第１問

解答解説のページへ

[1] 実数 x, y は，$3^{1+\log_{10} x} - 5^y = 1$ ……(＊)を満たしている。このとき

$$K = \frac{5^y}{3} + 3^{-\log_{10} x}$$

の最小値を求めよう。

真数条件により $x >$ $\boxed{\text{ア}}$ である。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という。次に，(＊)より，$5^y = \boxed{\text{イ}} \cdot 3^{\log_{10} x} - 1$ である。$z = 3^{\log_{10} x}$ とおくと，$5^y > 0$ であるから, z のとり得る値の範囲は，$z > \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ となる。さらに,

$$K = z + \frac{\boxed{\text{オ}}}{z} - \frac{1}{\boxed{\text{カ}}}$$

となるから, K は $z = \boxed{\text{キ}}$ のとき最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ をとる。このとき,

$x = \boxed{\text{コ}}$，$y = \log_{\boxed{\text{サ}}} \boxed{\text{シ}}$ である。

[2] a を正の定数とする。点 O を原点とする座標平面において，中心が O で，半径が 1 の円と半径が 2 の円をそれぞれ C_1，C_2 とする。$\theta \geqq 0$ を満たす実数 θ に対して，角 $a\theta$ の動径と C_1 の交点を P とし，角 $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{3}$ の動径と C_2 の交点を Q とする。ここで，動径は O を中心とし，その始線は x 軸の正の部分とする。

(1) $\theta = \pi$ のとき, Q の座標は $\left(\sqrt{\boxed{\text{ス}}}, \boxed{\text{セ}}\right)$ である。

(2) 3 点 O, P, Q がこの順に一直線上にあるような最小の θ の値は,

$$\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}\,a + \boxed{\text{チ}}}\pi$$

である。θ が，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}\,a + \boxed{\text{チ}}}\pi$ の範囲を動くとき，円 C_2 において点 Q の軌跡を弧とする扇形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}\,a + \boxed{\text{ト}}}\pi$ である。

(3) 線分 PQ の長さの 2 乗 PQ^2 は

$$\boxed{\text{ナ}} - \boxed{\text{ニ}} \sin\left(\frac{\boxed{\text{ヌ}}\,a + \boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}\theta\right)$$

である。

(4)　x の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \boxed{\text{ナ}} - \boxed{\text{ニ}} \sin\left(\frac{\boxed{\text{ヌ}}\,a + \boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}\, x \right)$$

とおき，$f(x)$ の正の周期のうち最小のものが 4π であるとすると，$a = \dfrac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ である。

第２問

解答解説のページへ

a を正の実数とし, x の 2 次関数 $f(x)$ と $g(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{8}x^2,\quad g(x)=-x^2+3ax-2a^2$$

とする。また，放物線 $y=f(x)$ および $y=g(x)$ をそれぞれ C_1，C_2 とする。

(1) C_1 と C_2 の共有点を P とすると，点 P の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}a,\ \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}a^2\right)$ である。また，点 P における C_1 の接線の方程式は,

$$y=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}ax-\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}a^2$$

である。

(2) C_1 と x 軸および直線 $x=2$ で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。また，C_2 と x 軸の交点の x 座標は $\boxed{\text{サ}}$, $\boxed{\text{シス}}$ であり，C_2 と x 軸に囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}a^3$ である。

(3) $0\leqq x\leqq 2$ の範囲で，2 つの放物線 C_1，C_2 と 2 直線 $x=0$，$x=2$ で囲まれた図形を R とする。R の中で, $y\geqq 0$ を満たすすべての部分の面積 $S(a)$ は

$0<a\leqq\boxed{\text{タ}}$ のとき $S(a)=-\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}a^3+\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$

$\boxed{\text{タ}}<a\leqq\boxed{\text{チ}}$ のとき $S(a)=-\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}a^3+\boxed{\text{ト}}a^2-\boxed{\text{ナ}}a+\boxed{\text{ニ}}$

$\boxed{\text{チ}}<a$ のとき $S(a)=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$

である。したがって，a が $a>0$ の範囲を動くとき，$S(a)$ は $a=\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ で最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}$ をとる。

第３問

解答解説のページへ

(1) 数列$\{a_n\}$は初項が 7，公差が-4 の等差数列とする。数列$\{a_n\}$の一般項は

$$a_n = \boxed{アイ}n + \boxed{ウエ}$$

であり，初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \boxed{オカ}n^2 + \boxed{キ}n$$

