第１問

解答解説のページへ

[1] 連立方程式(＊)

$$xy=128 \cdots\cdots\text{①},\quad \frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_2 y}=\frac{7}{12}\cdots\cdots\text{②}$$

を満たす正の実数 x, y を求めよう。ただし，$x\neq 1$，$y\neq 1$ とする。

①の両辺を 2 を底とする対数をとると，$\log_2 x+\log_2 y=\boxed{\text{ア}}$ が成り立つ。これと②より，$(\log_2 x)(\log_2 y)=\boxed{\text{イウ}}$ である。

したがって，$\log_2 x$，$\log_2 y$ は 2 次方程式 $t^2-\boxed{\text{エ}}\,t+\boxed{\text{オカ}}=0\cdots\cdots$③の解である。③の解は $t=\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ である。ただし，$\boxed{\text{キ}}$ と $\boxed{\text{ク}}$ は解答の順序を問わない。よって，連立方程式(＊)の解は $(x,\ y)=\left(\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コサ}}\right)$ または $(x,\ y)=\left(\boxed{\text{コサ}},\ \boxed{\text{ケ}}\right)$ である。

[2] $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，$\sin 4\theta=\cos\theta\cdots\cdots$①を満たす θ と $\sin\theta$ の値を求めよう。

一般に，すべての x について，$\cos x=\sin\left(\boxed{\text{シ}}-x\right)$ である。$\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから 1 つ選べ。

⓪ π　　　① $\dfrac{\pi}{2}$　　　② $-\dfrac{\pi}{2}$

したがって，①が成り立つとき，$\sin 4\theta=\sin\left(\boxed{\text{シ}}-\theta\right)$ となり，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で 4θ，$\boxed{\text{シ}}-\theta$ のとりうる値の範囲を考えれば，$4\theta=\boxed{\text{シ}}-\theta$ または $4\theta=\pi-\left(\boxed{\text{シ}}-\theta\right)$ となる。よって，①を満たす θ は $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ス}}}$ または $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セソ}}}$ である。

$$\sin\frac{\pi}{\boxed{\text{ス}}}=\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$$ である。$\sin\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セソ}}}$ の値を求めよう。

①より，$\boxed{\text{ツ}}\sin 2\theta\cos 2\theta=\cos\theta$ となり，この式の左辺を 2 倍角の公式を用いて変形すれば，$\left(\boxed{\text{テ}}\sin\theta-\boxed{\text{ト}}\sin^3\theta\right)\cos\theta=\cos\theta$ となる。ここで $\cos\theta>0$ であるから，$\boxed{\text{ト}}\sin^3\theta-\boxed{\text{テ}}\sin\theta+1=0\cdots\cdots$②が成り立つ。

$\sin\theta=\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ は②を満たしている。$\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セソ}}}$ とすると，$\sin\theta\neq\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ であるから，$\boxed{\text{ナ}}\sin^2\theta+\boxed{\text{ニ}}\sin\theta-1=0$ となる。ここで，$\sin\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セソ}}}>0$ より，

$$\sin\frac{\pi}{\boxed{\text{セソ}}}=\frac{\boxed{\text{ヌネ}}+\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$$ である。

第２問

解答解説のページへ

k を実数とし，座標平面上に点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$ をとる。曲線

$$y=-x^3+9x^2+kx$$

を C とする。

(1) 点 $\mathrm{Q}(t,\ -t^3+9t^2+kt)$ における曲線 C の接線が点 P を通るとすると

$$-\boxed{\text{ア}}\,t^3+\boxed{\text{イウ}}\,t^2-\boxed{\text{エオ}}\,t=k$$

が成り立つ。

$$p(t)=-\boxed{\text{ア}}\,t^3+\boxed{\text{イウ}}\,t^2-\boxed{\text{エオ}}\,t$$

とおくと，関数 $p(t)$ は $t=\boxed{\text{カ}}$ で極小値 $\boxed{\text{キク}}$ をとり，$t=\boxed{\text{ケ}}$ で極大値 $\boxed{\text{コ}}$ をとる。

したがって，点 P を通る曲線 C の接線の本数がちょうど 2 本になるのは，k の値が $\boxed{\text{サ}}$ または $\boxed{\text{シス}}$ のときである。また，点 P を通る曲線 C の接線の本数は $k=5$ のとき $\boxed{\text{セ}}$ 本，$k=-2$ のとき $\boxed{\text{ソ}}$ 本，$k=-12$ のとき $\boxed{\text{タ}}$ 本となる。

(2) $k=0$ とする。曲線

$$y=-x^3+6x^2+7x$$

を D とする。曲線 C と D の交点の x 座標は $\boxed{\text{チ}}$ と $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

