第１問

解答解説のページへ

[1]　$x \geqq 2,\ y \geqq 2,\ 8 \leqq xy \leqq 16$ のとき，$z = \log_2 \sqrt{x} + \log_2 y$ の最大値を求めよう。

$s = \log_2 x$，$t = \log_2 y$ とおくと，s，t，$s+t$ のとり得る値の範囲はそれぞれ

$$s \geqq \boxed{\text{ア}},\ t \geqq \boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}} \leqq s+t \leqq \boxed{\text{ウ}}$$

となる。また

$$z = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}s + t$$

が成り立つから, z は $s = \boxed{\text{カ}}$，$t = \boxed{\text{キ}}$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ をとる。したがって, z は $x = \boxed{\text{コ}}$，$y = \boxed{\text{サ}}$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ をとる。

[2]　$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$5\sin\theta - 3\cos 2\theta = 3$ ……(＊)を満たす θ について考えよう。

方程式(＊)を $\sin\theta$ を用いて表すと

$$\boxed{\text{シ}}\sin^2\theta + 5\sin\theta - \boxed{\text{ス}} = 0$$

となる。したがって，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より $\sin\theta = \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ であり，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲でこの等式を満たす θ のうち，小さい方を θ_1，大きい方を θ_2 とすると，

$$\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{ソ}}},\quad \cos\theta_2 = \frac{\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。

θ_1 について不等式 $\boxed{\text{ツ}}$ が成り立つ。$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから１つ選べ。

⓪　$0 < \theta_1 < \dfrac{\pi}{12}$　　①　$\dfrac{\pi}{12} < \theta_1 < \dfrac{\pi}{6}$　　②　$\dfrac{\pi}{6} < \theta_1 < \dfrac{\pi}{5}$

③　$\dfrac{\pi}{5} < \theta_1 < \dfrac{\pi}{4}$　　④　$\dfrac{\pi}{4} < \theta_1 < \dfrac{\pi}{3}$　　⑤　$\dfrac{\pi}{3} < \theta_1 < \dfrac{\pi}{2}$

ただし，必要ならば，次の値

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4},\quad \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

を用いてもよい。

さらに，不等式 $n\theta_1 > \theta_2$ を満たす自然数 n のうち最小なものは $\boxed{\text{テ}}$ である。

第２問

解答解説のページへ

放物線 $y=2x^2$ を C, 点 $(1,\ -2)$ を A とする。

点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ に関して，点 A と対称な点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，

$$u=\frac{x+\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\quad v=\frac{y-\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

が成り立つ。Q が C 上を動くときの点 P の軌跡を D とすると, D は放物線

$$y=x^2+\boxed{\text{オ}}\,x+\boxed{\text{カ}}$$

である。

2 つの放物線 C と D の交点を R と S とする。ただし, x 座標の小さい方を R とする。点 R, S の x 座標はそれぞれ $\boxed{\text{キク}}$, $\boxed{\text{ケ}}$ で，点 R, S における放物線 D の接線の方程式はそれぞれ

$$y=\boxed{\text{コ}},\quad y=\boxed{\text{サ}}\,x-\boxed{\text{シ}}$$

である。

P を放物線 D 上の点とし，P の x 座標を a とおく。P から x 軸に引いた垂線と放物線 C との交点を H とする。$\boxed{\text{キク}}<a<\boxed{\text{ケ}}$ のとき，三角形 PHR の面積 $S(a)$ は

$$S(a)=\frac{1}{\boxed{\text{ス}}}\left(\boxed{\text{セ}}\,a^3+a^2+\boxed{\text{ソ}}\,a+\boxed{\text{タ}}\right)$$

と表される。$S(a)$ は $a=\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ のとき，最大値をとる。

$a=\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ のとき，直線 HR と放物線 D の交点のうち，R と異なる点の x 座標は

$\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。このとき，$\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\leqq x\leqq\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ の範囲で，放物線 D と直線 PH

および直線 HR で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ナニヌ}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$ である。

第３問

解答解説のページへ

$\{a_n\}$を初項a_1が 1 で公比が$\dfrac{1}{3}$の等比数列とする。数列$\{a_n\}$の偶数番目の項を取り出して，数列$\{b_n\}$を$b_n = a_{2n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で定める。$T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$とおく。

