第１問

解答解説のページへ

[1] 整式 $A=6x^2+5xy+y^2+2x-y-20$ を因数分解すると

$$A=(\boxed{\text{ア}}\,x+y+\boxed{\text{イ}})(\boxed{\text{ウ}}\,x+y-\boxed{\text{エ}})$$

となる。

$x=-1$，$y=\dfrac{2}{3-\sqrt{7}}$ のとき, A の値は $\boxed{\text{オカキ}}$ である。

[2] 実数 a に関する条件 p, q, r を次のように定める。

$p:a^2 \geqq 2a+8$　　　$q:a \leqq -2$ または $a \geqq 4$　　　$r:a \geqq 5$

(1) 次の $\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを，下の⓪〜③のうちから 1 つ選べ。

q は p であるための $\boxed{\text{ク}}$。

⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが，十分条件でない

② 十分条件であるが，必要条件でない

③ 必要条件でも十分条件でもない

(2) 条件 q の否定を $\overline{q}$，条件 r の否定を $\overline{r}$ で表す。

次の $\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，下の⓪〜③のうちから 1 つずつ選べ。

ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

命題「p ならば $\boxed{\text{ケ}}$」は真である。

命題「$\boxed{\text{コ}}$ ならば p」は真である。

⓪ q かつ $\overline{r}$

① q または $\overline{r}$

② $\overline{q}$ かつ $\overline{r}$

③ $\overline{q}$ または $\overline{r}$

第２問

解答解説のページへ

a を定数とし，x の 2 次関数 $y=2x^2-4(a+1)x+10a+1$ ……①のグラフを G とする。グラフ G の頂点の座標を a を用いて表すと

$$\left(a+\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イウ}}a^2+\boxed{\text{エ}}a-\boxed{\text{オ}}\right)$$

である。

(1)　グラフ G が x 軸と接するのは

$$a=\frac{\boxed{\text{カ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

のときである。

(2)　関数①の $-1\leqq x\leqq 3$ における最小値を m とする。

$m=\boxed{\text{イウ}}a^2+\boxed{\text{エ}}a-\boxed{\text{オ}}$ となるのは，$\boxed{\text{ケコ}}\leqq a\leqq\boxed{\text{サ}}$ のときである。

また

$a<\boxed{\text{ケコ}}$ のとき　$m=\boxed{\text{シス}}a+\boxed{\text{セ}}$

$\boxed{\text{サ}}<a$ のとき　$m=\boxed{\text{ソタ}}a+\boxed{\text{チ}}$

である。したがって，$m=\dfrac{7}{9}$ となるのは

$$a=\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}},\quad\frac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$

のときである。

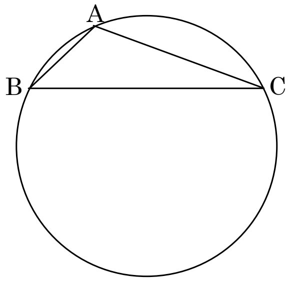
第３問

解答解説のページへ

△ABC において，$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{BC}=\sqrt{7}$，$\mathrm{AC}=2$ とし，∠CAB の二等分線と辺 BC との交点を D とする。

このとき，$\angle\mathrm{CAB}=\boxed{\text{アイウ}}^{\circ}$ であり

$$\mathrm{BD}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}},\quad \mathrm{CD}=\frac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$



である。

AD の延長と△ABC の外接円 O との交点のうち A と異なる方を E とする。このとき，∠DAB と等しい角は，次の⓪〜④のうち $\boxed{\text{ケ}}$ と $\boxed{\text{コ}}$ である。ただし，$\boxed{\text{ケ}}$ と $\boxed{\text{コ}}$ の解答の順序は問わない。

⓪ ∠DBE　① ∠ABD　② ∠DEC　③ ∠CDE　④ ∠BEC

これより，$\mathrm{BE}=\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ である。また，$\mathrm{DE}=\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

次に，△BED の外接円の中心を O′ とすると

$$\mathrm{O'B}=\frac{\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

であり

$$\tan\angle\mathrm{EBO'}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である。

