $a=\sqrt{3}$ のとき, 曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ の2つの交点 P, Q の座標は

$$\mathrm{P}\left(\boxed{ソ},\ 0\right),\ \mathrm{Q}\left(\sqrt{\boxed{タ}},\ \boxed{チ}\sqrt{\boxed{ツ}}\right)$$

であり, 2つの曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ で囲まれた部分の面積 S は,

$$S=\frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$$

である。

さらに, 交点 $\mathrm{P}\left(\boxed{ソ},\ 0\right)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線と曲線 $y=g(x)$ の接線のなす角を $\theta\ \left(0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると, $\tan\theta=\dfrac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}$ である。

第３問

解答解説のページへ

3 つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$がある。

(1)　数列$\{a_n\}$は，初項が-27で，漸化式

$$a_{n+1}=3a_n+60\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする。このとき

$$a_n=\boxed{\text{ア}}^{\,n}-\boxed{\text{イウ}}$$

である。数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和S_nは

$$S_n=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\left(\boxed{\text{カ}}^{\,n}-\boxed{\text{キ}}\right)-\boxed{\text{イウ}}\,n$$

である。また，$S_n>0$となる最小の自然数nは$\boxed{\text{ク}}$である。

(2)　第n項が$2b_n+c_n$で与えられる数列$\{2b_n+c_n\}$は，初項が 0 で公差がdの等差数列になり，第n項がb_n-2c_nで与えられる数列$\{b_n-2c_n\}$は，初項がxで公比がrの等比数列になるとする。このときb_n+c_nは

$$b_n+c_n=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}d(n-1)-\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}xr^{n-1}$$

と表される。

(3)　数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$は(1)，(2)を満たすとする。さらに，第n項がb_n+c_nで与えられる数列$\{b_n+c_n\}$の階差数列は，数列$\{a_n\}$であるとする。このとき

$$a_n=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}d+\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}x(1-r)r^{n-1}$$

であるから，(1)より

$$r=\boxed{\text{ス}},\quad x=\frac{\boxed{\text{セソタ}}}{\boxed{\text{チ}}},\quad d=\boxed{\text{ツテト}}$$

である。したがって，数列$\{b_n\}$，$\{c_n\}$の第n項は，それぞれ

$$b_n=-\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}^{\,n}-\boxed{\text{ヌネ}}(n-1),\quad c_n=\boxed{\text{ノ}}^{\,n}-\boxed{\text{ハヒ}}(n-1)$$

である。

第４問

解答解説のページへ

点 O を原点とする座標空間に 4 点 A(1, 0, 0)，B(0, 1, 1)，C(1, 0, 1)，D(−2, −1, −2) がある。$0<a<1$ とし，線分 AB を $a:(1-a)$ に内分する点を E，線分 CD を $a:(1-a)$ に内分する点を F とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ は a を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\left(\boxed{\text{アイ}}\,a,\ \boxed{\text{ウエ}}\,a,\ \boxed{\text{オ}}-\boxed{\text{カ}}\,a\right)$$

と表される。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるのは $a=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のときである。

(2) $a=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ とする。$0<b<1$ として，線分 EF を $b:(1-b)$ に内分する点を G とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ は b を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\left(\frac{\boxed{\text{ケ}}-\boxed{\text{コ}}\,b}{\boxed{\text{サ}}},\ \frac{\boxed{\text{シ}}-\boxed{\text{ス}}\,b}{\boxed{\text{サ}}},\ \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)$$

と表される。

(3) (2)において，直線 OG と直線 BC が交わるときの b の値と，その交点 H の座標を求めよう。

点 H は直線 BC 上にあるから，実数 s を用いて $\overrightarrow{\mathrm{BH}}=s\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と表される。また，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ と表される。よって

$$b=\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}},\quad s=\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}},\quad t=\boxed{\text{テ}}$$

である。したがって，点 H の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}},\ \frac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ナ}}},\ \boxed{\text{ネ}}\right)$$

である。また，点 H は線分 BC を $\boxed{\text{ノ}}:1$ に外分する。

第１問

問題のページへ

[1]　$\sin 2x > \sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{1}{2}$ に対して，

$$2\sin x\cos x > \sqrt{2}\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$$

$$4\sin x\cos x > 2\cos x - 2\sin x + 1$$

ここで，$a=\sin x$，$b=\cos x$ とおくと，$4ab>2b-2a+1$，$4ab+2a-2b-1>0$

すると，$(2a-1)(2b+1)>0$ となり，$2a-1$ と $2b+1$ の符号で場合分けをする。

(i)　$2a-1>0$ かつ $2b+1>0$ のとき

$\sin x>\dfrac{1}{2}$ かつ $\cos x>-\dfrac{1}{2}$ より，$\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{2}{3}\pi$

(ii)　$2a-1<0$ かつ $2b+1<0$ のとき

$\sin x<\dfrac{1}{2}$ かつ $\cos x<-\dfrac{1}{2}$ より，$\dfrac{5}{6}\pi<x<\dfrac{4}{3}\pi$

