第１問

解答解説のページへ

[1]　(1)　不等式$|\,2x+1\,| \leqq 3$の解は$\boxed{\text{アイ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ウ}}$である。

以下, aを自然数とする。

(2)　不等式$|\,2x+1\,| \leqq a$ ……①の解は$\dfrac{-\boxed{\text{エ}}-a}{\boxed{\text{オ}}} \leqq x \leqq \dfrac{-\boxed{\text{エ}}+a}{\boxed{\text{オ}}}$である。

(3)　不等式①を満たす整数xの個数をNとする。$a=3$のとき, $N=\boxed{\text{カ}}$である。
また, aが 4, 5, 6, …と増加するとき, Nが初めて$\boxed{\text{カ}}$より大きくなるのは,
$a=\boxed{\text{キ}}$のときである。

[2]　kを定数とする。自然数m, nに関する条件p, q, rを次のように定める。

$p : m>k$ または $n>k$　　　$q : mn>k^2$　　　$r : mn>k$

(1)　次の$\boxed{\text{ク}}$に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから１つ選べ。

pの否定$\overline{p}$は$\boxed{\text{ク}}$である。

⓪　$m>k$ または $n>k$　　　①　$m>k$ かつ $n>k$

②　$m \leqq k$ かつ $n \leqq k$　　　③　$m \leqq k$ または $n \leqq k$

(2)　次の$\boxed{\text{ケ}}$～$\boxed{\text{サ}}$に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから１つずつ選べ。
ただし, 同じものを繰り返し選んでもよい。

(i)　$k=1$とする。pはqであるための$\boxed{\text{ケ}}$。

(ii)　$k=2$とする。pはrであるための$\boxed{\text{コ}}$。pはqであるための$\boxed{\text{サ}}$。

⓪　必要十分条件である

①　必要条件であるが，十分条件でない

②　十分条件であるが，必要条件でない

③　必要条件でも十分条件でもない

第２問

解答解説のページへ

a, b を定数として２次関数 $y=-x^2+(2a+4)x+b$ ……①について考える。関数①のグラフ G の頂点の座標は，$\left(a+\boxed{\text{ア}},\ a^2+\boxed{\text{イ}}\,a+b+\boxed{\text{ウ}}\right)$である。以下，この頂点が直線 $y=-4x-1$ 上にあるとする。このとき，

$$b=-a^2-\boxed{\text{エ}}\,a-\boxed{\text{オカ}}$$

である。

(1)　グラフ G が x 軸と異なる２点で交わるような a の値の範囲は

$$a<\frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。また，G が x 軸の正の部分と負の部分の両方で交わるような a の値の範囲は

$$-\boxed{\text{コ}}-\sqrt{\boxed{\text{サ}}}<a<-\boxed{\text{コ}}+\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$$

である。

(2)　関数①の $0\leqq x\leqq 4$ における最小値が -22 となるのは

$a=\boxed{\text{シス}}$ または $a=\boxed{\text{セ}}$

のときである。また，$a=\boxed{\text{セ}}$ のとき，関数①の $0\leqq x\leqq 4$ における最大値は $\boxed{\text{ソタチ}}$ である。

一方，$a=\boxed{\text{シス}}$ のときの①のグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{ツ}}$，y 軸方向に $\boxed{\text{テトナ}}$ だけ平行移動すると，$a=\boxed{\text{セ}}$ のときのグラフと一致する。

第３問

解答解説のページへ

$\triangle$ABC において，AB $=$ AC $= 3$，BC $= 2$ であるとき

$$\cos\angle \mathrm{ABC} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\quad \sin\angle \mathrm{ABC} = \frac{\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

であり，$\triangle$ABC の面積は $\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$，$\triangle$ABC の内接円 I の半径は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

また，円 I の中心から点 B までの距離は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

(1)　辺 AB 上の点 P と辺 BC 上の点 Q を，BP $=$ BQ かつ PQ $= \dfrac{2}{3}$ となるようにとる。

このとき，$\triangle$PBQ の外接円 O の直径は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ であり，円 I と円 O は $\boxed{\text{セ}}$。ただし，$\boxed{\text{セ}}$ には次の⓪〜④から当てはまるものを１つ選べ。

