第１問

解答解説のページへ

[1]　$a>0$，$a\neq 1$として，不等式

$$2\log_a(8-x)>\log_a(x-2)\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たすxの値の範囲を求めよう。

真数は正であるから，$\boxed{ア}<x<\boxed{イ}$が成り立つ。ただし，対数$\log_a b$に対し，aを底といい，bを真数という。

底が$a<1$を満たすとき，不等式①は

$$x^2-\boxed{ウエ}x+\boxed{オカ}\ \boxed{キ}\ 0\ \cdots\cdots\cdots ②$$

となる。ただし，$\boxed{キ}$については，当てはまるものを，次の⓪～②のうちから 1 つ選べ。

⓪ $<$　　　① $=$　　　② $>$

したがって，真数が正であることと②から，$a<1$のとき，不等式①を満たす x のとり得る値の範囲は$\boxed{ク}<x<\boxed{ケ}$である。

同様にして，$a>1$のときには，不等式①を満たすxのとり得る値の範囲は$\boxed{コ}<x<\boxed{サ}$であることがわかる。

[2]　$0\leqq\alpha\leqq\pi$として　$\sin\alpha=\cos 2\beta$を満たすβについて考えよう。ただし，$0\leqq\beta\leqq\pi$とする。

たとえば，$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$のとき，βのとり得る値は$\dfrac{\pi}{\boxed{シ}}$と$\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{シ}}\pi$の 2 つである。

このように，αの各値に対して，βのとり得る値は 2 つある。そのうちの小さい方をβ_1，大きい方をβ_2とし，$y=\sin\left(\alpha+\dfrac{\beta_1}{2}+\dfrac{\beta_2}{3}\right)$が最大となる$\alpha$の値とそのときの y の値を求めよう。

β_1，β_2をαを用いて表すと，$0\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{2}$のときは

$$\beta_1=\frac{\pi}{\boxed{セ}}-\frac{\alpha}{\boxed{ソ}},\quad \beta_2=\frac{\boxed{タ}}{\boxed{セ}}\pi+\frac{\alpha}{\boxed{ソ}}$$

となり，$\dfrac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq\pi$のときは

$$\beta_1=-\frac{\pi}{\boxed{チ}}+\frac{\alpha}{\boxed{ツ}},\quad \beta_2=\frac{\boxed{テ}}{\boxed{チ}}\pi-\frac{\alpha}{\boxed{ツ}}$$

となる。

したがって，$\alpha+\dfrac{\beta_1}{2}+\dfrac{\beta_2}{3}$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\pi \leqq \alpha+\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{3} \leqq \frac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}\pi$$

である。よって，y が最大となる α の値は $\dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}\pi$ であり，そのときの y の値は

$\boxed{\text{フ}}$ であることがわかる。$\boxed{\text{フ}}$ に当てはまるものを，次の⓪〜③のうちから 1 つ選べ。

⓪ $\dfrac{1}{2}$　　① 1　　② $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　③ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

第２問

解答解説のページへ

座標平面上で，曲線 $y=x^3$ を C とし，放物線 $y=x^2+px+q$ を D とする。

(1)　曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^3)$ における C の接線の方程式は

$$y=3a^{\boxed{\text{ア}}}x-\boxed{\text{イ}}\,a^{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。放物線 D は点 P を通り，D の P における接線と，C の P における接線が一致するという。このとき，p と q を a を用いて表すと

$$p=3a^{\boxed{\text{エ}}}-\boxed{\text{オ}}\,a,\quad q=\boxed{\text{カキ}}\,a^3+a^{\boxed{\text{ク}}}\quad \cdots\cdots\cdots①$$

となる。

以下，p, q は①を満たすとする。

(2)　放物線 D が y 軸上の与えられた点 $\mathrm{Q}(0,\ b)$ を通るとき

$$b=\boxed{\text{ケコ}}\,a^3+a^{\boxed{\text{サ}}}\quad \cdots\cdots\cdots②$$

が成り立つ。与えられた b に対して，②を満たす a の値の個数を調べよう。

そのために，関数 $f(x)=\boxed{\text{ケコ}}\,x^3+x^{\boxed{\text{サ}}}$ の増減を調べる。関数 $f(x)$ は，

$x=\boxed{\text{シ}}$ で極小値 $\boxed{\text{ス}}$ をとり，$x=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ で極大値 $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ をとる。