[2]　$2+\log_{\sqrt{y}}3<\log_y 81+2\log_y\left(1-\dfrac{x}{2}\right)$……①に対して，底の条件から，

$$\sqrt{y}>0 \text{ かつ } \sqrt{y}\neq 1,\quad y>0 \text{ かつ } y\neq 1$$

まとめると，$y>0$ かつ $y\neq 1$ となり，また真数条件より，$1-\dfrac{x}{2}>0$ から，$x<2$

さて，$\log_{\sqrt{y}}3=\dfrac{\log_3 3}{\log_3\sqrt{y}}=\dfrac{2}{\log_3 y}$，$\log_y 81=\dfrac{\log_3 81}{\log_3 y}=\dfrac{4}{\log_3 y}$ から，①は，

$$2+\frac{2}{\log_3 y}<\frac{4}{\log_3 y}+\frac{2\log_3\left(1-\frac{x}{2}\right)}{\log_3 y},\quad 1<\frac{1}{\log_3 y}+\frac{\log_3\left(1-\frac{x}{2}\right)}{\log_3 y}$$

すると, $y>1$ のとき，$\log_3 y>0$ より，

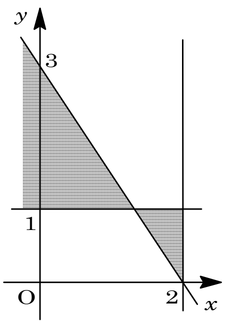
$$\log_3 y<1+\log_3\left(1-\frac{x}{2}\right),\quad \log_3 y<\log_3 3\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdots\cdots②$$

また, $0<y<1$ のとき，$\log_3 y<0$ より，

$$\log_3 y>1+\log_3\left(1-\frac{x}{2}\right),\quad \log_3 y>\log_3 3\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdots\cdots③$$

②より，$y<3\left(1-\dfrac{x}{2}\right)$　$(y>1)$

③より，$y>3\left(1-\dfrac{x}{2}\right)$　$(0<y<1)$



すると，求める領域は右図の網点部となる。ただし，境界は含まない。

［解　説］

三角関数と対数関数，どちらも不等式を解く問題です。解に至る道筋が明快に示されています。

第２問

問題のページへ

(1) $f(x)=x^3-x$，$g(x)=(x-a)^3-(x-a)+2a=x^3-3ax^2+(3a^2-1)x-a^3+3a$

$$g(x)-f(x)=-3ax^2+3a^2x-a^3+3a=a(-3x^2+3ax-a^2+3)\cdots\cdots\cdots(*)$$

$g(x)-f(x)=0$が異なる２つの実数解をもつ条件は,

$$D=9a^2-4\cdot3(a^2-3)>0,\ a^2-12<0$$

$a>0$から，$0<a<2\sqrt{3}$となる。

また,(＊)より，$g(x)-f(x)=a\left\{-3\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{1}{4}a^2+3\right\}$

よって，$g(x)-f(x)$は$x=\frac{a}{2}$のとき最大となり，最大値は,

$$a\left(-\frac{1}{4}a^2+3\right)=\frac{a}{4}(12-a^2)$$

(2) $h(a)=\frac{a}{4}(12-a^2)=-\frac{1}{4}a^3+3a$より,

$$h'(a)=-\frac{3}{4}a^2+3=-\frac{3}{4}(a+2)(a-2)$$

a	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(a)$		＋	0	－
$h(a)$		↗	4	↘

よって，$a=2$のとき最大値４をとる。

(3) $a=\sqrt{3}$のとき，$g(x)-f(x)=\sqrt{3}(-3x^2+3\sqrt{3}x)=-3\sqrt{3}x(x-\sqrt{3})$

すると，$g(x)-f(x)=0$の解は$x=0,\ \sqrt{3}$となり，$f(0)=0$，$f(\sqrt{3})=2\sqrt{3}$から，曲線$y=f(x)$と曲線$y=g(x)$の２つの交点P, Qの座標は,

$$\mathrm{P}(0,\ 0),\ \mathrm{Q}(\sqrt{3},\ 2\sqrt{3})$$

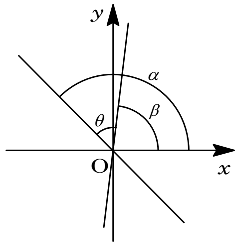
よって,２つの曲線$y=f(x)$，$y=g(x)$で囲まれた部分の面積Sは,

$$S=\int_0^{\sqrt{3}}-3\sqrt{3}x(x-\sqrt{3})\,dx=-3\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot(\sqrt{3})^3=\frac{9}{2}$$

