第１問

解答解説のページへ

[1]　$a=3+2\sqrt{2}$，$b=2+\sqrt{3}$ とすると

$$\frac{1}{a}=\boxed{\text{ア}}-\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}\,,\quad \frac{1}{b}=\boxed{\text{エ}}-\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

$$\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}-\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。このとき，不等式 $|2abx-a^2|<b^2$ を満たす x の値の範囲は,

$$\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}-\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}<x<\boxed{\text{セ}}-\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}$$

となる。

[2]　実数 a, b に関する条件 p, q を次のように定める。

$p:(a+b)^2+(a-2b)^2<5$

$q:|a+b|<1$ または $|a-2b|<2$

(1)　次の⓪～③のうち，命題「$q \Longrightarrow p$」に対する反例になっているのは $\boxed{\text{チ}}$ である。

⓪　$a=0$，$b=0$　　①　$a=1$，$b=0$

②　$a=0$，$b=1$　　③　$a=1$，$b=1$

(2)　命題「$p \Longrightarrow q$」の対偶は「$\boxed{\text{ツ}} \Longrightarrow \boxed{\text{テ}}$」である。

$\boxed{\text{ツ}}$, $\boxed{\text{テ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから１つずつ選べ。

⓪　$|a+b|<1$ かつ $|a-2b|<2$　　①　$(a+b)^2+(a-2b)^2<5$

②　$|a+b|<1$ または $|a-2b|<2$　　③　$(a+b)^2+(a-2b)^2\leqq 5$

④　$|a+b|\geqq 1$ かつ $|a-2b|\geqq 2$　　⑤　$(a+b)^2+(a-2b)^2>5$

⑥　$|a+b|\geqq 1$ または $|a-2b|\geqq 2$　　⑦　$(a+b)^2+(a-2b)^2\geqq 5$

(3)　p は q であるための $\boxed{\text{ト}}$。

$\boxed{\text{ト}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから１つ選べ。

⓪　必要十分条件である

①　必要条件であるが，十分条件ではない

②　十分条件であるが，必要条件ではない

③　必要条件でも十分条件でもない

第２問

解答解説のページへ

a, b, c を定数とし，$a \neq 0$，$b \neq 0$ とする。x の 2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c \cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフを G とする。G が $y = -3x^2 + 12bx$ のグラフと同じ軸をもつとき

$$a = \frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}} \cdots\cdots\cdots ②$$

となる。さらに，G が点 $(1,\ 2b-1)$ を通るとき

$$c = b - \frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}} \cdots\cdots\cdots ③$$

が成り立つ。

以下，②，③のとき，2 次関数①とそのグラフ G を考える。

(1) G と x 軸が異なる 2 点で交わるような b の値の範囲は

$$b < \frac{\boxed{カキ}}{\boxed{ク}},\quad \frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}} < b$$

である。さらに，G と x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるような b の値の範囲は

$$\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}} < b < \frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$$

である。

(2) $b > 0$ とする。

$0 \leqq x \leqq b$ における 2 次関数①の最小値が $-\frac{1}{4}$ であるとき，$b = \frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$ である。

一方，$x \geqq b$ における 2 次関数①の最大値が 3 であるとき，$b = \frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$ である。

$b = \frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$，$b = \frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$ のときの①のグラフをそれぞれ G_1，G_2 とする。G_1 を x 軸方向に $\boxed{テ}$，y 軸方向に $\boxed{ト}$ だけ平行移動すれば，G_2 と一致する。

第３問

解答解説のページへ

点 O を中心とする円 O の円周上に 4 点 A, B, C, D がこの順にある。四角形 ABCD の辺の長さは，それぞれ

$$AB=\sqrt{7},\ BC=2\sqrt{7},\ CD=\sqrt{3},\ DA=2\sqrt{3}$$

であるとする。

(1) $\angle ABC=\theta$，$AC=x$ とおくと，$\triangle ABC$ に着目して

$$x^2=\boxed{アイ}-28\cos\theta$$

となる。また，$\triangle ACD$ に着目して

$$x^2=15+\boxed{ウエ}\cos\theta$$

となる。よって，$\cos\theta=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$，$x=\sqrt{\boxed{キク}}$ であり，円 O の半径は $\sqrt{\boxed{ケ}}$ である。