である。

(2) 数列$\{b_n\}$は，第 n 項が$b_n = pn^2 - qn - r$ という 2 次式で表され，

$$b_{n+1} - 2b_n = \boxed{オカ}n^2 + \boxed{キ}n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \cdots\cdots\cdots ①$$

を満たすとする。このとき，

$$p = \boxed{ク},\ q = \boxed{ケ},\ r = \boxed{コ}$$

であり，$b_1 = \boxed{サシ}$である。

さらに，次の条件によって定まる数列$\{c_n\}$を考えよう。

$$c_1 = 1,\ c_{n+1} - 2c_n = \boxed{オカ}n^2 + \boxed{キ}n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \cdots\cdots\cdots ②$$

①と②より，$d_n = c_n - b_n$ とおくと，

$$d_{n+1} - \boxed{ス}d_n = 0 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つ。これより，数列$\{c_n\}$の一般項は

$$c_n = \boxed{セ}\cdot\boxed{ソ}^{n-1} + \boxed{ク}n^2 - \boxed{ケ}n - \boxed{コ}$$

である。数列$\{c_n\}$の初項から第 n 項までの和$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k$ は

$$\boxed{タ}\cdot\boxed{チ}^{n} + \frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}n^3 - \frac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}n^2 - \frac{\boxed{ニヌ}}{\boxed{ネ}}n - \boxed{ノ}$$

となる。

第４問

解答解説のページへ

四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{BC}=\sqrt{2}$，$\mathrm{OC}=\mathrm{CA}=\mathrm{AB}=\sqrt{3}$ である。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。

(1) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=\boxed{\text{ア}}$ であり，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

また，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=\boxed{\text{カ}}$ である。

(2) 直線 AB 上の点 P を $\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{a}=0$ であるようにとると

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\vec{b}-\vec{c}$$

となり，点 P は AB を $1:\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ に内分する。また，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{b}=\boxed{\text{ス}}$ であり，

$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{セソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ は三角形 $\boxed{\text{チ}}$ の各辺と垂直であるから，直線 CP は三角形 $\boxed{\text{チ}}$ を含む平面に垂直である。ただし，$\boxed{\text{チ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～③のうちから１つ選べ。

⓪ ABC　　① OBC　　② OAC　　③ OAB

三角形 $\boxed{\text{チ}}$ の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ツテ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$ であるから，四面体 OABC の体積は $\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$ である。

第１問

問題のページへ

[1] $3^{1+\log_{10}x}-5^y=1$ ……(∗)に対して，真数条件より $x>0$ であり，

$$5^y=3\cdot 3^{\log_{10}x}-1$$

ここで，$z=3^{\log_{10}x}$ とおくと，$5^y=3z-1>0$ であるから，$z>\dfrac{1}{3}$ であり，

$$K=\frac{5^y}{3}+3^{-\log_{10}x}=\frac{3z-1}{3}+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{z}-\frac{1}{3}$$

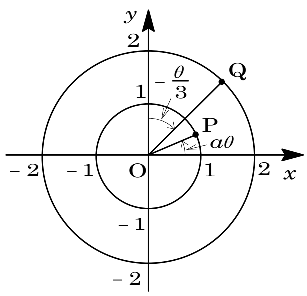
さて，相加平均・相乗平均の関係より，$z+\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{3}\geqq 2\sqrt{z\cdot\dfrac{1}{z}}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3}$

等号成立は $z=\dfrac{1}{z}$ $(z=1)$ のときであり, K は $z=1$ のとき，最小値 $\dfrac{5}{3}$ をとる。

このとき，$3^{\log_{10}x}=1$ から $x=1$，$5^y=2$ より $y=\log_5 2$ である。

[2] 条件より，$\mathrm{P}(\cos a\theta,\ \sin a\theta)$，$\mathrm{Q}\left(2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{3}\right),\ 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{3}\right)\right)$

(1) $\theta=\pi$ のとき，$\mathrm{Q}\left(2\cos\dfrac{\pi}{6},\ 2\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ より，$\mathrm{Q}(\sqrt{3},\ 1)$



(2) 3 点 O, P, Q がこの順に一直線上にある最小の $\theta\geqq 0$ の条件は,

$$a\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{3},\quad \theta=\frac{3}{6a+2}\pi$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{3}{6a+2}\pi$ のとき，$\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6a+2}\leqq\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{3}\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より, 円 C_2 において点 Q の軌跡を弧とする扇形の中心角は $\dfrac{\pi}{6a+2}$ なので, その面積は,

$$\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{6a+2}=\frac{1}{3a+1}\pi$$

