第１問

解答解説のページへ

[1] $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq 0$ のとき，関数

$$y = \cos 2\theta + \sqrt{3}\sin 2\theta - 2\sqrt{3}\cos\theta - 2\sin\theta$$

の最小値を求めよう。

$t = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ とおくと

$$t^2 = \boxed{\text{ア}}\cos^2\theta + \boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}\sin\theta\cos\theta + \boxed{\text{エ}}$$

であるから，$y = t^2 - \boxed{\text{オ}}\,t - \boxed{\text{カ}}$ となる。

また，$t = \boxed{\text{キ}}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ク}}}\right)$ である。

$\theta + \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ク}}}$ のとり得る値の範囲は，$-\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ク}}} \leqq \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ク}}}$ であるから，t のとり得る値の範囲は，$\boxed{\text{コサ}} \leqq t \leqq \sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ である。

したがって，y は $t = \boxed{\text{ス}}$，すなわち $\theta = -\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}$ のとき，最小値 $\boxed{\text{ソタ}}$ をとる。

[2] 自然数 x で，条件

$$12(\log_2\sqrt{x})^2 - 7\log_4 x - 10 > 0 \cdots\cdots\cdots ①,\quad x + \log_3 x < 14 \cdots\cdots\cdots ②$$

を満たすものを求めよう。

まず，x を正の実数として，条件①を考える。①は $X = \log_2 x$ とおくと

$$6X^2 - \boxed{\text{チ}}\,X - \boxed{\text{ツテ}} > 0$$

となる。この２次不等式を解くと

$$X < -\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}},\quad \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} < X$$

となる。したがって，条件①を満たす最小の自然数 x は $\boxed{\text{ネ}}$ であり，$\boxed{\text{ネ}}$ 以上のすべての自然数 x は①を満たす。

次に，条件②について考えると，②を満たす最大の自然数 x は $\boxed{\text{ノハ}}$ であり，$\boxed{\text{ノハ}}$ 以下のすべての自然数 x は②を満たす。

したがって，求める x は $\boxed{\text{ネ}}$ 以上 $\boxed{\text{ノハ}}$ 以下の自然数である。

第２問

解答解説のページへ

座標平面上で，放物線 $y=x^2$ を C とする。

曲線 C 上の点 P の x 座標を a とする。点 P における C の接線 l の方程式は

$$y=\boxed{\text{アイ}}\,x-a^{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。$a\neq 0$ のとき直線 l が x 軸と交わる点を Q とすると，Q の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$$

である。

$a>0$ のとき，曲線 C と直線 l および x 軸で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S=\frac{a^{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{クケ}}}$$

である。

$a<2$ のとき，曲線 C と直線 l および直線 $x=2$ で囲まれた図形の面積を T とすると

$$T=-\frac{a^3}{\boxed{\text{コ}}}+\boxed{\text{サ}}\,a^2-\boxed{\text{シ}}\,a+\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である。

$a=0$ のときは $S=0$，$a=2$ のときは $T=0$ であるとして，$0\leqq a\leqq 2$ に対して $U=S+T$ とおく。a がこの範囲を動くとき，U は $a=\boxed{\text{ソ}}$ で最大値 $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ をとり，$a=\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ で最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ をとる。

第３問

解答解説のページへ

数直線上で点 P に実数 a が対応しているとき，a を点 P の座標といい，座標が a である点 P を $\mathrm{P}(a)$ で表す。

数直線上に点 $\mathrm{P}_1(1)$，$\mathrm{P}_2(2)$ をとる。線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ を $3:1$ に内分する点を P_3 とする。一般に，自然数 n に対して，線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ を $3:1$ に内分する点を P_{n+2} とする。点 P_n の座標を x_n とする。

$x_1=1$，$x_2=2$ であり，$x_3=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めるために，この数列の階差数列を考えよう。自然数 n に対して $y_n=x_{n+1}-x_n$ とする。

$$y_1=\boxed{\text{ウ}},\ \ y_{n+1}=\frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}y_n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である。したがって，$y_n=\left(\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{\boxed{\text{キ}}}$ $\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であり

$$x_n=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}-\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{ケ}}}\left(\frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{\boxed{\text{サ}}} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となる。ただし，$\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{サ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～③のうちから１つずつ選べ。同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ $n-1$　　① n　　② $n+1$　　③ $n+2$