また，四角形 ABCD の面積は $\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}$ である。

(2) 点 A における円 O の接線と点 D における円 O の接線の交点を E とすると，$\angle OAE=\boxed{シス}°$ であり，また，線分 OE と辺 AD の交点を F とすると，$\angle AFE=\boxed{セソ}°$ であり，$OF\cdot OE=\boxed{タ}$ である。

さらに，辺 AD の延長と線分 OC の延長の交点を G とする。点 E から直線 OG に垂線を下ろし，直線 OG との交点を H とする。

4 点 E, G, $\boxed{チ}$ は同一円周上にある。$\boxed{チ}$ に当てはまるものを次の⓪～④から 1 つ選べ。

⓪ C, F　① H, D　② H, F　③ H, A　④ O, A

したがって，$OH\cdot OG=\boxed{ツ}$ である。

第４問

解答解説のページへ

1 個のさいころを投げるとき，4 以下の目が出る確率 p は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，5 以上の目が出る確率 q は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

以下では, 1 個のさいころを 8 回繰り返して投げる。

(1) 8 回の中で 4 以下の目がちょうど 3 回出る確率は $\boxed{\text{オカ}}\,p^3q^5$ である。

第 1 回目に 4 以下の目が出て，さらに次の 7 回の中で 4 以下の目がちょうど 2 回出る確率は $\boxed{\text{キク}}\,p^3q^5$ である。

第 1 回目に 5 以上の目が出て，さらに次の 7 回の中で 4 以下の目がちょうど 3 回出る確率は $\boxed{\text{ケコ}}\,p^3q^5$ である。

(2) 次の⓪～⑦のうち $\boxed{\text{オカ}}$ に等しいものは $\boxed{\text{サ}}$ と $\boxed{\text{シ}}$ である。ただし，$\boxed{\text{サ}}$ と $\boxed{\text{シ}}$ は解答の順序を問わない。

⓪ ${}_7\mathrm{C}_2 \times {}_7\mathrm{C}_3$	① ${}_8\mathrm{C}_1 \times {}_8\mathrm{C}_2$	② ${}_7\mathrm{C}_2 + {}_7\mathrm{C}_3$	③ ${}_8\mathrm{C}_1 + {}_8\mathrm{C}_2$
④ ${}_7\mathrm{C}_4 \times {}_7\mathrm{C}_5$	⑤ ${}_8\mathrm{C}_6 \times {}_8\mathrm{C}_7$	⑥ ${}_7\mathrm{C}_4 + {}_7\mathrm{C}_5$	⑦ ${}_8\mathrm{C}_6 + {}_8\mathrm{C}_7$

(3) 得点を次のように定める。

8 回の中で 4 以下の目がちょうど 3 回出た場合,

$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ について，第 n 回目に初めて 4 以下の目が出たとき，得点は n 点とする。

また，4 以下の目が出た回数がちょうど 3 回にならないときは，得点を 0 点とする。

このとき，得点が 6 点となる確率は $p^{\boxed{\text{ス}}}q^{\boxed{\text{セ}}}$ であり，得点が 3 点となる確率は $\boxed{\text{ソタ}}\,p^{\boxed{\text{ス}}}q^{\boxed{\text{セ}}}$ である。また，得点の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{チツテ}}}{\boxed{\text{トナニ}}}$ である。

第１問

問題のページへ

[1]　$a=3+2\sqrt{2}$，$b=2+\sqrt{3}$ のとき，

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=\frac{3-2\sqrt{2}}{9-8}=3-2\sqrt{2}\,,\ \ \frac{1}{b}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}$$

$$\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=(3+2\sqrt{2})(2-\sqrt{3})-(3-2\sqrt{2})(2+\sqrt{3})=8\sqrt{2}-6\sqrt{3}$$

さて，$|2abx-a^2|<b^2$ より，$a^2-b^2<2abx<a^2+b^2$ となり，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)<x<\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$$

ここで，$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=(3+2\sqrt{2})(2-\sqrt{3})+(3-2\sqrt{2})(2+\sqrt{3})=12-4\sqrt{6}$ より，

$$\frac{1}{2}(8\sqrt{2}-6\sqrt{3})<x<\frac{1}{2}(12-4\sqrt{6}),\ \ 4\sqrt{2}-3\sqrt{3}<x<6-2\sqrt{6}$$

[2]　条件 $p:(a+b)^2+(a-2b)^2<5$，$q:|a+b|<1$ または $|a-2b|<2$ に対して，

(1)　命題「$q \Longrightarrow p$」に対し，q が成り立ち，p が成り立たない実数 a, b を探す。すると，この命題の反例として，$a=1$，$b=1$ が見つかる。