関数 $y=f(x)$ のグラフをかくことにより，$\boxed{\text{ス}}<b<\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ のとき，②を満たす a の値の個数は $\boxed{\text{テ}}$ であることがわかる。

(3)　放物線 D の頂点が x 軸上にあるのは，$a=\boxed{\text{ト}}$，$\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ の 2 つの場合である。$a=\boxed{\text{ト}}$ のときの放物線を D_1，$a=\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ のときの放物線を D_2 とする。

D_1，D_2 と x 軸で囲まれた図形の面積は $\dfrac{2^{\boxed{\text{ヌ}}}}{3^{\boxed{\text{ネノ}}}}$ である。

第３問

解答解説のページへ

$\{a_n\}$ を $a_2=-\dfrac{7}{3}$，$a_5=-\dfrac{25}{3}$ である等差数列とし，自然数 n に対して $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおく。

$$a_1=\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$ であり，$\{a_n\}$ の公差は $\boxed{\text{エオ}}$ である。したがって

$$a_n=\boxed{\text{カキ}}\,n+\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$S_n=\boxed{\text{コ}}\,n^2+\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\,n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である。

次に，数列 $\{b_n\}$ は

$$\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{4}{3}b_n+S_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\cdots\cdots\cdots①$$

を満たすとする。数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよう。①から，$b_1=\boxed{\text{ス}}$ である。さらに，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}b_k=\sum_{k=1}^{n}b_k+b_{n+1}$ に注意して，①を利用すると

$$b_{n+1}=\boxed{\text{セ}}\,b_n+\boxed{\text{ソ}}\,n+\boxed{\text{タ}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立ち，この等式は

$$b_{n+1}+\boxed{\text{チ}}(n+1)+\boxed{\text{ツ}}=\boxed{\text{セ}}\left(b_n+\boxed{\text{チ}}\,n+\boxed{\text{ツ}}\right)$$
$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と変形できる。ここで

$$c_n=b_n+\boxed{\text{チ}}\,n+\boxed{\text{ツ}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\cdots\cdots\cdots②$$

とおくと，$\{c_n\}$ は，$c_1=\boxed{\text{テ}}$，公比が $\boxed{\text{ト}}$ の等比数列であるから，②により

$$b_n=\boxed{\text{ナ}}^{\boxed{\text{ニ}}}-\boxed{\text{ヌ}}\,n-\boxed{\text{ネ}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である。ただし，$\boxed{\text{ニ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから 1 つ選べ。

⓪ $n-2$　① $n-1$　② n　③ $n+1$　④ $n+2$

第４問

解答解説のページへ

空間に異なる 4 点 O, A, B, C を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となるようにとり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく。さらに，3 点 D, E, F を，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{a} + \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \vec{b} + \vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \vec{a} + \vec{c}$ となるようにとり，線分 BD の中点を L，線分 CE の中点を M とし，線分 AD を $3:1$ に内分する点を N とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ は $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{1}{\boxed{\text{ア}}}\vec{b} + \vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \vec{a} + \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\vec{b}$ と

表される。

(2)　2 直線 FL, MN が交わることを確かめよう。$0 < s < 1$ とし，線分 FL を $s : (1-s)$ に内分する点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は，s と $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(\boxed{\text{エ}} - \frac{s}{\boxed{\text{オ}}} \right)\vec{a} + s\vec{b} + \left(\boxed{\text{カ}} - s \right)\vec{c}$$

と表される。$s = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{MP}} = \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ となるので，M, N, P は一直線上にある。よって，2 直線 FL, MN は交わることがわかる。

(3)　2 直線 FL, MN の交点を G とする。$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$，$\overrightarrow{\mathrm{GF}}$ は，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\left(\boxed{\text{ス}}\vec{a} + \boxed{\text{セ}}\vec{b} + \vec{c} \right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{GF}} = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\left(\vec{a} - \boxed{\text{セ}}\vec{b} + \boxed{\text{ソ}}\vec{c} \right)$$