(1) $\{b_n\}$も等比数列であり，その初項は$\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$，公比は$\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$である。

したがって

$$T_n = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\left(1 - \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}^{\,n}}\right)$$

である。また，積$b_1 b_2 \cdots b_n$を求めると

$$b_1 b_2 \cdots b_n = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}^{\,n^2}}$$

となる。

(2) 次に，数列$\{c_n\}$を$c_n = 2n \cdot b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で定め，$U_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$とおく。

$$\boxed{\text{サ}}\,c_{n+1} - c_n = \boxed{\text{シ}}\,b_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つから

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\boxed{\text{サ}}\,c_{k+1} - c_k\right) = \boxed{\text{シ}}\,T_n \cdots\cdots\cdots ①$$

である。またこの左辺の和をまとめ直すと，U_n，c_{n+1}，c_1を用いて

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\boxed{\text{サ}}\,c_{k+1} - c_k\right) = \boxed{\text{ス}}\,U_n + \boxed{\text{セ}}\,c_{n+1} - \boxed{\text{ソ}}\,c_1 \cdots\cdots\cdots ②$$

と表される。

①と②より

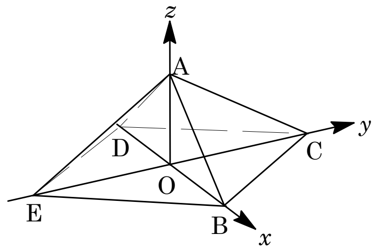
$$U_n = \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテ}}} - \frac{\boxed{\text{トナ}}\,n + \boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ツテ}}} \cdot \frac{1}{\boxed{\text{ネ}}^{\,n}}$$

となる。

第４問

解答解説のページへ

O を原点とする座標空間における 5 点を A(0, 0, 1)，B(1, 0, 0)，C(0, 2, 0)，D(−1, 0, 0)，E(0, −2, 0) とする。ひし形 BCDE を底面とする四角錐 A-BCDE と，平面 ABC に平行な平面との共通部分について考える。



(1)　$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} = \boxed{\text{ア}}$ であり，三角形 ABC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

(2)　$\vec{u} = \overrightarrow{BA}$，$\vec{v} = \overrightarrow{BE}$ とおく。$0 < a < 1$ とし，点 B_1 を線分 BE を $a : (1-a)$ に内分する点とすると，$\overrightarrow{BB_1} = \boxed{\text{エ}}\vec{v}$ である。点 A_1 を

$$\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BB_1}$$

で定め，線分 A_1B_1 と線分 AE が交わることを示そう。A_1B_1 上の点 P は，$0 \leqq b \leqq 1$ を満たす b を用いて

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + b\vec{u} + \boxed{\text{エ}}\vec{v}$$

と表される。また, AE 上の点 Q は, $0 \leqq c \leqq 1$ を満たす c を用いて

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \boxed{\text{オ}}\vec{u} + \left(\boxed{\text{カ}} - c\right)\vec{v}$$

と表される。

P と Q は $b = \boxed{\text{キ}} = \boxed{\text{クケ}} + 1$ のとき一致するから，線分 A_1B_1 と AE は, AE を $\boxed{\text{コ}} : \left(1 - \boxed{\text{コ}}\right)$ に内分する点で交わることがわかる。この点を E_1 とする。

点 C_1 を，$\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BB_1}$ で定めると，同様に考えることにより，線分 A_1C_1 と線分 AD も，AD を $\boxed{\text{サ}} : \left(1 - \boxed{\text{サ}}\right)$ に内分する点で交わることがわかる。この点を D_1 とすると

$$\overrightarrow{D_1E_1} = \boxed{\text{シ}}\overrightarrow{DE}$$

であり，三角形 $A_1B_1C_1$ は三角形 ABC と平行であるから，四角形 $B_1C_1D_1E_1$ の面積は

$$\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\left(\boxed{\text{ソ}} - \boxed{\text{タ}}^{\boxed{\text{チ}}}\right)$$

である。

また，$\left|\overrightarrow{B_1D_1}\right| = \sqrt{\boxed{\text{ツ}}\,a^2 - \boxed{\text{テ}}\,a + \boxed{\text{ト}}}$ である。