(3) $$\mathrm{PQ}^2=\left\{\cos a\theta-2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{3}\right)\right\}^2+\left\{\sin a\theta-2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{3}\right)\right\}^2$$

$$=1+4-4\left\{\cos a\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{3}\right)+\sin a\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{3}\right)\right\}$$

$$=5-4\cos\left(a\theta-\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{3}\right)=5-4\sin\left(a\theta+\frac{\theta}{3}\right)=5-4\sin\frac{3a+1}{3}\theta$$

(4) $f(x)=5-4\sin\dfrac{3a+1}{3}x$ とおくと，正の周期のうち最小のものが 4π より，

$$\frac{2\pi}{\frac{3a+1}{3}}=4\pi,\quad \frac{2(3a+1)}{3}=1,\quad a=\frac{1}{6}$$

［解 説］

[2]で, 3 点 O, P, Q が一直線上にある条件は, P, Q の動きを考えて立式しています。

第２問

問題のページへ

(1)　$C_1: y=\frac{1}{8}x^2$ ……①，$C_2: y=-x^2+3ax-2a^2$ ……②に対して，その共有点は，

$$\frac{1}{8}x^2=-x^2+3ax-2a^2,\ \ 9x^2-24ax+16a^2=0$$

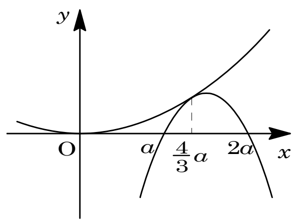
よって，$(3x-4a)^2=0$ から $x=\frac{4}{3}a$

また，$y=\frac{1}{8}\cdot\frac{16}{9}a^2=\frac{2}{9}a^2$ となるので，$\mathrm{P}\left(\frac{4}{3}a,\ \frac{2}{9}a^2\right)$である。

①より，$y'=\frac{1}{4}x$ なので, P における C_1 の接線の方程式は,

$$y-\frac{2}{9}a^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}a\left(x-\frac{4}{3}a\right),\ \ y=\frac{1}{3}ax-\frac{2}{9}a^2$$

(2)　C_1 と x 軸および直線 $x=2$ で囲まれた図形の面積は,



$$\int_0^2\frac{1}{8}x^2dx=\left[\frac{1}{24}x^3\right]_0^2=\frac{1}{3}$$

また，C_2 と x 軸の交点は，$-x^2+3ax-2a^2=0$ より，

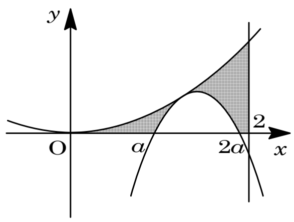
$$x=a,\ 2a$$

すると，C_2 と x 軸に囲まれた図形の面積は,

$$\int_a^{2a}-(x-a)(x-2a)\,dx=\frac{1}{6}a^3$$

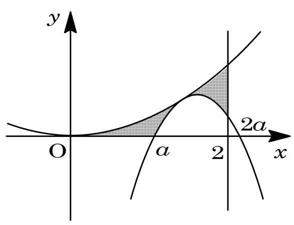
(3)　$0\leqq x\leqq 2$ の範囲で，C_1，C_2 と 2 直線 $x=0$，$x=2$ で囲まれた図形 R の中で，$y\geqq 0$ を満たす部分の面積 $S(a)$ は,

(i)　$2a\leqq 2$ $(0<a\leqq 1)$ のとき



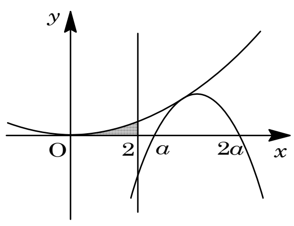
$$S(a)=\int_0^2\frac{1}{8}x^2dx-\int_a^{2a}-(x-a)(x-2a)\,dx$$
$$=-\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{3}$$

(ii)　$a\leqq 2<2a$ $(1<a\leqq 2)$ のとき



$$S(a)=\int_0^2\frac{1}{8}x^2dx-\int_a^2-(x^2+3ax-2a^2)\,dx$$
$$=\frac{1}{3}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}ax^2+2a^2x\right]_a^2$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(8-a^3)-\frac{3}{2}a(4-a^2)+2a^2(2-a)$$
$$=-\frac{5}{6}a^3+4a^2-6a+3$$