と表される。

$|\vec{a}| = \sqrt{5}$，$|\vec{b}| = 4$，$|\vec{c}| = \sqrt{3}$ とする。このとき $|\overrightarrow{\mathrm{GF}}| = \boxed{\text{タ}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{GM}}| = 2$ となる。

次に，直線 OC 上に点 H をとり，実数 t を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = t\vec{c}$ と表す。$\overrightarrow{\mathrm{GF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{GH}}$，$\overrightarrow{\mathrm{GM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{GH}}$ は，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{GF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{GH}} = \boxed{\text{チ}}\,t + \frac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}} \cdots\cdots\cdots ①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{GM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{GH}} = 2t + \frac{10}{3} \cdots\cdots\cdots ②$$

と表される。

さらに，$\angle\mathrm{FGH} = \angle\mathrm{MGH}$ とする。このときの t の値を求めよう。

$|\overrightarrow{\mathrm{GF}}| = \boxed{\text{タ}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{GM}}| = 2$ と $\angle\mathrm{FGH} = \angle\mathrm{MGH}$ であることから，

$$\overrightarrow{\mathrm{GF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}\overrightarrow{\mathrm{GM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}\quad\cdots\cdots\cdots③$$

が成り立つ。①，②，③から，$t=\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である。

第１問

問題のページへ

[1]　不等式$2\log_a(8-x)>\log_a(x-2)$……①に対して，$8-x>0$かつ$x-2>0$より，

$$2<x<8 \cdots\cdots\cdots(*)$$

$0<a<1$のとき，①は，$(8-x)^2<x-2$となり，$x^2-17x+66<0$ ………②

$$(x-6)(x-11)<0$$

よって，②から$6<x<11$となり，$(*)$と合わせて，$6<x<8$

また，$a>1$のとき，①は，$(8-x)^2>x-2$となり，$x<6$，$11<x$

すると，$(*)$と合わせて，$2<x<6$

[2]　$\sin\alpha=\cos 2\beta$……③に対して，$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$のとき$\dfrac{1}{2}=\cos 2\beta$となり，$0\leqq\beta\leqq\pi$から，

$$2\beta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi,\ \beta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$

さて，③より，$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos 2\beta$と変形し，$0\leqq\beta_1<\beta_2\leqq\pi$とすると，

(i)　$0\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{2}$のとき　$0<\dfrac{\pi}{2}-\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$，$0\leqq 2\beta\leqq 2\pi$なので，

$2\beta_1=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$，$2\beta_2=2\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$より，$\beta_1=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}$，$\beta_2=\dfrac{3}{4}\pi+\dfrac{\alpha}{2}$

(ii)　$\dfrac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq\pi$のとき　$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\dfrac{\pi}{2}-\alpha\leqq 0$，$0\leqq 2\beta\leqq 2\pi$なので，

$2\beta_1=-\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$，$2\beta_2=2\pi+\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$より，$\beta_1=-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}$，$\beta_2=\dfrac{5}{4}\pi-\dfrac{\alpha}{2}$

(i)(ii)より，$0\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{2}$のとき，$\alpha+\dfrac{\beta_1}{2}+\dfrac{\beta_2}{3}=\alpha+\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{\alpha}{4}+\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{6}=\dfrac{11}{12}\alpha+\dfrac{3}{8}\pi$

$$\frac{3}{8}\pi\leqq\alpha+\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{3}<\frac{11}{12}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{3}{8}\pi=\frac{5}{6}\pi \cdots\cdots\cdots④$$

また，$\dfrac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq\pi$のとき，$\alpha+\dfrac{\beta_1}{2}+\dfrac{\beta_2}{3}=\alpha-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\alpha}{4}+\dfrac{5}{12}\pi-\dfrac{\alpha}{6}=\dfrac{13}{12}\alpha+\dfrac{7}{24}\pi$

$$\frac{5}{6}\pi=\frac{13}{12}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{7}{24}\pi\leqq\alpha+\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{3}\leqq\frac{13}{12}\pi+\frac{7}{24}\pi=\frac{11}{8}\pi \cdots\cdots\cdots⑤$$