⓪　重なる（一致する）　①　内接する　②　外接する

③　異なる２点で交わる　④　共有点をもたない

(2)　円 I 上に点 E と点 F を，3 点 C，E，F が一直線上にこの順に並び，かつ CF $= \sqrt{2}$ となるようにとる。このとき，CE $= \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$，$\dfrac{\mathrm{EF}}{\mathrm{CE}} = \boxed{\text{チ}}$ である。

さらに，円 I と辺 BC との接点を D，線分 BE と線分 DF との交点を G，線分 CG の延長と線分 BF との交点を M とする。このとき，$\dfrac{\mathrm{GM}}{\mathrm{CG}} = \dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

第４問

解答解説のページへ

1 から 9 までの数字が 1 つずつ書かれた 9 枚のカードから 5 枚のカードを同時に取り出す。このようなカードの取り出し方は$\boxed{アイウ}$通りある。

(1) 取り出した 5 枚のカードの中に 5 と書かれたカードがある取り出し方は$\boxed{エオ}$通りであり, 5 と書かれたカードがない取り出し方は$\boxed{カキ}$通りである。

(2) 次のように得点を定める。

・取り出した 5 枚のカードの中に 5 と書かれたカードがない場合は, 得点を 0 点とする。

・取り出した 5 枚のカードの中に 5 と書かれたカードがある場合, この 5 枚を書かれている数の小さい順に並べ, 5 と書かれたカードが小さい方から k 番目のあるとき, 得点を k 点とする。

得点が 0 点となる確率は$\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$である。得点が 1 点となる確率は$\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サシス}}$で, 得点が 2 点となる確率は$\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソタ}}$, 得点が 3 点となる確率は$\dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$である。

また, 得点の期待値は$\dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$点である。

第１問

問題のページへ

[1] (1) 不等式$|2x+1|\leqq 3$に対して，$-3\leqq 2x+1\leqq 3$より，$-2\leqq x\leqq 1$

(2) aを自然数とするとき，不等式$|2x+1|\leqq a$……①の解は, (1)と同様にして,

$$-a\leqq 2x+1\leqq a,\ \frac{-1-a}{2}\leqq x\leqq \frac{-1+a}{2}$$

(3) $a=3$のとき, (1)より，①の整数解の個数Nは，$N=4$となる。

$a=4$のとき，①の解は$-\frac{5}{2}\leqq x\leqq \frac{3}{2}$となり，$N=4$である。

$a=5$のとき，①の解は$-3\leqq x\leqq 2$となり，$N=6$である。

よって, Nが初めて4より大きくなるのは，$a=5$のときである。

[2] (1) 条件$p: m>k$または$n>k$の否定は，$\overline{p}: m\leqq k$かつ$n\leqq k$

(2) (i) $k=1$のとき，$p: m>1$または$n>1$，$q: mn>1$となり,

$\overline{p}: m\leqq 1$かつ$n\leqq 1$，$\overline{q}: mn\leqq 1$

すると，$\overline{q}\Rightarrow\overline{p}$は真より$p\Rightarrow q$は真，$\overline{p}\Rightarrow\overline{q}$は真より$q\Rightarrow p$は真。

よって, pはqであるための必要十分条件である。

(ii) $k=2$のとき，$p: m>2$または$n>2$，$q: mn>4$，$r: mn>2$となり,

$\overline{p}: m\leqq 2$かつ$n\leqq 2$，$\overline{q}: mn\leqq 4$，$\overline{r}: mn\leqq 2$

まず，$\overline{r}\Rightarrow\overline{p}$は真より$p\Rightarrow r$は真，$\overline{p}\Rightarrow\overline{r}$は偽より$r\Rightarrow p$は偽。

よって, pはrであるための十分条件であるが，必要条件でない。

また，$\overline{q}\Rightarrow\overline{p}$は偽より$p\Rightarrow q$は偽，$\overline{p}\Rightarrow\overline{q}$は真より$q\Rightarrow p$は真。