(iii) $2<a$ のとき



$$S(a)=\int_0^2\frac{1}{8}x^2dx=\frac{1}{3}$$

さて，$S(a)$ は $a>0$ において連続的に変化し，$0<a\leqq 1$ のとき(i)より単調減少, $2<a$ のとき(iii)より定数値である。

そこで, (ii)より，$1 < a \leqq 2$ において,

$$S'(a) = -\frac{5}{2}a^2 + 8a - 6$$
$$= -\frac{1}{2}(5a-6)(a-2)$$

すると，$S(a)$ の増減は右表のようになる。

a	1	$\cdots$	$\frac{6}{5}$	$\cdots$	2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$	$\frac{3}{25}$	$\nearrow$	

以上より，$S(a)$ は $a = \frac{6}{5}$ のとき最小値 $\frac{3}{25}$ をとる。

［解 説］

微積分の総合問題です。上の解では細かい部分は省いていますが，後半，計算量がかなり増加します。

第３問

問題のページへ

(1)　数列$\{a_n\}$は初項が 7，公差が-4の等差数列より，

$$a_n=7-4(n-1)=-4n+11$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2}(7-4n+11)n=-2n^2+9n$$

(2)　$b_n=pn^2-qn-r$とするとき，$b_{n+1}-2b_n=-2n^2+9n$ ……①であり，

$$b_{n+1}-2b_n=p(n+1)^2-q(n+1)-r-2(pn^2-qn-r)$$

$$=-pn^2+(2p+q)n+p-q+r$$

①より，$-pn^2+(2p+q)n+p-q+r=-2n^2+9n$となり，

$$-p=-2,\ 2p+q=9,\ p-q+r=0$$

よって，$p=2$，$q=5$，$r=3$から，$b_n=2n^2-5n-3$

すると，$b_1=2-5-3=-6$となる。

さらに，$c_1=1$，$c_{n+1}-2c_n=-2n^2+9n$ ………②

②－①より，$d_n=c_n-b_n$とおくと，$d_{n+1}-2d_n=0$となり，

$$d_n=d_1\cdot 2^{n-1}=(1+6)\cdot 2^{n-1}=7\cdot 2^{n-1}$$

よって，$c_n=d_n+b_n=7\cdot 2^{n-1}+2n^2-5n-3$となり，

$$\sum_{k=1}^{n}c_k=7\cdot\frac{2^n-1}{2-1}+2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-3n$$

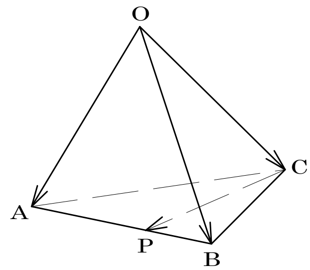
$$=7\cdot 2^n+\frac{2}{3}n^3-\frac{3}{2}n^2-\frac{31}{6}n-7$$

［解 説］

(2)では，漸化式②を解くのに，特殊解b_nを求め，これを利用して一般解c_nを求めるという誘導がついています。この方法については，このサイト内の「ピンポイントレクチャー」を参照ください。

第４問

問題のページへ



(1) $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{BC}=\sqrt{2}$，$\mathrm{OC}=\mathrm{CA}=\mathrm{AB}=\sqrt{3}$ であり，

$$|\vec{a}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{2}\,,\ |\vec{b}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{2}$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2=3$$

また，$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4-2\vec{a}\cdot\vec{b}$ から，

$$4-2\vec{a}\cdot\vec{b}=3,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$$

さらに，$|\vec{c}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}-\vec{c}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2=2$，$|\vec{c}-\vec{a}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=3$ なので，同様にすると，

$$2=2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+3,\ 3=2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+3$$

よって，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{3}{2}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=1$ である。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{a}=0$ ……①より，$(1-t)|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ となり，

$$2(1-t)+\frac{1}{2}t-1=0,\ t=\frac{2}{3}$$

これより，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-\vec{c}$ となり，P は AB を $2:1=1:\frac{1}{2}$ に内分する。

また，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{b}=\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{2}{3}|\vec{b}|^2-\vec{c}\cdot\vec{b}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot2-\frac{3}{2}=0$ ……②であり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2=\frac{1}{9}|\vec{a}|^2+\frac{4}{9}|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+\frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{4}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{5}{3}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$ である。

①②より，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ は△OAB の各辺と垂直であるから，直線 CP は△OAB を含む平面に垂直であり，また，

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{4}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

以上より，四面体 OABC の体積 V は，

$$V=\frac{1}{3}\cdot(\triangle\mathrm{OAB})\cdot|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{\sqrt{15}}{3}=\frac{5}{12}$$

［解 説］

丁寧な誘導がついています。内容は，四面体の体積を求める有名問題です。