よって，$0\leqq\alpha\leqq\pi$のとき，④⑤より，$\dfrac{3}{8}\pi\leqq\alpha+\dfrac{\beta_1}{2}+\dfrac{\beta_2}{3}\leqq\dfrac{11}{8}\pi$である。

これより，$y=\sin\left(\alpha+\dfrac{\beta_1}{2}+\dfrac{\beta_2}{3}\right)$が最大となるのは，$\alpha+\dfrac{\beta_1}{2}+\dfrac{\beta_2}{3}=\dfrac{\pi}{2}$のときで，

$$\frac{11}{12}\alpha+\frac{3}{8}\pi=\frac{\pi}{2},\ \alpha=\frac{3}{22}\pi$$

このとき，最大値は$y=1$である。

[解　説]

[2]はセンター試験としては，従来のレベルを超えています。一昨年と異なり，本年は，誘導がつけられていません。

第２問

問題のページへ

(1)　$C: y = x^3$ に対し，$y' = 3x^2$ より，点 $\mathrm{P}(a,\ a^3)$ における接線の方程式は,

$$y - a^3 = 3a^2(x-a),\quad y = 3a^2x - 2a^3 \cdots\cdots\cdots(*)$$

また，$D: y = x^2 + px + q$ に対し，$y' = 2x + p$ より，P における接線の方程式は,

$$y - (a^2 + pa + q) = (2a+p)(x-a),\quad y = (2a+p)x - a^2 + q \cdots\cdots\cdots(**)$$

$(*)$と$(**)$が一致することより，$3a^2 = 2a + p$，$-2a^3 = -a^2 + q$

$$p = 3a^2 - 2a,\quad q = -2a^3 + a^2 \cdots\cdots\cdots①$$

(2)　①から，$D: y = x^2 + (3a^2 - 2a)x + (-2a^3 + a^2)$ となり，点 $\mathrm{Q}(0,\ b)$ を通るとき,

$$b = -2a^3 + a^2 \cdots\cdots\cdots②$$

さて，$f(x) = -2x^3 + x^2$ とおくと，②は，$b = f(a)$ となり,

$$f'(x) = -6x^2 + 2x = -2x(3x-1)$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$\frac{1}{27}$	↘

右表より，$f(x)$は，$x = 0$ で極小値 0 をとり，$x = \frac{1}{3}$ で極大値 $\frac{1}{27}$ をとる。

すると，$0 < b < \frac{1}{27}$ のとき，②を満たす a の値の個数は 3 となる。

(3)　D が x 軸に接するのは，$x^2 + (3a^2 - 2a)x + (-2a^3 + a^2) = 0$ に対し,

$$D = (3a^2 - 2a)^2 - 4(-2a^3 + a^2) = a^3(9a - 4) = 0$$

よって，$a = 0,\ \frac{4}{9}$ であり，この場合に, D はそれぞれ,

$$D_1: y = x^2,\quad D_2: y = x^2 - \frac{8}{27}x + \left(\frac{4}{27}\right)^2 = \left(x - \frac{4}{27}\right)^2$$

すると，D_1 と D_2 の交点は，$x^2 = \left(x - \frac{4}{27}\right)^2$ から，$x = \frac{2}{27}$

以上より，D_1，D_2 と x 軸で囲まれた図形の面積 S は,

$$S = \int_0^{\frac{2}{27}} x^2 dx + \int_{\frac{2}{27}}^{\frac{4}{27}} \left(x - \frac{4}{27}\right)^2 dx = 2\int_0^{\frac{2}{27}} x^2 dx = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{27}\right)^3 = \frac{2^4}{3^{10}}$$

［解 説］

微積分は穏やかな問題です。ただ, (2)と(3)は関連がありません。

第３問

問題のページへ

等差数列$\{a_n\}$の公差をdとすると，$a_2=-\frac{7}{3}$　$a_5=-\frac{25}{3}$より，

$$a_1+d=-\frac{7}{3},\ a_1+4d=-\frac{25}{3}$$

よって，$d=-2$，$a_1=-\frac{1}{3}$となり，$a_n=-\frac{1}{3}-2(n-1)=-2n+\frac{5}{3}$

$$S_n=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}-2n+\frac{5}{3}\right)n=-n^2+\frac{2}{3}n$$