次に，自然数 n に対して，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k|y_k|$ を求めよう。$r=\left|\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}\right|$ とおくと

$$S_n-rS_n=\sum_{k=1}^{\boxed{\text{シ}}}r^{k-1}-nr^{\boxed{\text{ス}}} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であり，したがって

$$S_n=\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\left\{1-\left(\frac{1}{\boxed{\text{チ}}}\right)^{\boxed{\text{ツ}}}\right\}-\frac{n}{\boxed{\text{テ}}}\left(\frac{1}{\boxed{\text{ト}}}\right)^{\boxed{\text{ナ}}}$$

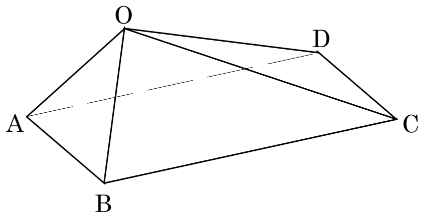
となる。ただし，$\boxed{\text{シ}}$，$\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{ツ}}$，$\boxed{\text{ナ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～③のうちから１つずつ選べ。同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ $n-1$　　① n　　② $n+1$　　③ $n+2$

第４問

解答解説のページへ

四角錐 OABCD において，三角形 OBC と三角形 OAD は合同で，$\mathrm{OB}=1$，$\mathrm{BC}=2$，$\mathrm{OC}=\sqrt{3}$ であり，底面の四角形 ABCD は長方形である。$\mathrm{AB}=2r$ とおき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。



$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表すと

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\boxed{\text{ア}}}-\overrightarrow{\boxed{\text{イ}}}+\vec{c}$ である。辺 OD を1 : 2 に内分する点を L とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AL}}=-\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{a}-\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{b}+\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{c}$$

となる。

さらに辺 OB の中点を M，3 点 A，L，M の定める平面を α とし，平面 α と辺 OC との交点を N とする。点 N は平面 α 上にあることから，$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ は実数 s，t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AN}}=s\overrightarrow{\mathrm{AL}}+t\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ と表されるので

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\left(\boxed{\text{キ}}-\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}s-t\right)\vec{a}+\left(-\frac{s}{\boxed{\text{コ}}}+\frac{t}{\boxed{\text{サ}}}\right)\vec{b}+\frac{s}{\boxed{\text{シ}}}\vec{c}$$

となる。一方，点 N は辺 OC 上にもある。これらから，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\vec{c}$ となる。

また，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\text{ソ}}-\boxed{\text{タ}}r^2$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\boxed{\text{チ}}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\boxed{\text{ツテ}}r^2$ である。よって，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ を計算すると，$\mathrm{AB}=\sqrt{\boxed{\text{ト}}}$ のとき，直線 AM と直線 MN は垂直になることがわかる。

第１問

問題のページへ

[1]　$y=\cos 2\theta+\sqrt{3}\sin 2\theta-2\sqrt{3}\cos\theta-2\sin\theta$ に対し，$t=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ とおくと，

$$t^2=\sin^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta=2\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+1$$

さらに，$t^2=\cos 2\theta+1+\sqrt{3}\sin 2\theta+1$ より，$\cos 2\theta+\sqrt{3}\sin 2\theta=t^2-2$ となり，

$$y=t^2-2-2t=t^2-2t-2$$

また，$t=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ であり，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq 0$ から，$-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{\pi}{3}$ となるので，

$$2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\leqq t\leqq 2\times\frac{\sqrt{3}}{2},\ -1\leqq t\leqq\sqrt{3}$$

したがって，$y=(t-1)^2-3$ と変形すると，$t=1$ のとき，最小値 -3 をとる。このとき，$2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$ より，$\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$ すなわち $\theta=-\dfrac{\pi}{6}$ となる。

[2]　$12(\log_2\sqrt{x})^2-7\log_4 x-10>0$ ……①に対して，$X=\log_2 x$ とおくと，

$$\log_2\sqrt{x}=\frac{1}{2}\log_2 x=\frac{1}{2}X,\ \log_4 x=\frac{\log_2 x}{\log_2 4}=\frac{1}{2}X$$

よって，①は，$12\left(\dfrac{1}{2}X\right)^2-7\cdot\dfrac{1}{2}X-10>0$，$6X^2-7X-20>0$ となり，

$$(3X+4)(2X-5)>0$$

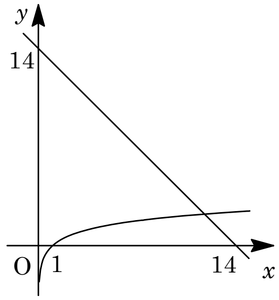
よって，$X<-\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{5}{2}<X$ となり，①の解は，$x<2^{-\frac{4}{3}}$，$2^{\frac{5}{2}}<x$ である。

