第１問

解答解説のページへ

[1] 長方形 ABCD において，$AB=CD=8$，$BC=DA=12$ とする。辺 AB 上に点 P, 辺 BC 上に点 Q, 辺 CD 上に点 R を，$AP=BQ=CR$ となるようにとり，$AP=x$ とおく$(0<x<8)$。このとき，台形 PBCR の面積は $\boxed{アイ}$ である。また，△PQR の面積 S は,

$$S=x^2-\boxed{ウエ}x+\boxed{オカ}$$

である。$S<24$ となる x の範囲は，$\boxed{キ}<x<\boxed{ク}$ である。

[2] 次の $\boxed{ケ}$ ～ $\boxed{シ}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

自然数 m, n について，条件 p, q, r を次のように定める。

p： $m+n$ は 2 で割り切れる

q： n は 4 で割り切れる

r： m は 2 で割り切れ，かつ n は 4 で割り切れる

また，条件 p の否定を $\overline{p}$，条件 r の否定を $\overline{r}$ で表す。このとき

p は r であるための $\boxed{ケ}$。

$\overline{p}$ は $\overline{r}$ であるための $\boxed{コ}$。

「p かつ q」は r であるための $\boxed{サ}$。

「p または q」は r であるための $\boxed{シ}$。

⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが，十分条件でない

② 十分条件であるが，必要条件でない

③ 必要条件でも十分条件でもない

第２問

解答解説のページへ

a, b を定数とし，$a \neq 0$ とする。2 次関数 $y = ax^2 - bx - a + b$ ……①のグラフが点 $(-2,\ 6)$ を通るとする。

このとき，$b = -a + \boxed{ア}$ であり，グラフの頂点を a を用いて表すと

$$\left(\frac{-a + \boxed{イ}}{\boxed{ウ}\,a},\ \frac{-\left(\boxed{エ}\,a - \boxed{オ}\right)^2}{\boxed{カ}\,a} \right)$$

である。

さらに，2 次関数①のグラフの頂点の y 座標が -2 であるとする。このとき，a は

$$\boxed{キ}\,a^2 - \boxed{クケ}\,a + \boxed{コ} = 0$$

を満たす。これより，a の値は，$a = \boxed{サ}$，$\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ である。

以下，$a = \dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ であるとする。

このとき，2 次関数①のグラフの頂点の x 座標は $\boxed{セ}$ であり，①のグラフと x 軸の 2 交点の x 座標は $\boxed{ソ}$，$\boxed{タ}$ である。ただし，$\boxed{ソ}$ と $\boxed{タ}$ は解答の順序を問わない。

また，関数①は $0 \leqq x \leqq 9$ において

$x = \boxed{チ}$ のとき，最小値 $\boxed{ツテ}$ をとり

$x = \boxed{ト}$ のとき，最大値 $\dfrac{\boxed{ナニ}}{\boxed{ヌ}}$ をとる。

第３問

解答解説のページへ

△ABC において，$AB = 7$，$BC = 4\sqrt{2}$，$\angle ABC = 45°$ とする。また，△ABC の外接円の中心を O とする。

このとき，$CA = \boxed{\text{ア}}$ であり，外接円 O の半径は $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である。

外接円 O の上の点 A を含まない弧 BC 上に点 D を $CD = \sqrt{10}$ であるようにとる。$\angle ADC = \boxed{\text{オカ}}°$ であるから，$AD = x$ とすると x は 2 次方程式

$$x^2 - \boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}\,x - \boxed{\text{ケコ}} = 0$$

を満たす。$x > 0$ であるから $AD = \boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ となる。

下の $\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$ には，次の⓪～⑤のうちから当てはまるものを 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ AC　① AD　② AE　③ BA　④ CD　⑤ ED

点 A における外接円 O の接線と編 DC の延長との交点を E とする。このとき，$\angle CAE = \angle\boxed{\text{ス}}E$ であるから，△ACE と△D$\boxed{\text{セ}}$ は相似である。これより，

$$EA = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}\,EC$$

である。また，$EA^2 = \boxed{\text{ツ}}\cdot EC$ である。したがって

$$EA = \frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}$$

であり，△ACE の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ヌネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ である。

