第１問

解答解説のページへ

[1] $\alpha = \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ とする。α の分母を有理化すると $\alpha = \dfrac{\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ となる。

2 次方程式 $6x^2 - 7x + 1 = 0$ の解は $x = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$, $\boxed{\text{キ}}$ である。

次の⓪～③の数のうち最も小さいものは $\boxed{\text{ク}}$ である。

⓪ $\dfrac{\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$　　① $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}$

② $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$　　③ $\boxed{\text{キ}}$

[2] 次の $\boxed{\text{ケ}}$ ～ $\boxed{\text{サ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。また，$\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを下の④～⑦のうちから 1 つ選べ。

自然数 n に関する条件 p, q, r, s を次のように定める。

$p : n$ は 5 で割ると 1 余る数である　　$q : n$ は 10 で割ると 1 余る数である

$r : n$ は奇数である　　$s : n$ は 2 より大きい素数である

また，条件 r の否定を $\overline{r}$，条件 s の否定を $\overline{s}$ で表す。このとき

「p かつ r」は q であるための $\boxed{\text{ケ}}$。　　$\overline{r}$ は $\overline{s}$ であるための $\boxed{\text{コ}}$。

「p かつ s」は「q かつ s」であるための $\boxed{\text{サ}}$。

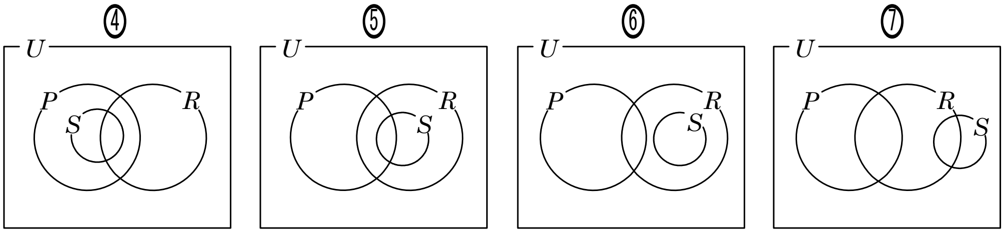
⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが，十分条件でない

② 十分条件であるが，必要条件でない

③ 必要条件でも十分条件でもない

自然数全体の集合を全体集合 U とし，条件 p を満たす自然数全体の集合を P，条件 r を満たす自然数全体の集合を R，条件 s を満たす自然数全体の集合を S とすると，P, R, S の関係を表す図は $\boxed{\text{シ}}$ である。



第２問

解答解説のページへ

a, b を実数とし, x の 2 つの 2 次関数

$$y = 3x^2 - 2x - 1 \cdots\cdots\cdots ①,\quad y = x^2 + 2ax + b \cdots\cdots\cdots ②$$

のグラフをそれぞれ G_1，G_2 とする。以下では，G_2 の頂点は G_1 上にあるとする。

このとき，$b = \boxed{\text{ア}}a^2 + \boxed{\text{イ}}a - \boxed{\text{ウ}}$ であり，G_2 の頂点の座標を a を用いて表すと，$\left(-a,\ \boxed{\text{エ}}a^2 + 2a - \boxed{\text{オ}}\right)$ となる。

(1)　G_2 の頂点の y 座標は，$a = \dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のとき，最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ をとる。

$a = \dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のとき，G_2 の軸は $x = \dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ であり，G_2 と x 軸との交点の x 座標は，$\dfrac{\boxed{\text{セ}} \pm \boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$ である。

(2)　G_2 が点 $(0,\ 5)$ を通るとき，$a = \boxed{\text{ツ}},\ \dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

$a = \boxed{\text{ツ}}$ のとき，G_2 を x 軸方向に $\boxed{\text{ニ}}$，y 軸方向にも同じく $\boxed{\text{ニ}}$ だけ平行移動しても頂点は G_1 上にある。ただし，$\boxed{\text{ニ}}$ は 0 ではない数とする。