第１問

問題のページへ

[1]　$x \geqq 2,\ y \geqq 2$ より，$s = \log_2 x \geqq \log_2 2 = 1$ ……①，$t = \log_2 y \geqq 1$ ……②

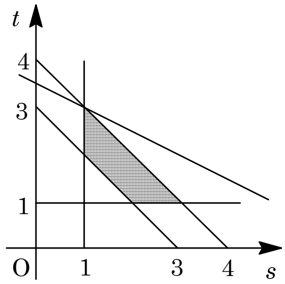
$8 \leqq xy \leqq 16$ より，$\log_2 8 \leqq \log_2 xy \leqq \log_2 16$ となり，$3 \leqq s + t \leqq 4$ ………③

$$z = \log_2 \sqrt{x} + \log_2 y = \frac{1}{2}\log_2 x + \log_2 y = \frac{1}{2}s + t \text{ ………④}$$

不等式①②③を満たす st 平面上の領域は，右図の網点部となり，④から，

$$t = -\frac{1}{2}s + z$$

すると，右図より，z は $(s,\ t) = (1,\ 3)$ のとき，最大値 $\frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$ をとる。すなわち，$x = 2^1 = 2$，$y = 2^3 = 8$ のとき，z は最大値をとる。



[2]　$5\sin\theta - 3\cos 2\theta = 3$ ……(＊)より，$5\sin\theta - 3(1 - 2\sin^2\theta) = 3$ となり，

$$6\sin^2\theta + 5\sin\theta - 6 = 0,\ (2\sin\theta + 3)(3\sin\theta - 2) = 0$$

$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より，$\sin\theta = \frac{2}{3}$ となる。

このとき，$\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ となり，$0 \leqq \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$ とすると，

$$\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{5}}{3},\ \cos\theta_2 = \frac{-\sqrt{5}}{3}$$

ここで，$\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{5}}{3} < \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ より，$\frac{\pi}{5} < \theta_1 < \frac{\pi}{4}$ である。

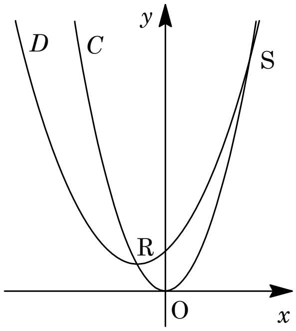
また，$\theta_2 = \pi - \theta_1$ から，$\frac{3}{4}\pi < \theta_2 < \frac{4}{5}\pi$ となるので，$n\theta_1 > \theta_2$ を満たす自然数 n のうち最小なものは，$n = 4$ である。

［解 説］

関数についての基本的な問題です。ただ，[2]の後半は，$\sin\theta = \frac{2}{3} = 0.\dot{6}$ から考えて，θ は $\frac{\pi}{4}$ より少し小さいという感覚で，まず答を予想しましたが。

第２問

問題のページへ



点$\mathrm{Q}(u,\ v)$に関し，点 $\mathrm{A}(1,\ -2)$と対称な点を$\mathrm{P}(x,\ y)$とすると，線分 AP の中点が Q より，

$$u=\frac{x+1}{2},\quad v=\frac{y-2}{2}$$

Q が放物線$C: y=2x^2$……①上を動くとき，$v=2u^2$より，

$$\frac{y-2}{2}=2\left(\frac{x+1}{2}\right)^2,\quad y=(x+1)^2+2$$

$$D: y=x^2+2x+3\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，①②を連立して，$2x^2=x^2+2x+3$