(2)　命題「$p \Longrightarrow q$」の対偶は，「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」より，

$$|a+b|\geqq 1 \text{ かつ } |a-2b|\geqq 2 \Longrightarrow (a+b)^2+(a-2b)^2\geqq 5$$

(3)　命題「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」は明らかに真なので，「$p \Longrightarrow q$」も真である。

そこで，(1)の結果と合わせると，

p は q であるための十分条件であるが，必要条件ではない

［解 説］

標準的な問題です。[2]についても疑心暗鬼にならなくて済むように誘導がつけられています。

第２問

問題のページへ

まず，G は，$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a}+c$ ………①

また，G と $y=-3x^2+12bx=-3(x-2b)^2+12b^2$ のグラフが同じ軸をもつので，

$$-\frac{b}{2a}=2b,\ a=-\frac{1}{4}\quad (b\neq 0)\ \cdots\cdots\cdots②$$

また，G が点$(1,\ 2b-1)$を通るとき，$2b-1=a+b+c$ となり，②を代入すると，

$$b-1+\frac{1}{4}=c,\ c=b-\frac{3}{4}\ \cdots\cdots\cdots③$$

②③を①に代入すると，$G: y=-\dfrac{1}{4}x^2+bx+b-\dfrac{3}{4}=-\dfrac{1}{4}(x-2b)^2+b^2+b-\dfrac{3}{4}$

(1)　G と x 軸が異なる 2 点で交わるとき，$b^2+b-\dfrac{3}{4}>0$ から，

$$4b^2+4b-3>0,\ (2b-1)(2b+3)>0$$

よって，$b<-\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{1}{2}<b$ ………④

さらに，G が x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるときは，④に，軸 $x=2b>0$ より $b>0$，y 軸との交点 $y=b-\dfrac{3}{4}<0$ より $b<\dfrac{3}{4}$ という条件が加わり，

$$\frac{1}{2}<b<\frac{3}{4}$$

(2)　$0\leqq x\leqq b$ において，2 次関数①は，$x=0$ で最小値をとり，この値が $-\dfrac{1}{4}$ のとき，

$$b-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4},\ b=\frac{1}{2}$$

$x\geqq b$ において，2 次関数①は，$x=2b$ で最大値をとり，この値が 3 のとき，

$$b^2+b-\frac{3}{4}=3,\ 4b^2+4b-15=0,\ (2b-3)(2b+5)=0$$

$b>0$ より，$b=\dfrac{3}{2}$

すると，G_1 の頂点は $b=\dfrac{1}{2}$ から点$(1,\ 0)$，G_2 の頂点は $b=\dfrac{3}{2}$ から点$(3,\ 3)$となるので，G_1 を x 軸方向に 2，y 軸方向に 3 だけ平行移動すれば，G_2 と一致する。

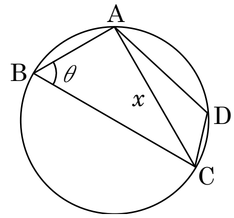
［解　説］

2 次関数についての標準的な問題です。最大・最小問題も，軸に位置による場合分けは必要ありません。

第３問

問題のページへ

(1)　円 O に内接する四角形 ABCD に対して，$\angle\mathrm{ABC}=\theta$，$\mathrm{AC}=x$ とおく。



$\mathrm{AB}=\sqrt{7}$，$\mathrm{BC}=2\sqrt{7}$ から，△ABC に余弦定理を適用して，

$$x^2=(\sqrt{7})^2+(2\sqrt{7})^2-2\cdot\sqrt{7}\cdot2\sqrt{7}\cos\theta$$
$$=35-28\cos\theta\cdots\cdots\cdots①$$

$\mathrm{CD}=\sqrt{3}$，$\mathrm{DA}=2\sqrt{3}$ から，△ACD に余弦定理を適用して，

$$x^2=(\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}\cos(180^\circ-\theta)=15+12\cos\theta\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$35-28\cos\theta=15+12\cos\theta$，$40\cos\theta=20$ となり，

$$\cos\theta=\frac{1}{2},\ \theta=60^\circ$$

①から，$x^2=35-14=21$ となり，$x=\sqrt{21}$

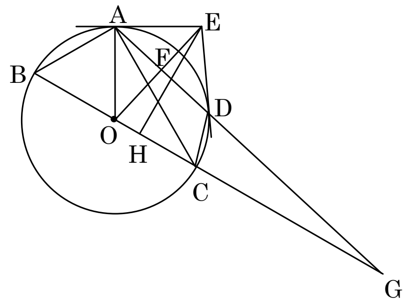
そこで，円 O の半径を R とおくと，正弦定理より，

$$2R=\frac{\sqrt{21}}{\sin60^\circ},\ R=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}}=\sqrt{7}$$