第３問

解答解説のページへ

△ABC を AB = 3，BC = 4，CA = 5 である直角三角形とする。

(1) △ABC の内接円の中心を O とし，円 O が 3 辺 BC, CA, AB と接する点をそれぞれ P, Q, R とする。このとき，OP = OR = $\boxed{\text{ア}}$ である。また，

$$\mathrm{QR} = \frac{\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$ であり，$$\sin\angle\mathrm{QPR} = \frac{\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$$ である。

(2) 円 O と線分 AP との交点のうち P と異なる方を S とする。このとき，

$$\mathrm{AP} = \sqrt{\boxed{\text{クケ}}}$$ であり，$$\mathrm{SP} = \frac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サシ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$$ である。また，点 S から辺 BC へ垂線を下ろし，垂線と BC との交点を H とする。このとき

$$\mathrm{HP} = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}},\quad \mathrm{SH} = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である。したがって，$$\tan\angle\mathrm{BCS} = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$$ である。

(3) 円 O 上に点 T を線分 RT が円 O の直径となるようにとる。このとき，

$$\tan\angle\mathrm{BCT} = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$ である。よって，$\angle\mathrm{RSC} = \boxed{\text{ニヌ}}^\circ$ であり，

$\angle\mathrm{PSC} = \boxed{\text{ネノ}}^\circ$ である。

第４問

解答解説のページへ

袋の中に赤玉 5 個，白玉 5 個，黒玉 1 個の合計 11 個の玉が入っている。赤玉と白玉にはそれぞれ 1 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれており，黒玉には何も書かれていない。なお，同じ色の玉には同じ数字は書かれていない。この袋から同時に 5 個の玉を取り出す。

5 個の玉の取り出し方は$\boxed{\text{アイウ}}$通りである。

取り出した 5 個の中に同じ数字の赤玉と白玉の組が 2 組あれば得点は 2 点，1 組だけあれば得点は 1 点, 1 組もなければ得点は 0 点とする。

(1) 得点が 0 点となる取り出し方のうち，黒玉が含まれているのは$\boxed{\text{エオ}}$通りであり，黒玉が含まれていないのは$\boxed{\text{カキ}}$通りである。

得点が 1 点となる取り出し方のうち，黒玉が含まれているのは$\boxed{\text{クケコ}}$通りであり，黒玉が含まれていないのは$\boxed{\text{サシス}}$通りである。

(2) 得点が 1 点である確率は$\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$であり, 2 点である確率は$\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$である。

また，得点の期待値は$\dfrac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$である。

第１問

問題のページへ

[1]　α の分母を有理化すると，$\alpha=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2}{7-3}=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}$ となる。

　また，$6x^2-7x+1=0$ の解は，$(6x-1)(x-1)=0$ より，$x=\dfrac{1}{6}$，1

　ここで，$0<\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}<\dfrac{5-\sqrt{16}}{2}<1$ より，$0<\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}<1<\dfrac{2}{5-\sqrt{21}}$

　さらに，$\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{14-3\sqrt{21}}{6}=\dfrac{14^4-3^2\times 21}{6(14+3\sqrt{21})}>0$ となり，

$$\frac{1}{6}<\frac{5-\sqrt{21}}{2}<1<\frac{2}{5-\sqrt{21}}$$

[2]　k, l, m を 0 以上の整数とすると，

$$p:n=5k+1,\ q:n=10l+1,\ r:n=2m+1$$

　さて，「p かつ r」: $n=5k+1=2m+1$ から，$5k=2m$ となり，k は偶数となる。

　よって，「p かつ r」は q であるための必要十分条件である。

　また，2 より大きい素数はすべて奇数であることより，s は r であるための十分条件であるが，必要条件でない。

　対偶をとると，$\overline{r}$ は $\overline{s}$ であるための十分条件であるが，必要条件でない。

　ここで，$s\Leftrightarrow$「r かつ s」であり，「p かつ r」$\Leftrightarrow q$ より「p かつ r かつ s」$\Leftrightarrow$「q かつ s」となるので，

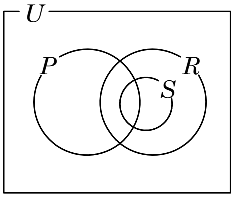
　　「p かつ s」$\Leftrightarrow$「p かつ r かつ s」$\Leftrightarrow$「q かつ s」