$-1\leqq x\leqq 2$ の範囲において，2 曲線 C, D および 2 直線 $x=-1$，$x=2$ で囲まれた 2 つの図形の面積の和は $\dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

第３問

解答解説のページへ

自然数の列 1, 2, 3, 4, …を, 次のように群に分ける。

$$1 \;|\; 2, 3, 4, 5 \;|\; 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \;|\cdots$$

第１群　第２群　　　第３群

ここで, 一般に第 n 群は$(3n-2)$個の項からなるものとする。第 n 群の最後の項を a_n で表す。

(1)　$a_1=1$，$a_2=5$，$a_3=12$，$a_4=\boxed{\text{アイ}}$である。

$$a_n-a_{n-1}=\boxed{\text{ウ}}\,n-\boxed{\text{エ}}\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

が成り立ち

$$a_n=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}n^{\boxed{\text{キ}}}-\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である。

よって, 600 は, 第$\boxed{\text{コサ}}$群の小さい方から$\boxed{\text{シス}}$番目の項である。

(2)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対し, 第$(n+1)$群の小さい方から $2n$ 番目の項をb_n で表すと

$$b_n=\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}n^{\boxed{\text{タ}}}+\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}n$$

であり,

$$\frac{1}{b_n}=\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+\boxed{\text{ナ}}}\right)$$

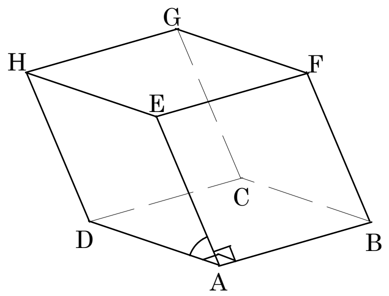
が成り立つ。これより

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=\frac{\boxed{\text{ニ}}\,n}{\boxed{\text{ヌ}}\,n+\boxed{\text{ネ}}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となる。

第４問

解答解説のページへ



2 つずつ平行な 3 組の平面で囲まれた立体を平行六面体という。辺の長さがすべて 1 の平行六面体 ABCD-EFGH があり，$\angle\mathrm{EAB}=\angle\mathrm{DAB}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{EAD}=\dfrac{\pi}{3}$ である。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{q}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{r}$ とおく。

$0<a<1,\ 0<b<1$ とする。辺 AB を $a:(1-a)$ の比に内分する点を X, 辺 BF を $b:(1-b)$ の比に内分する点を Y とする。点 X を通り直線 AH に平行な直線と辺 GH との交点を Z とする。三角形 XYZ を含む平面を α とする。

(1) $\vec{p}\cdot\vec{q}=\vec{p}\cdot\vec{r}=\boxed{\text{ア}}$，$\vec{q}\cdot\vec{r}=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{XY}}$ は, a, b, $\vec{p}$，$\vec{r}$ を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{XY}}=\left(1-\boxed{\text{エ}}\right)\vec{p}+\boxed{\text{オ}}\vec{r}$ と表される。

$\overrightarrow{\mathrm{EC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{XZ}}=\boxed{\text{カ}}$ である。

(2) 直線 EC と平面 α が垂直に交わるとし，交点を K とする。$\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ が三角形 XYZ の 2 辺と垂直であることから，$\boxed{\text{キ}}\,a+b=\boxed{\text{ク}}$ が成り立つ。

以下では，$b=\dfrac{1}{2}$ とする。このとき $a=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。$\overrightarrow{\mathrm{EK}}$ を実数 c を用いて $\overrightarrow{\mathrm{EK}}=c\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ と表すと，$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+c\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ である。一方，点 K は平面 α 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ は実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\overrightarrow{\mathrm{AX}}+s\overrightarrow{\mathrm{XY}}+t\overrightarrow{\mathrm{XZ}}=\left(\frac{1}{\boxed{\text{サ}}}s+\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\right)\vec{p}+t\vec{q}+\left(\frac{1}{\boxed{\text{シ}}}s+t\right)\vec{r}$$

と表される。これらより，$c=\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。よって，点 E と平面 α との距離 $|\overrightarrow{\mathrm{EK}}|$ は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$ となる。

第１問

問題のページへ

[1] 連立方程式 $xy=128$ ……①，$\dfrac{1}{\log_2 x}+\dfrac{1}{\log_2 y}=\dfrac{7}{12}$ ……②に対して，