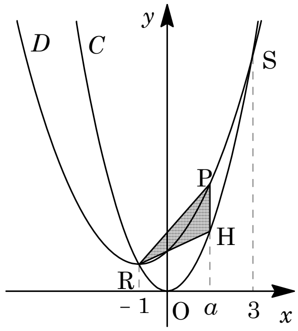
$$x^2-2x-3=0,\quad (x-3)(x+1)=0$$

よって，$x=-1,\ 3$から，放物線CとDの交点は，$\mathrm{R}(-1,\ 2)$，$\mathrm{S}(3,\ 18)$となる。

さて，②より$y'=2x+2$となり，$x=-1$のとき$y'=0$より，点 R における放物線 D の接線の方程式は，$y=2$である。

また，$x=3$のとき$y'=8$であるので，点 S における放物線Dの接線の方程式は,

$$y-18=8(x-3),\quad y=8x-6$$



$-1<a<3$のとき，$\mathrm{P}(a,\ a^2+2a+3)$，$\mathrm{H}(a,\ 2a^2)$から,

$$\mathrm{PH}=a^2+2a+3-2a^2=-a^2+2a+3$$

これより，$\triangle\mathrm{PHR}$の面積$S(a)$は,

$$S(a)=\frac{1}{2}(-a^2+2a+3)(a+1)$$

$$=\frac{1}{2}(-a^3+a^2+5a+3)$$

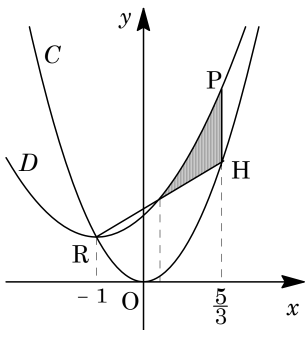
$$S'(a)=\frac{1}{2}(-3a^2+2a+5)$$

$$=-\frac{1}{2}(3a-5)(a+1)$$

a	-1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	3
$S'(a)$	0	＋	0	－	
$S(a)$		↗		↘	

よって，$S(a)$の増減は右表のようになり，$a=\frac{5}{3}$のとき，最大値をとる。

このとき，$\mathrm{H}\left(\frac{5}{3},\ \frac{50}{9}\right)$となり，直線 HR は傾きが$\dfrac{\frac{50}{9}-2}{\frac{5}{3}+1}=\frac{4}{3}$から，その方程式は,



$$y-2=\frac{4}{3}(x+1),\quad y=\frac{4}{3}(x+1)+2\ \cdots\cdots\cdots③$$

②③を連立して，$(x+1)^2+2=\frac{4}{3}(x+1)+2$

$$(x+1)\left(x+1-\frac{4}{3}\right)=0,\quad (x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)=0$$

すると，点 R と異なる交点の x 座標は，$x \neq -1$ より $x = \dfrac{1}{3}$ である。

以上より，$\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq \dfrac{5}{3}$ において，放物線 D と直線 PH および直線 HR で囲まれた図形の面積 T は，

$$T = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} \left(x^2 + 2x + 3 - \frac{4}{3}x - \frac{10}{3} \right) dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} \left(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \right) dx$$

$$= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} (x+1)\left(x - \frac{1}{3} \right) dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} \left(x - \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \right)\left(x - \frac{1}{3} \right) dx$$

$$= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} \left\{ \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{4}{3}\left(x - \frac{1}{3} \right) \right\} dx = \left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{3} \right)^3 + \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{3} \right)^2 \right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{64}{27} + \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{9} = \frac{160}{81}$$

［解 説］

軌跡と微積分の融合問題です。内容は標準的であるものの，問題の量，そしてそれに伴う計算量は半端ではありません。

第３問

問題のページへ

(1) 数列$\{a_n\}$は，初項 1，公比$\dfrac{1}{3}$の等比数列より，$a_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$となり，

$$b_n=a_{2n}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2(n-1)+1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$

よって，数列$\{b_n\}$は，初項$\dfrac{1}{3}$，公比$\dfrac{1}{9}$の等比数列であり，

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{8}\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$$

また，積$b_1b_2\cdots b_n$は，

$$b_1b_2\cdots b_n=a_2a_4\cdots a_{2n}=\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{1+3+\cdots+(2n-1)}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n^2}=\frac{1}{3^{n^2}}$$

(2) $c_n=2n\cdot b_n=2n\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2n-1}$，$c_{n+1}=2(n+1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2n+1}=\dfrac{1}{9}(2n+2)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2n-1}$より，

$$9c_{n+1}-c_n=2b_n$$

すると，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(9c_{k+1}-c_k)=2\sum_{k=1}^{n}b_k$ より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(9c_{k+1}-c_k)=2T_n$ ………①