第４問

解答解説のページへ

さいころを繰り返し投げ，出た目の数を加えていく。その合計が 4 以上になったところで投げることを終了する。

(1) 1の目が出たところで終了する目の出方は$\boxed{\text{ア}}$通りである。
2の目が出たところで終了する目の出方は$\boxed{\text{イ}}$通りである。
3の目が出たところで終了する目の出方は$\boxed{\text{ウ}}$通りである。
4の目が出たところで終了する目の出方は$\boxed{\text{エ}}$通りである。

(2) 投げる回数が 1 回で終了する確率は$\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$であり，2 回で終了する確率は$\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$である。終了するまでに投げる回数が最も多いのは$\boxed{\text{コ}}$回であり，投げる回数が$\boxed{\text{コ}}$回で終了する確率は$\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シスセ}}}$である。終了するまでに投げる回数の期待値は$\dfrac{\boxed{\text{ソタチ}}}{\boxed{\text{ツテト}}}$である。

第１問

問題のページへ

[1]　$A=6x^2+5xy+y^2+2x-y-20$ を因数分解すると，

$$A=6x^2+(5y+2)x+(y+4)(y-5)=(2x+y+4)(3x+y-5)$$

また，$x=-1$，$y=\dfrac{2}{3-\sqrt{7}}=3+\sqrt{7}$ のとき，

$$A=(5+\sqrt{7})(-5+\sqrt{7})=-18$$

[2]　3つの条件 $p: a^2 \geqq 2a+8$，$q: a \leqq -2$ または $a \geqq 4$，$r: a \geqq 5$ に対して，

(1)　不等式 $a^2 \geqq 2a+8$ の解は，$(a-4)(a+2) \geqq 0$ より，$a \leqq -2$ または $a \geqq 4$

よって, q は p であるための必要十分条件である。

(2)　$\overline{q}: -2<a<4$，$\overline{r}: a<5$ より，

q かつ $\overline{r}: -2 \leqq a$ または $4 \leqq a<5$

q または $\overline{r}: a$ はすべての実数

$\overline{q}$ かつ $\overline{r}: -2<a<4$

$\overline{q}$ または $\overline{r}: a<5$

よって，命題「p ならば(q または $\overline{r}$)」は真，「(q かつ $\overline{r}$)ならば p」は真である。

［解 説］

数と式についての基本問題です。[2]の命題も p と q が同値なので，煩雑ではありません。

第２問

問題のページへ

2 次関数 $y=2x^2-4(a+1)x+10a+1$ ……①に対して,

$$y=2\{x-(a+1)\}^2-2(a+1)^2+10a+1=2\{x-(a+1)\}^2-2a^2+6a-1$$

これより，頂点の座標は，$(a+1,\ -2a^2+6a-1)$ である。

(1) x 軸と接するのは，$-2a^2+6a-1=0$，$2a^2-6a+1=0$ より，

$$a=\frac{3\pm\sqrt{7}}{2}$$

(2) ①の最小値 m が，$m=-2a^2+6a-1$ となるのは，軸が $-1\leqq x\leqq 3$ にある場合より，

$$-1\leqq a+1\leqq 3,\ -2\leqq a\leqq 2$$

また, $a<-2$ のときは，$x=-1$ で最小値をとり，

$$m=2+4(a+1)+10a+1=14a+7$$

さらに, $2<a$ のときは，$x=3$ で最小値をとり，

$$m=18-12(a+1)+10a+1=-2a+7$$

以上より，$m=\dfrac{7}{9}$ となるのは, a の値で場合分けをして考えると,

(i) $-2\leqq a\leqq 2$ のとき

$-2a^2+6a-1=\dfrac{7}{9}$ より，$9a^2-27a+8=0$，$(3a-8)(3a-1)=0$ となるので,

$$a=\frac{1}{3}\quad(-2\leqq a\leqq 2)$$

(ii) $a<-2$ のとき

$14a+7=\dfrac{7}{9}$ より，$a=-\dfrac{4}{9}$ となり不適である。

(iii) $2<a$ のとき

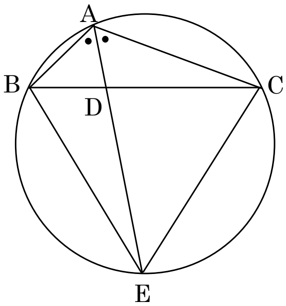
$-2a+7=\dfrac{7}{9}$ より，$a=\dfrac{28}{9}$ となり適する。