このとき，$g(x)=x^3-3\sqrt{3}x^2+8x$となり,

$$f'(x)=3x^2-1,\ g'(x)=3x^2-6\sqrt{3}x+8$$

x軸の正の部分と，P における曲線$y=f(x)$の接線, $y=g(x)$の接線とのなす角をそれぞれα，βとおくと,



$$\tan\alpha=f'(0)=-1,\ \tan\beta=g'(0)=8$$

したがって,２本の接線のなす角をθとすると,

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-1-8}{1-8}=\frac{9}{7}$$

［解 説］

微積分についての幅広い知識が問われています。ただ，計算は難しくないものの,量的には多めです。

第３問

問題のページへ

(1) $a_1=-27$，$a_{n+1}=3a_n+60$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ より，

$$a_{n+1}+30=3(a_n+30)$$

よって，$a_n+30=(a_1+30)\cdot 3^{n-1}=3^n$ より，$a_n=3^n-30$ ………①

初項から第 n 項までの和 S_n は,

$$S_n=\frac{3(3^n-1)}{3-1}-30n=\frac{3}{2}(3^n-1)-30n$$

$S_n>0$ とすると，$\dfrac{3}{2}(3^n-1)>30n$ から，$3^n>20n+1$

この不等式を満たす最小の自然数 n は，$n=5$ である。

(2) 条件より，$2b_n+c_n=d(n-1)$ ……②，$b_n-2c_n=xr^{n-1}$ ……③

②③より，$5b_n=2d(n-1)+xr^{n-1}$，$5c_n=d(n-1)-2xr^{n-1}$

$$5b_n+5c_n=3d(n-1)-xr^{n-1}$$

よって，$b_n+c_n=\dfrac{3}{5}d(n-1)-\dfrac{1}{5}xr^{n-1}$

(3) 数列$\{b_n+c_n\}$の階差数列は，数列$\{a_n\}$であるので,

$$a_n=(b_{n+1}+c_{n+1})-(b_n+c_n)=\frac{3}{5}dn-\frac{1}{5}xr^n-\frac{3}{5}d(n-1)+\frac{1}{5}xr^{n-1}$$

$$=\frac{3}{5}d+\frac{1}{5}x(1-r)r^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots ④$$

①④より，$\dfrac{3}{5}d=-30$，$\dfrac{1}{5}x(1-r)=3$，$r=3$ から，$d=-50$，$x=-\dfrac{15}{2}$

このとき，$b_n=\dfrac{1}{5}\left\{-100(n-1)-\dfrac{15}{2}\cdot 3^{n-1}\right\}=-\dfrac{3^n}{2}-20(n-1)$

$$c_n=\frac{1}{5}\left\{-50(n-1)-2\left(-\frac{15}{2}\right)\cdot 3^{n-1}\right\}=3^n-10(n-1)$$

［解 説］

線形タイプの 2 項間型漸化式が，ノーヒントで出題されました。なお, (1)の不等式は，$n=1,\ 2,\ \cdots$ と n の値を代入して解いています。ところで，④式が問題文で与えられている理由は何でしょうか。

第４問

問題のページへ

(1) 点 E は線分 AB を $a:(1-a)$ に内分することより,

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1-a)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+a\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1-a)(1,\ 0,\ 0)+a(0,\ 1,\ 1)=(1-a,\ a,\ a)$$

点 F は線分 CD を $a:(1-a)$ に内分することより,

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=(1-a)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+a\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-a)(1,\ 0,\ 1)+a(-2,\ -1,\ -2)$$
$$=(1-3a,\ -a,\ 1-3a)$$

よって, $\overrightarrow{\mathrm{EF}}=(1-3a,\ -a,\ 1-3a)-(1-a,\ a,\ a)=(-2a,\ -2a,\ 1-4a)$

また, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 1,\ 1)$ であり, $\overrightarrow{\mathrm{EF}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ となり,

$$2a-2a+1-4a=0,\quad a=\frac{1}{4}$$

(2) $a=\dfrac{1}{4}$ のとき, $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4}\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\left(\dfrac{1}{4},\ -\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4}\right)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=(1-b)\overrightarrow{\mathrm{OE}}+b\overrightarrow{\mathrm{OF}}=(1-b)\left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)+b\left(\frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$$
$$=\left(\frac{3-2b}{4},\ \frac{1-2b}{4},\ \frac{1}{4}\right)$$

(3) 条件より, $\overrightarrow{\mathrm{BH}}=s\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(0,\ 1,\ 1)+s(1,\ -1,\ 0)=(s,\ 1-s,\ 1)\cdots\cdots\cdots①$$

また, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\overrightarrow{\mathrm{OG}}=t\left(\dfrac{3-2b}{4},\ \dfrac{1-2b}{4},\ \dfrac{1}{4}\right)\cdots\cdots\cdots②$

①②より, $s=\dfrac{3-2b}{4}t\cdots\cdots③$, $1-s=\dfrac{1-2b}{4}t\cdots\cdots④$, $1=\dfrac{1}{4}t\cdots\cdots⑤$

⑤より $t=4$ となり, ③④に代入すると,

$$s=3-2b,\quad 1-s=1-2b$$

よって, $b=\dfrac{3}{4}$, $s=\dfrac{3}{2}$ となり, 点 H の座標は, $\mathrm{H}\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ である。

このとき, $\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ なので, 点 H は線分 BC を $\dfrac{3}{2}:\dfrac{1}{2}=3:1$ に外分する。

［解 説］

空間ベクトルの成分に関する基本問題です。ベクトルは考えにくいものが多かったのですが, それに比べると, 今年の問題は易しめです。