また，$U_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c_k=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n$とおくと，

$$\sum_{k=1}^{n}(9c_{k+1}-c_k)=8(c_2+c_3+\cdots+c_n)+9c_{n+1}-c_1=8U_n+9c_{n+1}-9c_1 \quad\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$8U_n+9c_{n+1}-9c_1=2\cdot\dfrac{3}{8}\left(1-\dfrac{1}{9^n}\right)$

$$8U_n=2\cdot\frac{3}{8}\left(1-\frac{1}{9^n}\right)-9\cdot2(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}+9\cdot2\cdot\frac{1}{3}=\frac{27}{4}-\frac{24n+27}{4}\cdot\frac{1}{9^n}$$

よって，$U_n=\dfrac{27}{32}-\dfrac{24n+27}{32}\cdot\dfrac{1}{9^n}$

［解 説］

(2)は，(等差)×(等比)のタイプの数列の和を求める有名な設問ですが，誘導に逆らわずに計算を進めなくてはいけません。

第４問

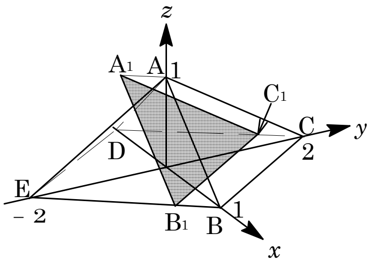
問題のページへ

(1)　$\overrightarrow{BC}=(-1,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{BA}=(-1,\ 0,\ 1)$より，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=1$となり，

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{BC}|^2|\overrightarrow{BA}|^2-(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5\times2-1^2}=\frac{3}{2}$$

(2)　$BB_1:B_1E=a:(1-a)$より，

$$\overrightarrow{BB_1}=a\overrightarrow{BE}=a\vec{v}$$



点A_1を$\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BB_1}$で定めたとき，線分$A_1B_1$上の点Pは, $0\leqq b\leqq1$として,

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+a\overrightarrow{BE}+b\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OB}+b\vec{u}+a\vec{v}$$

また, AE上の点Qは, $0\leqq c\leqq1$として,

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{BA}+(1-c)\overrightarrow{BE}$$
$$=\overrightarrow{OB}+c\vec{u}+(1-c)\vec{v}$$

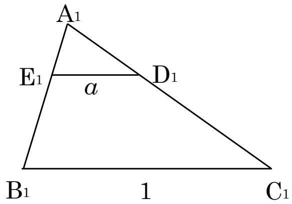
すると，$b=c$かつ$a=1-c$，すなわち$b=c=-a+1$のとき，PとQは一致する。すなわち, 線分A_1B_1とAEは, AEを$(1-c):c=a:(1-a)$に内分する点で交わり, この交点をE_1とおく。

同様に, 点C_1を$\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BB_1}$で定めたとき，線分$A_1C_1$と線分ADは，ADを$a:(1-a)$に内分する点で交わり，この交点を$D_1$とおくと,

$$\overrightarrow{D_1E_1}=a\overrightarrow{DE}$$

さらに, $\triangle A_1B_1C_1$は$\triangle ABC$を平行移動した三角形なので,

$$\overrightarrow{D_1E_1}=a\overrightarrow{CB}=a\overrightarrow{C_1B_1}$$



すると，$\triangle A_1E_1D_1$と$\triangle A_1B_1C_1$は相似になり，その相似比は$a:1$である。

よって，四角形$B_1C_1D_1E_1$の面積は, (1)より,

$$(1-a^2)\times\triangle A_1B_1C_1=\frac{3}{2}(1-a^2)$$

また，$\overrightarrow{OB_1}=(1-a)\overrightarrow{OB}+a\overrightarrow{OE}=(1-a,\ -2a,\ 0)$

$$\overrightarrow{OD_1}=(1-a)\overrightarrow{OA}+a\overrightarrow{OD}=(-a,\ 0,\ 1-a)$$

これより，$|\overrightarrow{B_1D_1}|=\sqrt{(-1)^2+(2a)^2+(1-a)^2}=\sqrt{5a^2-2a+2}$

[解 説]

問題文に図はあるものの，多量の文字が設定され，煩雑そのものです。勘に頼らず, 10分程度で完答するのは至難の業です。