［解 説］

2 次関数の最大・最小についての定型的な問題です。軸の位置によって場合分けをします。

第３問

問題のページへ



$\triangle$ABC に余弦定理を適用すると,

$$\cos\angle CAB=\frac{1^2+2^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot1\cdot2}=-\frac{1}{2}$$

よって, $\angle CAB=120°$

また, AD は$\angle$CABの二等分線より,

$$BD:DC=AB:AC=1:2$$

よって, $BD=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$, $CD=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$

さて, $\angle DAB=\angle DAC=60°$ より,

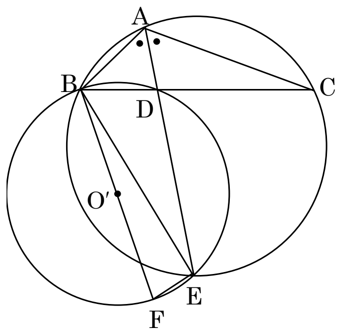
$$\angle DBE=\angle DCE=60°,\ \angle BEC=180°-120°=60°$$

これより, $\triangle$BCE は正三角形となり, $BE=BC=\sqrt{7}$

また, $\triangle$BDE に余弦定理を適用して,

$$DE^2=(\sqrt{7})^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2-2\cdot\sqrt{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}\cos60°=\frac{49}{9},\ DE=\frac{7}{3}$$

次に, $\triangle$BED の外接円の中心を O′ とすると, 正弦定理より,



$$\frac{DE}{\sin60°}=2O'B,\ O'B=\frac{\frac{7}{3}}{\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{9}$$

さらに, BO′ の延長と外接円 O' との交点を F とおくと, $\angle BEF=90°$ であり,

$$EF=\sqrt{BF^2-BE^2}=\sqrt{\frac{14^2\cdot3}{9^2}-7}=\frac{\sqrt{21}}{9}$$

よって, $\tan\angle EBO'=\dfrac{EF}{BE}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

［解 説］

DE の長さを求めるのに余弦定理を用いましたが, $\triangle$BDE と$\triangle$ADC の相似を利用する方法も考えられます。また, 予め AD の長さを面積を利用して求めておき, 方べきの定理を使うという迂遠な方法もあります。

第４問

問題のページへ

(1)　1の目が出たところで終了する目の出方は,

3+1, 1+2+1, 2+1+1, 1+1+1+1

よって, 4通りある。

2の目が出たところで終了する目の出方は,

3+2, 1+2+2, 2+1+2, 1+1+1+2, 2+2, 1+1+2

よって, 6通りある。

3の目が出たところで終了する目の出方は,

3+3, 1+2+3, 2+1+3, 1+1+1+3, 2+3, 1+1+3, 1+3

よって, 7通りある。

4の目が出たところで終了する目の出方は,

3+4, 1+2+4, 2+1+4, 1+1+1+4, 2+4, 1+1+4, 1+4, 4

よって, 8通りある。

(2)　(1)と同様に, 5の目が出たところで終了する目の出方は,

3+5, 1+2+5, 2+1+5, 1+1+1+5, 2+5, 1+1+5, 1+5, 5

また, 6の目が出たところで終了する目の出方は,

3+6, 1+2+6, 2+1+6, 1+1+1+6, 2+6, 1+1+6, 1+6, 6

さて，これらの結果から，投げる回数が 1 回で終了する確率は$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，2 回で終了する確率は$\frac{15}{6^2}=\frac{5}{12}$である。また，終了するまでに投げる回数が最も多いのは 4 回であり，その確率は$\frac{6}{6^4}=\frac{1}{216}$である。

よって，終了するまでに投げる回数の期待値は,

$$1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{5}{12}+3\times\left(1-\frac{1}{2}-\frac{5}{12}-\frac{1}{216}\right)+4\times\frac{1}{216}=\frac{343}{216}$$

［解 説］

すべての場合を列挙しておくと，ミスが少なくなるというセンター特有の問題です。