　よって，「p かつ s」は「q かつ s」であるための必要十分条件である。

　条件 p を満たす自然数全体の集合を P，条件 r を満たす自然数全体の集合を R，条件 s を満たす自然数全体の集合を S とすると，

$$S\subset R \text{ かつ } P\cap S\neq\phi$$

　これより，P, R, S の関係は，右図で表される。



［解 説］

　答だけを求めるならば，[1]では $\sqrt{21}\fallingdotseq 4.6$ として計算し，[2]では具体的に羅列した方が早いのは確かです。

第２問

問題のページへ

G_1 : $y=3x^2-2x-1$，G_2 $y=x^2+2ax+b=(x+a)^2-a^2+b$ に対して，G_2 の頂点 $(-a,\ -a^2+b)$ は G_1 上にあることより，

$$-a^2+b=3a^2+2a-1,\ b=4a^2+2a-1$$

これより，G_2 の頂点の座標は，$(-a,\ 3a^2+2a-1)$ となる。

(1) G_2 の頂点の y 座標は，$y=3a^2+2a-1=3\left(a+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{3}$

すると，$a=-\frac{1}{3}$ のとき最小値 $-\frac{4}{3}$ をとり，このとき，G_2 : $y=\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{3}$

G_2 の軸は $x=\frac{1}{3}$ となり，G_2 と x 軸との交点の x 座標は，$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{3}=0$ より，

$$x-\frac{1}{3}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}},\ x=\frac{1\pm2\sqrt{3}}{3}$$

(2) G_2 が点 $(0,\ 5)$ を通るとき，$b=5$ から，$4a^2+2a-1=5$ となり，

$$2a^2+a-3=0,\ (2a+3)(a-1)=0,\ a=1,\ -\frac{3}{2}$$

$a=1$ のとき，G_2 の頂点 $(-1,\ 4)$ となる。

これを x 軸方向に k, y 軸方向に k だけ平行移動したときの頂点 $(-1+k,\ 4+k)$ が，G_1 上にあることから，

$$4+k=3(-1+k)^2-2(-1+k)-1,\ 3k^2-9k=0$$

$k\neq0$ から，$k=3$ となる。

［解 説］

2 次関数の基本問題です。場合分けも必要ありません。

第３問

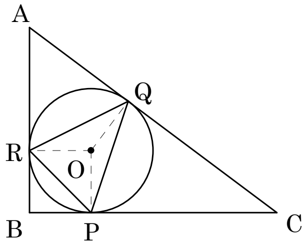
問題のページへ

(1) $\mathrm{OP}=\mathrm{OR}=r$ とおくと，$\mathrm{BP}=\mathrm{BR}=r$ となり，

$$\mathrm{AR}=\mathrm{AQ}=3-r,\ \mathrm{CP}=\mathrm{CQ}=5-r$$

よって，$(3-r)+(4-r)=5$ から，$r=1$

すると，$\mathrm{AR}=\mathrm{AQ}=2$，$\cos A=\dfrac{3}{5}$ となり，$\triangle\mathrm{ARQ}$ に余弦定理を適用すると，



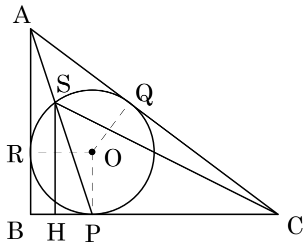
$$\mathrm{QR}^2=2^2+2^2-2\cdot2\cdot2\cdot\frac{3}{5}=\frac{16}{5},\ \mathrm{QR}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

また，$\triangle\mathrm{PQR}$ に正弦定理を適用すると，

$$\frac{\mathrm{QR}}{\sin\angle\mathrm{QPR}}=2r,\ \sin\angle\mathrm{QPR}=\frac{\mathrm{QR}}{2r}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(2) $\mathrm{AP}=\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BP}^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

ここで，方べきの定理より，$\mathrm{AR}^2=\mathrm{AS}\cdot\mathrm{AP}$ となり，



$$\mathrm{AS}=\frac{\mathrm{AR}^2}{\mathrm{AP}}=\frac{2^2}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$$\mathrm{SP}=\mathrm{AP}-\mathrm{AS}=\sqrt{10}-\frac{2\sqrt{10}}{5}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$$