①より，$\log_2 xy=\log_2 2^7$，$\log_2 x+\log_2 y=7$ ………③

②より，$\log_2 x+\log_2 y=\dfrac{7}{12}(\log_2 x)(\log_2 y)$ となり，③を代入すると，

$(\log_2 x)(\log_2 y)=12$ ………④

③④より，$\log_2 x$，$\log_2 y$ は２次方程式 $t^2-7t+12=0$ の解となり，$t=3,\ 4$

よって，$(x,\ y)=(2^3,\ 2^4)=(8,\ 16)$ または $(x,\ y)=(2^4,\ 2^3)=(16,\ 8)$

[2] 一般に，$\cos x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ から，$\sin 4\theta=\cos\theta$ ……①に対して，

$\sin 4\theta=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$ ………①′

ここで，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から，$0<4\theta<2\pi$，$0<\dfrac{\pi}{2}-\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である。

よって，①′より，$4\theta=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ または $4\theta=\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$ となり，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{10}$

さて，$\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$ であり，①より，$2\sin 2\theta\cos 2\theta=\cos\theta$

$4\sin\theta\cos\theta(1-2\sin^2\theta)=\cos\theta$，$(4\sin\theta-8\sin^3\theta)\cos\theta=\cos\theta$

$\cos\theta>0$ から，$8\sin^3\theta-4\sin\theta+1=0$ ……②となり，

$(2\sin\theta-1)(4\sin^2\theta+2\sin\theta-1)=0$

$\theta=\dfrac{\pi}{10}$ のとき，$\sin\theta\neq\dfrac{1}{2}$ より，$4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0$

すると，$\sin\theta>0$ から，$\sin\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

［解 説］

[2]は，$\sin\dfrac{\pi}{10}$ の値を求めるために，非常に細かく誘導がついた問題です。そのため，かなりのボリュームがあり，解答欄の太字と細字に注意しながら粘り強く解き進める必要があります。

第２問

問題のページへ

(1)　$C: y=-x^3+9x^2+kx$ に対して，$y'=-3x^2+18x+k$

点 $\mathrm{Q}(t,\ -t^3+9t^2+kt)$ における接線の方程式は,

$$y-(-t^3+9t^2+kt)=(-3t^2+18t+k)(x-t)$$

$$y=(-3t^2+18t+k)x+2t^3-9t^2$$

点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$ を通ることより，$0=(-3t^2+18t+k)+2t^3-9t^2$

$$-2t^3+12t^2-18t=k \cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$p(t)=-2t^3+12t^2-18t$ とおくと,

$$p'(t)=-6t^2+24t-18$$

$$=-6(t-1)(t-3)$$

t	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$p'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$p(t)$	↘	-8	↗	0	↘

右表より，$p(t)$ は $t=1$ で極小値 -8 をとり，$t=3$ で極大値 0 をとる。

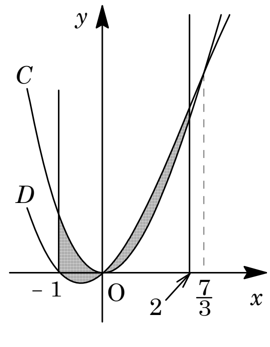
すると，点 P を通る曲線 C の接線の本数は，(*)の異なる実数解の個数に一致することから，接線の本数が 2 本になるのは，$k=0$ または $k=-8$ のときである。

また，$k=5$ のときは 1 本，$k=-2$ のときは 3 本，$k=-12$ のときは 1 本となる。

(2)　$k=0$ のとき $C: y=-x^3+9x^2$，$D: y=-x^3+6x^2+7x$ の交点は,

$$-x^3+9x^2=-x^3+6x^2+7x,\ 3x^2-7x=0$$

よって，$x=0,\ \dfrac{7}{3}$ である。



すると，2 曲線 C, D および 2 直線 $x=-1$，$x=2$ で囲まれた 2 つの図形の面積の和 S は,

$$S=\int_{-1}^{0}(3x^2-7x)\,dx+\int_{0}^{2}-(3x^2-7x)\,dx$$

$$=\left[x^3-\frac{7}{2}x^2\right]_{-1}^{0}-\left[x^3-\frac{7}{2}x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=\frac{9}{2}+6=\frac{21}{2}$$

［解　説］

微積分の基本問題です。ただ，(1)の末尾の設問は，単に解答量を増やすためだけとしか思えません。

第３問

問題のページへ

(1)　第 4 群の最後の項 a_4 は，$a_4 = 1+4+7+10 = 22$

ここで，$a_n - a_{n-1}$ は第 n 群の項数より，$a_n - a_{n-1} = 3n-2$ となり，$n \geqq 2$ で，

$$a_n = 1+4+7+\cdots+(3n-2) = \frac{1+(3n-2)}{2}\cdot n = \frac{1}{2}n(3n-1) = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$$

なお，$a_1 = 1$ より，$n=1$ のときも成り立つ。

また, 600 が第 n 群に属するとすると,

$$\frac{1}{2}(n-1)(3n-4) < 600 \leqq \frac{1}{2}n(3n-1)\text{，}(n-1)(3n-4) < 1200 \leqq n(3n-1)$$