よって, pはqであるための必要条件であるが，十分条件でない。

［解 説］

[1]は基本の確認だけですが, [2]は対偶を考えると明快なおもしろい問題です。

第２問

問題のページへ

2 次関数 $y=-x^2+(2a+4)x+b$ ……①のグラフ G に対して,

$$y=-\{x-(a+2)\}^2+(a+2)^2+b=-\{x-(a+2)\}^2+a^2+4a+b+4$$

これより，頂点の座標は，$(a+2,\ a^2+4a+b+4)$ である。

この頂点が，直線 $y=-4x-1$ 上にあるとき,

$$a^2+4a+b+4=-4(a+2)-1,\ b=-a^2-8a-13$$

よって，①は，$y=-x^2+(2a+4)x-a^2-8a-13=-\{x-(a+2)\}^2-4a-9$

(1) グラフ G が x 軸と異なる 2 点で交わる条件は，$-4a-9>0$ から，$a<-\dfrac{9}{4}$

また, G が x 軸の正の部分と負の部分の両方で交わる条件は，$x=0$ のとき,

$$y=-a^2-8a-13>0,\ a^2+8a+13<0,\ -4-\sqrt{3}<a<-4+\sqrt{3}$$

(2) 関数①の $0\leqq x\leqq 4$ における最小値が -22 となるのは,

(i) $a+2\geqq 2\ (a\geqq 0)$ のとき

$x=0$ において最小値をとるので，$-a^2-8a-13=-22$ から,

$$a^2+8a-9=0,\ (a+9)(a-1)=0$$

すると，$a\geqq 0$ より，$a=1$

(ii) $a+2<2\ (a<0)$ のとき

$x=4$ において最小値をとるので，$-16+8a+16-a^2-8a-13=-22$ から,

$$a^2-9=0,\ (a+3)(a-3)=0$$

すると，$a<0$ より，$a=-3$

さて，$a=1$，$a=-3$ のとき, ①はそれぞれ

$$y=-(x-3)^2-13\ \cdots\cdots\text{②},\ y=-(x+1)^2+3\ \cdots\cdots\text{③}$$

これより，$0\leqq x\leqq 4$ における関数②の最大値は -13 である。

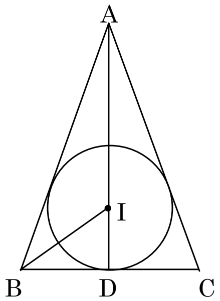
また, ②のグラフの頂点の座標は $(3,\ -13)$，③のグラフの頂点の座標は $(-1,\ 3)$ であることより, ③のグラフを x 軸方向に 4, y 軸方向に -16 だけ平行移動すると, ②のグラフと一致する。

［解 説］

2 次関数について, 基本の確認問題です。例年のように出題される設問だけで構成されています。

第３問

問題のページへ



$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=3$，$\mathrm{BC}=2$ である$\triangle\mathrm{ABC}$において，辺 BC の中点を D とすると，線分 AD は辺 BC と垂直になる。

$\mathrm{AD}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$ から，

$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}}=\frac{1}{3},\ \sin\angle\mathrm{ABC}=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}\ \cdots\cdots\cdots ①$$

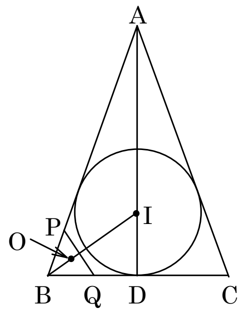
また，$\triangle\mathrm{ABC}$の内接円 I の半径を r とおくと，①より，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}(3+3+2)r=2\sqrt{2},\ 4r=2\sqrt{2},\ r=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

さらに，$\mathrm{BI}=\sqrt{1^2+r^2}=\sqrt{1+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

(1) 辺 AB 上に点 P, 辺 BC 上に点 Q を，$\mathrm{BP}=\mathrm{BQ}$ かつ $\mathrm{PQ}=\frac{2}{3}$ となるようにとり，