第４問

解答解説のページへ

さいころを 3 回投げ，次の規則にしたがって文字の列を作る。ただし，何も書かれていないときや文字が 1 つだけのときも文字の列と呼ぶことにする。

1 回目は次のようにする。

・出た目の数が 1, 2 のときは，文字 A を書く

・出た目の数が 3, 4 のときは，文字 B を書く

・出た目の数が 5, 6 のときは，何も書かない

2 回目, 3 回目は次のようにする。

・出た目の数が 1, 2 のときは，文字の列の右側に文字 A を 1 つ付け加える

・出た目の数が 3, 4 のときは，文字の列の右側に文字 B を 1 つ付け加える

・出た目の数が 5, 6 のときは，いちばん右側の文字を削除する。ただし，何も書かれていないときはそのままにする

以下の問いでは，さいころを 3 回投げ終わったときにできる文字の列について考える。

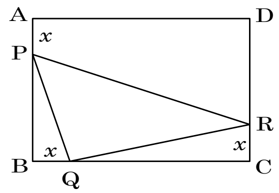
(1) 文字の列が AAA となるさいころの目の出方は $\boxed{\text{ア}}$ 通りである。文字の列が AB となるさいころの目の出方は $\boxed{\text{イ}}$ 通りである。

(2) 文字の列が A となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ であり，何も書かれていない文字の列となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}$ である。

(3) 文字の列の字数が 3 となる確率は，$\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ であり，字数が 2 となる確率は，$\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{スセ}}}$ である。また，文字の列の字数の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ である。ただし，何も書かれていないときの字数は 0 とする。

第１問

問題のページへ



[1] まず, (台形 PBCR) $=\dfrac{1}{2}(x+8-x)\times12=48$

△PQR = (台形PBCR) − △PBQ − △QCR より,

$$S=48-\frac{1}{2}(8-x)x-\frac{1}{2}(12-x)x=x^2-10x+48$$

$S<24$ とすると, $x^2-10x+24<0$ となり,

$$(x-4)(x-6)<0\,,\ 4<x<6$$

[2] 条件 p「$m+n$ は 2 で割り切れる」$\rightleftarrows$「m と n の偶奇が一致する」

条件 q「n は 4 で割り切れる」

条件 r「m は 2 で割り切れ, かつ n は 4 で割り切れる」

まず, 命題 $r\ \to\ p$ は明らかに成立し, 逆の命題 $p\ \to\ r$ は成立しない。反例として $m=n=1$ があげられる。

p は r であるための必要条件であるが十分条件でない

対偶を考えると,

$\overline{p}$ は $\overline{r}$ であるための十分条件であるが必要条件でない

次に,「p かつ q」は「$m+n$ は 2 で割り切れ, かつ n は 4 で割り切れる」となり, 命題 $r\ \to$「p かつ q」は明らかに成立する。逆の命題「p かつ q」$\to\ r$ に対しては, $m+n$, n を自然数 k, l で表し,

$$m+n=2k\,,\ \ n=4l$$

これより, $m=2k-4l=2(k-2l)$ となり,「p かつ q」$\to\ r$ も成立する。

「p かつ q」は r であるための必要十分条件である

さらに,「p または q」$\leftarrow$「p かつ q」$\rightleftarrows\ r$ より,

「p または q」は r であるための必要条件であるが, 十分条件でない

[解 説]

冒頭が文章題となっている点は, 従来と異なりますが, 内容は平易です。

第２問

問題のページへ

2 次関数 $y = ax^2 - bx - a + b$ ……①のグラフが，点$(-2,\ 6)$を通ることより，

$$6 = 4a + 2b - a + b,\ b = -a + 2$$

このとき，①から，

$$y = ax^2 + (a-2)x - 2a + 2 = a\left(x + \frac{a-2}{2a}\right)^2 - \frac{(a-2)^2}{4a} - a + 2$$

$$= a\left(x + \frac{a-2}{2a}\right)^2 - \frac{9a^2 - 12a + 4}{4a} = a\left(x + \frac{a-2}{2a}\right)^2 - \frac{(3a-2)^2}{4a}$$

頂点の座標は，$\left(\frac{-a+2}{2a},\ \frac{-(3a-2)^2}{4a}\right)$となる。

さらに，条件より，$\frac{-(3a-2)^2}{4a} = -2$のとき，$(3a-2)^2 = 8a$から，

$$9a^2 - 20a + 4 = 0,\ (a-2)(9a-2) = 0$$

よって，$a = 2,\ \frac{2}{9}$である。

ここで，$a = \frac{2}{9}$のとき，頂点のx座標は，$\frac{-a+2}{2a} = 4$より，①は，

$$y = \frac{2}{9}(x-4)^2 - 2 \text{ ………①}'$$

①′とx軸との交点は，$\frac{2}{9}(x-4)^2 - 2 = 0$から，$(x-4)^2 = 9$となり，

$$x - 4 = \pm 3,\ x = 1,\ 7$$

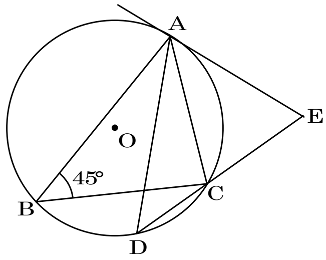
また, 2 次関数①′のグラフの軸が$x = 4$であることに注意すると, $0 \leqq x \leqq 9$において, ①′は$x = 4$のとき最小値-2をとり，$x = 9$のとき最大値$\frac{32}{9}$をとる。