ここで，$20\times 59 = 1180$，$21\times 62 = 1302$ より，$n = 21$

すると，第 20 群の最後の項は $\frac{1}{2}\times 20\times 59 = 590$ より，600 は，$600-590 = 10$ 番目の項となる。

(2)　第 $(n+1)$ 群の $2n$ 番目の項 b_n は，$b_n = a_n + 2n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n = \frac{3}{2}n(n+1)$ より，

$$\frac{1}{b_n} = \frac{2}{3n(n+1)} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

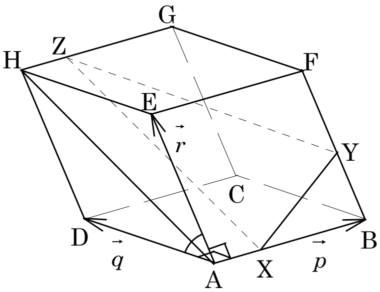
よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{2n}{3n+3}$

［解　説］

1999 年，2003 年に引き続き，群数列が出題されました。本年の題材は，自然数の列なので，考えやすいものです。

第４問

問題のページへ



(1)　AB = AD = AE = 1 から,

$$|\vec{p}| = |\vec{q}| = |\vec{r}| = 1 \cdots\cdots\cdots ①$$

$$\vec{p}\cdot\vec{q} = \vec{p}\cdot\vec{r} = 1\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 0 \cdots\cdots\cdots ②$$

$$\vec{q}\cdot\vec{r} = 1\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdots\cdots\cdots ③$$

また, $\overrightarrow{\mathrm{XY}} = (\vec{p} + b\vec{r}) - a\vec{p} = (1-a)\vec{p} + b\vec{r}$

さらに, ①②より,

$$\overrightarrow{\mathrm{EC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{XZ}} = (\vec{p} + \vec{q} - \vec{r})\cdot(\vec{q} + \vec{r}) = |\vec{q}|^2 - |\vec{r}|^2 = 0$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{EC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{XZ}} = 0$ なので, 直線 EC と△XYZ を含む平面 α が垂直に交わる条件は,

$$\overrightarrow{\mathrm{EC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{XY}} = (\vec{p} + \vec{q} - \vec{r})\cdot((1-a)\vec{p} + b\vec{r}) = 0$$

①②③より, $(1-a) + \frac{1}{2}b - b = 0$, $2a + b = 2 \cdots\cdots\cdots ④$

さて, $b = \frac{1}{2}$ のとき, ④より $a = \frac{3}{4}$ である。

ここで, 直線 EC と平面 α の交点 K とおくと, $\overrightarrow{\mathrm{EK}} = c\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ から,

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} + c\overrightarrow{\mathrm{EC}} = \vec{r} + c(\vec{p} + \vec{q} - \vec{r}) = c\vec{p} + c\vec{q} + (1-c)\vec{r} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

また, 点 K は平面 α 上にあるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \overrightarrow{\mathrm{AX}} + s\overrightarrow{\mathrm{XY}} + t\overrightarrow{\mathrm{XZ}} = \frac{3}{4}\vec{p} + s\left(\frac{1}{4}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{r}\right) + t(\vec{q} + \vec{r})$$

$$= \left(\frac{1}{4}s + \frac{3}{4}\right)\vec{p} + t\vec{q} + \left(\frac{1}{2}s + t\right)\vec{r} \cdots\cdots\cdots ⑥$$

$\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ は 1 次独立なので, ⑤⑥より,

$$c = \frac{1}{4}s + \frac{3}{4} \cdots\cdots\cdots ⑦,\ \ c = t \cdots\cdots\cdots ⑧,\ \ 1 - c = \frac{1}{2}s + t \cdots\cdots\cdots ⑨$$

⑦より $s = 4c - 3$ となり, ⑧と合わせて⑨に代入すると,

$$2 - 2c = 4c - 3 + 2c,\ \ c = \frac{5}{8}$$

このとき, $\overrightarrow{\mathrm{EK}} = \frac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{EC}} = \frac{5}{8}(\vec{p} + \vec{q} - \vec{r})$ となり, ①②③より,

$$|\vec{p} + \vec{q} - \vec{r}|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 - 2\cdot\frac{1}{2} = 2$$

よって, $|\overrightarrow{\mathrm{EK}}| = \frac{5}{8}|\vec{p} + \vec{q} - \vec{r}| = \frac{5}{8}\sqrt{2}$ となる。

［解 説］

内容は基本事項の組合せとなっています。ただ, 参考図が問題文に描かれているものの, 分量がかなりあり, 時間的に厳しい問題です。