$\triangle\mathrm{PBQ}$の外接円 O の直径を $2R$ とおくと，正弦定理より，

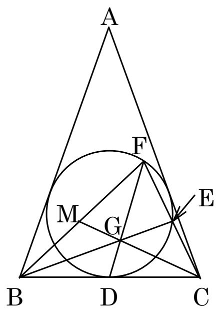


$$2R=\frac{\mathrm{PQ}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \cdots\cdots\cdots ③$$

さて，$\mathrm{BP}=\mathrm{BQ}$ から，線分 BO は$\angle\mathrm{ABC}$の二等分線であり，また点 I は$\triangle\mathrm{ABC}$の内心なので，線分 BI も$\angle\mathrm{ABC}$の二等分線である。これより，3 点 B, O, I は一直線上にある。さらに，点 B は円 I の外部にあり，②③から，

$$2R+r=\sqrt{2}>\frac{\sqrt{6}}{2}=\mathrm{BI}$$

よって，円 I と円 O は，異なる 2 点で交わる。



(2) 円 I 上の点 E, F は，3 点 C, E, F が一直線上に並んでおり，方べきの定理から，$\mathrm{CE}\cdot\mathrm{CF}=\mathrm{CD}^2$ となり，

$$\mathrm{CE}=\frac{\mathrm{CD}^2}{\mathrm{CF}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{CE}}=\frac{\mathrm{CF}-\mathrm{CE}}{\mathrm{CE}}=1$$

これより，点 E は線分 CF の中点であり，また点 D は線分辺 BC の中点である。

すると，線分 BE と DF との交点 G は$\triangle\mathrm{BCF}$の重心となり，線分 CG の延長と線分 BF との交点を M とすると，$\frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{CG}}=\frac{1}{2}$ である。

［解 説］

量の多い問題です。(1)と(2)は無関係で，単に同じ題材を使ったにすぎません。

第４問

問題のページへ

9 枚のカードから 5 枚のカードを同時に取り出すとき，カードの取り出し方は，${}_9C_5 = {}_9C_4 = 126$ 通りある。

(1) 取り出したカードの中に 5 と書かれたカードがある取り出し方は ${}_8C_4 = 70$ 通り，5 と書かれたカードがない取り出し方は ${}_8C_5 = {}_8C_3 = 56$ 通りである。

(2) 得点が 0 点となるのは, 5 と書かれたカードを取り出さない場合より，その確率は，(1)より，$\dfrac{{}_8C_5}{{}_9C_5} = \dfrac{56}{126} = \dfrac{4}{9}$ である。

得点が 1 点となるのは, 5 のカードと 4 枚の 6 以上のカードを取り出す場合より，その確率は，$\dfrac{{}_4C_4}{{}_9C_5} = \dfrac{1}{126}$ である。

得点が 2 点となるのは，5 のカード，1 枚の 4 以下のカード，および 3 枚の 6 以上のカードを取り出す場合より，その確率は，$\dfrac{{}_4C_1 \times {}_4C_3}{{}_9C_5} = \dfrac{16}{126} = \dfrac{8}{63}$ である。

得点が 3 点となるのは，5 のカード，2 枚の 4 以下のカード，および 2 枚の 6 以上のカードを取り出す場合より，その確率は，$\dfrac{{}_4C_2 \times {}_4C_2}{{}_9C_5} = \dfrac{36}{126} = \dfrac{2}{7}$ である。

得点が 4 点となるのは，得点が 2 点となる場合と同様で，その確率は $\dfrac{16}{126}$，また得点が 5 点となるのは，得点が 1 点となる場合と同様で，その確率は $\dfrac{1}{126}$ である。

以上より，得点の期待値は

$$\frac{1}{126}(0\times56+1\times1+2\times16+3\times36+4\times16+5\times1) = \frac{210}{126} = \frac{5}{3}$$

［解 説］

(2)のポイントは，カードを選べば，その並べ方は 1 通りということです。また，期待値の計算も面倒ではありません。