また, $\mathrm{SH}\,/\!/\,\mathrm{AB}$, $\mathrm{PS}:\mathrm{PA}=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}:\sqrt{10}=3:5$ より，

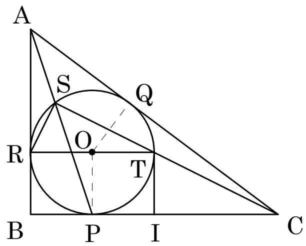
$$\mathrm{HP}:\mathrm{BP}=\mathrm{SH}:\mathrm{AB}=3:5$$

よって，$\mathrm{HP}=\dfrac{3}{5}\mathrm{BP}=\dfrac{3}{5}$，$\mathrm{SH}=\dfrac{3}{5}\mathrm{AB}=\dfrac{9}{5}$，$\tan\angle\mathrm{BCS}=\dfrac{\mathrm{SH}}{\mathrm{CH}}=\dfrac{\mathrm{SH}}{\mathrm{CP}+\mathrm{HP}}=\dfrac{1}{2}$

(3) T から BC に垂線 TI を下ろすと，

$$\tan\angle\mathrm{BCT}=\frac{\mathrm{TI}}{\mathrm{CI}}=\frac{1}{2}$$

すると，$\tan\angle\mathrm{BCS}=\tan\angle\mathrm{BCT}$ となり，3 点 C, T, S は同一直線上にある。



ここで, RT は円 O の直径なので，$\angle\mathrm{RSC}=90^\circ$

また，$\angle\mathrm{POT}=90^\circ$ より，$\angle\mathrm{PSC}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{POT}=45^\circ$

［解 説］

三角比と平面図形を融合した本格的な問題です。ただ，最初の r の値を求める上記の方法は有名ですが，問題文のマークの形式を見ると，$r=1$ であるのは明らかです。

第４問

問題のページへ

赤玉 5 個, 白玉 5 個, 黒玉 1 個の合計 11 個の玉から, 5 個の玉の取り出し方は,

$${}_{11}C_5=\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=462 \text{（通り）}$$

(1) 得点が 0 点となる取り出し方について, 黒玉が含まれている場合は, 異なる数字の選び方が ${}_5C_4$ 通り, 赤玉・白玉の対応の仕方が 2^4 通りより,

$${}_5C_4\times2^4=80 \text{（通り）}$$

また, 黒玉が含まれていない場合は, 異なる数字の選び方が 1 通り, 赤玉・白玉の対応の仕方が 2^5 通りより,

$$1\times2^5=32 \text{（通り）}$$

次に, 得点が 1 点となる取り出し方について, 黒玉が含まれている場合は, 1 組の同じ数字の選び方が ${}_5C_1$ 通り, 異なる数字の選び方が ${}_4C_2$ 通り, 赤玉・白玉の対応の仕方が 2^2 通りより,

$${}_5C_1\times{}_4C_2\times2^2=120 \text{（通り）}$$

また, 黒玉が含まれていない場合は, 1 組の同じ数字の選び方が ${}_5C_1$ 通り, 異なる数字の選び方が ${}_4C_3$ 通り, 赤玉・白玉の対応の仕方が 2^3 通りより,

$${}_5C_1\times{}_4C_3\times2^3=160 \text{（通り）}$$

(2) (1)より, 得点が 0 点である確率は, $\frac{80+32}{462}=\frac{8}{33}$

また, 得点が 1 点である確率は, $\frac{120+160}{462}=\frac{20}{33}$

すると, 得点が 2 点である確率は, $1-\left(\frac{8}{33}+\frac{20}{33}\right)=\frac{5}{33}$

したがって, 得点の期待値は,

$$0\times\frac{8}{33}+1\times\frac{20}{33}+2\times\frac{5}{33}=\frac{10}{11}$$

［解 説］

確率と期待値に関する基本問題です。図を書いて具体的に考える方がミスが少ないでしょう。