［解 説］

平方完成にミスがなければ，最後の設問までスムーズに流れます。

第３問

問題のページへ



$\triangle$ABC に余弦定理を適用して，

$$\mathrm{CA}^2 = 7^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2\cdot 7\cdot 4\sqrt{2}\cos 45^\circ = 25$$

よって，$\mathrm{CA} = 5$ である。

外接円 O の半径 R は，正弦定理より，

$$R = \frac{5}{2\sin 45^\circ} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

また，$\angle\mathrm{ADC} = \angle\mathrm{ABC} = 45^\circ$ より，$\triangle$ADC に余弦定理を適用して，

$$25 = x^2 + (\sqrt{10})^2 - 2x\sqrt{10}\cos 45^\circ,\ \ x^2 - 2\sqrt{5}x - 15 = 0$$

$x > 0$ より，$x = \sqrt{5} + \sqrt{5+15} = 3\sqrt{5}$

さて, AE は外接円 O の接線なので，接弦定理より $\angle\mathrm{CAE} = \angle\mathrm{ADE} = 45^\circ$ となり，

$$\triangle\mathrm{ACE} \backsim \triangle\mathrm{DAE}$$

よって，$\dfrac{\mathrm{EA}}{\mathrm{ED}} = \dfrac{\mathrm{EC}}{\mathrm{EA}} = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{DA}}$ となり，$\mathrm{AC} = 5$，$\mathrm{DA} = 3\sqrt{5}$ から，

$$\mathrm{EA} = \frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AC}}\mathrm{EC} = \frac{3}{5}\sqrt{5}\,\mathrm{EC}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\mathrm{EA}^2 = \mathrm{ED}\cdot\mathrm{EC}$ となり，$\mathrm{EA}^2 = (\mathrm{EC} + \sqrt{10})\,\mathrm{EC}\cdots\cdots\cdots②$

①②より，$\mathrm{EA}^2 = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\mathrm{EA} + \sqrt{10}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3}\mathrm{EA}$ となり，

$$\frac{4}{9}\mathrm{EA} = \frac{5}{3}\sqrt{2},\ \ \mathrm{EA} = \frac{15}{4}\sqrt{2}$$

すると，$\triangle\mathrm{ACE} = \dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot\dfrac{15}{4}\sqrt{2}\sin 45^\circ = \dfrac{75}{8}$

［解 説］

後半が平面図形の分野です。旧課程のような，文字の入る解答を選択肢から選ぶという形式が復活しました。

第４問

問題のページへ

(1) まず，出た目の数が 1, 2 のとき a，出た目の数が 3，4 のとき b，出た目の数が 5，6 のとき x と表し，3 回投げ終わったときにできる $3^3=27$ 通りの文字の列について列挙すると，右表のようになる。

aaa	AAA	baa	BAA	xaa	AA
aab	AAB	bab	BAB	xab	AB
aax	A	bax	B	xax	なし
aba	ABA	bba	BBA	xba	BA
abb	ABB	bbb	BBB	xbb	BB
abx	A	bbx	B	xbx	なし
axa	A	bxa	A	xxa	A
axb	B	bxb	B	xxb	B
axx	なし	bxx	なし	xxx	なし

さて，文字の列が AAA となるのは，aaa の場合のみより $2^3=8$ 通りであり，文字の列が AB となるのは，xab の場合のみより $2^3=8$ 通りである。

(2) 右表の 27 通りの場合は同様に確からしい。すると，文字の列が A となるのは 5 通りあり，その確率は $\dfrac{5}{27}$ となる。

また，文字の列がなしとなるのは 5 通りあり，その確率は $\dfrac{5}{27}$ である。

(3) 文字の列の字数が 3 となるのは 8 通りあり，その確率は $\dfrac{8}{27}$ であり，また字数が 2 となるのは 4 通りあり，その確率は $\dfrac{4}{27}$ である。

同様に，字数が 1 となる確率は $\dfrac{10}{27}$ であり，これより，文字の列の字数の期待値は，

$$1\times\frac{10}{27}+2\times\frac{4}{27}+3\times\frac{8}{27}=\frac{14}{9}$$

［解 説］

厳しい制限時間の中で，27 通りのすべての場合を書き出すという決断ができるかどうか，これがすべてです。運・不運が，得点に大きく影響します。