また，四角形 ABCD の面積は，$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot2\sqrt{7}\sin60^\circ+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}\sin120^\circ=5\sqrt{3}$

(2)　直線 AE は，円 O の接線なので，

$$\angle\mathrm{OAE}=90^\circ$$



また，EA＝ED より，AD は，円 O と点 E を中心とする半径 EA の円の共通弦となる。これより AD は 2 円の中心を結ぶ線分と直交し，

$$\angle\mathrm{AFE}=90^\circ$$

すると，△OAF ∽ △OEA より，$\dfrac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OA}}=\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OE}}$

$$\mathrm{OF}\cdot\mathrm{OE}=\mathrm{OA}^2=7\cdots\cdots\cdots③$$

さらに，$\angle\mathrm{EFG}=\angle\mathrm{EHG}=90^\circ$ より，4 点 E, G, H, F は同一円周上にあるので，方べきの定理を用いて，③より，

$$\mathrm{OH}\cdot\mathrm{OG}=\mathrm{OF}\cdot\mathrm{OE}=7$$

［解　説］

$\mathrm{BC}=2\sqrt{7}$，$R=\sqrt{7}$ から，辺 BC が円 O の直径になっていることがわかります。この事実をもとに，図を書き直すことがポイントとなります。

第４問

問題のページへ

1個のさいころを投げるとき，4以下の目が出る確率pは$p=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$，5以上の目が出る確率$q$は$q=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$である。以下，1個のさいころを8回繰り返して投げるときを考える。

(1)　4以下の目がちょうど3回出る確率は，${}_8\mathrm{C}_3\,p^3q^5=56p^3q^5$である。

第1回目に4以下の目が出て，さらに次の7回の中で4以下の目がちょうど2回出る確率は，$p\times{}_7\mathrm{C}_2\,p^2q^5=21p^3q^5$である。

第1回目に5以上の目が出て，さらに次の7回の中で4以下の目がちょうど3回出る確率は，$q\times{}_7\mathrm{C}_3\,p^3q^4=35p^3q^5$である。

(2)　${}_8\mathrm{C}_3={}_7\mathrm{C}_2+{}_7\mathrm{C}_3$であり，また${}_7\mathrm{C}_2={}_7\mathrm{C}_5$，${}_7\mathrm{C}_3={}_7\mathrm{C}_4$より，

$${}_8\mathrm{C}_3={}_7\mathrm{C}_4+{}_7\mathrm{C}_5$$

(3)　得点が6点となるのは，第1回目から5回目まで5以上の目，第6回目以降は4以下の目が出た場合より，その確率は，$q^5p^3=p^3q^5$である。

得点が3点となるのは，第1回目と2回目が5以上の目，第3回目は4以下の目，第4回目以降に4以下の目が2回出た場合より，その確率は，

$$q^2\times p\times{}_5\mathrm{C}_2\,p^2q^3=10p^3q^5$$

同様に考えて，得点が1点となる確率は，$p\times{}_7\mathrm{C}_2\,p^2q^5=21p^3q^5$

得点が2点となる確率は，$q\times p\times{}_6\mathrm{C}_2\,p^2q^4=15p^3q^5$

得点が4点となる確率は，$q^3\times p\times{}_4\mathrm{C}_2\,p^2q^2=6p^3q^5$

得点が5点となる確率は，$q^4\times p\times{}_3\mathrm{C}_2\,p^2q=3p^3q^5$

以上より，得点の期待値は，

$$(1\times21+2\times15+3\times10+4\times6+5\times3+6\times1)\,p^3q^5=126p^3q^5$$

$p=\dfrac{2}{3}$，$q=\dfrac{1}{3}$を代入すると，$126p^3q^5=126\times\dfrac{2^3}{3^8}=\dfrac{112}{729}$となる。

［解 説］

得点が 0 点のときは省いたものの，期待値の計算は面倒です。しかし，この点を除くと，題意の読み違えがなければ，スムーズに進みます。