ここで，$2^{-\frac{4}{3}}<2^0=1$，また $2^{\frac{5}{2}}=4\sqrt{2}$ で，$5<4\sqrt{2}<6$ であるので，①を満たす最小の自然数 x は 6 である。

次に，$x+\log_3 x<14$ ……②に対して，

$$\log_3 x<14-x$$

ここで，$y=\log_3 x$ と $y=14-x$ のグラフをかくと，右図のようになり，



$$\log_3 11<14-11=\log_3 27$$

$$\log_3 12>14-12=\log_3 9$$

よって，②を満たす最大の自然数 x は 11 である。

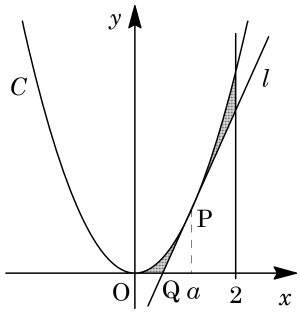
したがって，①と②をともに満たす自然数 x は, 6 以上 11 以下である。

［解 説］

[2]の最後の設問以外は，よく見かける問題です。最後の設問も，空欄の文字数から 2 桁であることがわかり，10 以上の整数を順次，代入していけばよいことになります。

第２問

問題のページへ



$C: y=x^2$ に対して，$y'=2x$ となり，$\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線 l の方程式は,

$$y-a^2=2a(x-a),\ \ y=2ax-a^2$$

$a\neq 0$ のとき，直線 l が x 軸と交わる点 Q は,

$$0=2ax-a^2,\ \ x=\frac{a}{2}$$

よって，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$ である。

$a>0$ のとき，曲線 C と直線 l および x 軸で囲まれた図形の面積 S は,

$$S=\int_0^a x^2dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot a^2=\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{4}=\frac{a^3}{12}$$

$a<2$ のとき，曲線 C と直線 l および直線 $x=2$ で囲まれた図形の面積 T は,

$$T=\int_a^2(x^2-2ax+a^2)dx=\int_a^2(x-a)^2dx=\frac{1}{3}\Big[(x-a)^3\Big]_a^2$$

$$=\frac{1}{3}(2-a)^3=-\frac{a^3}{3}+2a^2-4a+\frac{8}{3}$$

$0\leqq a\leqq 2$ のとき，$U=S+T=-\dfrac{a^3}{4}+2a^2-4a+\dfrac{8}{3}$ に対して,

$$U'=-\frac{3}{4}a^2+4a-4$$

$$=-\frac{1}{4}(3a-4)(a-4)$$

a	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2
U'		$-$	0	$+$	
U	$\frac{8}{3}$	↘	$\frac{8}{27}$	↗	$\frac{2}{3}$

右表より，U は $a=0$ で最大値 $\dfrac{8}{3}$ をとり，$a=\dfrac{4}{3}$ で最小値 $\dfrac{8}{27}$ をとる。

［解　説］

例年に比べて基本的な設問になっています。ただ，最大値や最小値を求める数値計算には，U の展開式を用いるよりは，$\dfrac{a^3}{12}+\dfrac{1}{3}(2-a)^3$ を利用した方が適切です。

第３問

問題のページへ

点 P_n の座標を x_n とするとき，点 $\mathrm{P}_1(1)$，$\mathrm{P}_2(2)$ に対し，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ を $3:1$ に内分する点 P_3 の座標は，$x_3=\dfrac{x_1+3x_2}{4}=\dfrac{7}{4}$ である。

同様に，線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ を $3:1$ に内分する点を P_{n+2} とするので，

$$x_{n+2}=\frac{x_n+3x_{n+1}}{4}=\frac{3}{4}x_{n+1}+\frac{1}{4}x_n\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$y_n=x_{n+1}-x_n$ とすると，$y_1=x_2-x_1=1$ であり，①より，

$$y_{n+1}=x_{n+2}-x_{n+1}=\frac{3}{4}x_{n+1}+\frac{1}{4}x_n-x_{n+1}=-\frac{1}{4}(x_{n+1}-x_n)=-\frac{1}{4}y_n$$

よって，$y_n=y_1\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ となり，$n\geqq 2$ に対して，

$$x_n=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}y_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1}=1+\frac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{9}{5}-\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

なお，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

次に，$r=\left|-\dfrac{1}{4}\right|=\dfrac{1}{4}$ とおくとき，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k|y_k|=\sum_{k=1}^{n}kr^{k-1}$ に対して，

$$\begin{aligned}S_n-rS_n&=\sum_{k=1}^{n}kr^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}kr^{k}=\sum_{k=1}^{n}kr^{k-1}-\sum_{l=2}^{n+1}(l-1)r^{l-1}\quad(l=k+1)\\&=\sum_{k=1}^{n}kr^{k-1}-\sum_{l=1}^{n+1}(l-1)r^{l-1}=\sum_{k=1}^{n}kr^{k-1}-\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)r^{k-1}\\&=\sum_{k=1}^{n}kr^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}(k-1)r^{k-1}-nr^n=\sum_{k=1}^{n}r^{k-1}-nr^n=\frac{1-r^n}{1-r}-nr^n\end{aligned}$$

よって，$r=\dfrac{1}{4}$ で，$S_n=\dfrac{1-r^n}{(1-r)^2}-\dfrac{nr^n}{1-r}$ から，

$$S_n=\left(\frac{4}{3}\right)^2\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}-\frac{4}{3}n\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{16}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}-\frac{n}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

［解 説］

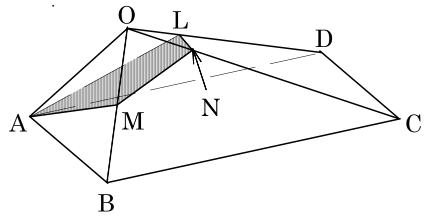
漸化式の応用についての有名な構図の問題です。後半の(等差)×(等比)のタイプの数列の和は，変数を置き換えてシグマ計算で押し通しましたが，ここは普通に，各項を並べて書いて，差をとった方がすばやいでしょう。

第４問

問題のページへ

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくと,

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$$



辺 OD を $1:2$ に内分する点を L とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{AL}}=\overrightarrow{\mathrm{OL}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}$$
$$=-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

ここで, 辺 OB の中点を M, 3 点 A, L, M の定める平面を α とし, 平面 α と辺 OC との交点を N とする。

点 N は平面 α 上にあることから, $\overrightarrow{\mathrm{AN}}=s\overrightarrow{\mathrm{AL}}+t\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ と表せ,

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AL}}+t\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\vec{a}+s\left(-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)+t\left(-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)$$
$$=\left(1-\frac{2}{3}s-t\right)\vec{a}+\left(-\frac{s}{3}+\frac{t}{2}\right)\vec{b}+\frac{s}{3}\vec{c}$$

また, 点 N は辺 OC 上にもあり, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は 1 次独立なので,

$$1-\frac{2}{3}s-t=0\cdots\cdots\cdots①,\quad -\frac{s}{3}+\frac{t}{2}=0\cdots\cdots\cdots②$$

①②より, $t=\frac{1}{2}$, $s=\frac{3}{4}$ となり, $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\vec{c}=\frac{1}{4}\vec{c}$

さて, 条件より, $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=1$, $\mathrm{AD}=\mathrm{BC}=2$, $\mathrm{OD}=\mathrm{OC}=\sqrt{3}$, $\mathrm{AB}=\mathrm{DC}=2r$

まず, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2r$ より, $|\vec{b}-\vec{a}|=4r^2$ となり, $1-2\vec{a}\cdot\vec{b}+1=4r^2$ から,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1-2r^2$$

また, $\mathrm{OB}^2+\mathrm{OC}^2=\mathrm{BC}^2$ から $\angle\mathrm{BOC}=90^\circ$ となり, $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

さらに, $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{4r^2+4}$ より, $|\vec{c}-\vec{a}|=4r^2+4$ となり, $3-2\vec{a}\cdot\vec{c}+1=4r^2+4$

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=-2r^2$$

そこで, $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{MN}}=-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$ から,

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\left(-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{c}-\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+\frac{1}{8}\vec{b}\cdot\vec{c}$$
$$=\frac{1}{2}(1-2r^2)-\frac{1}{4}(-2r^2)-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(1-2r^2)$$

直線 AM と直線 MN が垂直となるのは, $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MN}}=0$ から, $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のときであり,

$$\mathrm{AB}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

［解　説］

センター試験ではよくあることですが, 最後の空欄を埋める計算に時間がかかります。しかし, それ以外は, 基本的な設問が並んでいます。