さて，$\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{4}{3}b_n+S_n$……①に，$n=1$を代入すると，$b_1=\frac{4}{3}b_1+S_1$から，

$$\frac{1}{3}b_1+a_1=0,\ b_1=-3a_1=1$$

さらに，$\sum_{k=1}^{n+1}b_k=\sum_{k=1}^{n}b_k+b_{n+1}$から，$\frac{4}{3}b_{n+1}+S_{n+1}=\frac{4}{3}b_n+S_n+b_{n+1}$

$$\frac{1}{3}b_{n+1}=\frac{4}{3}b_n-(S_{n+1}-S_n),\ b_{n+1}=4b_n-3a_{n+1}$$

すると，$a_{n+1}=-2n-\frac{1}{3}$から，$b_{n+1}=4b_n+6n+1$………(＊)

ここで, (＊)を満たす１つの数列を，$b_n=\alpha n+\beta$とおくと，

$$\alpha(n+1)+\beta=4(\alpha n+\beta)+6n+1$$

任意のnで成り立つ条件は，$\alpha=4\alpha+6$，$\alpha+\beta=4\beta+1$から，$\alpha=-2$，$\beta=-1$

$$-2(n+1)-1=4(-2n-1)+6n+1\text{………(＊＊)}$$

(＊), (＊＊)の両辺の差をとって，$b_{n+1}+2(n+1)+1=4(b_n+2n+1)$

ここで，$c_n=b_n+2n+1$……②とおくと，$c_{n+1}=4c_n$となる。

よって，数列$\{c_n\}$は公比が４の等比数列となり，$c_1=b_1+2+1=4$なので，

$$c_n=4\cdot 4^{n-1}=4^n$$

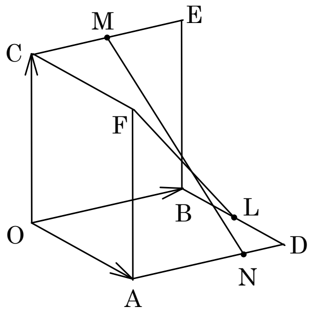
したがって，②より，$b_n=c_n-2n-1=4^n-2n-1$

［解　説］

これまで出題のなかったタイプの漸化式です。「ピンポイント レクチャー」に，上の誘導と同じ解法で説明をしていますので，参照してください。

第４問

問題のページへ



まず，条件より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ ………(＊)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{b}+\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\vec{a}+\vec{c}$ で，線分 BD の中点を L, 線分 CE の中点を M, 線分 AD を $3:1$ に内分する点を N とするので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{ON}}=\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$$

(2) 線分 FL を $s:(1-s)$ に内分する点を P とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OF}}+s\overrightarrow{\mathrm{OL}}$$
$$=(1-s)(\vec{a}+\vec{c})+s\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}\right)=\left(1-\frac{s}{2}\right)\vec{a}+s\vec{b}+(1-s)\vec{c}$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\left(1-\frac{s}{2}\right)\vec{a}+\left(s-\frac{1}{2}\right)\vec{b}-s\vec{c}$

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}-\vec{c}$$

ここで，k を定数として，$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=k\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ とおくと，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が 1 次独立より，

$$1-\frac{s}{2}=k,\ s-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}k,\ -s=-k$$

この 3 式は，$s=k=\frac{2}{3}$ で成立することより，$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ となり，M, N, P は一直線上にあることから，2 直線 FL, MN は交わっている。

(3) 2 直線 FL, MN の交点 G は，(2)より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\left(1-\frac{1}{3}\right)\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\left(1-\frac{2}{3}\right)\vec{c}=\frac{1}{3}(2\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{GF}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c})$$

さて，$|\vec{a}|=\sqrt{5}$，$|\vec{b}|=4$，$|\vec{c}|=\sqrt{3}$ のとき，(＊)を利用すると，

$$|\overrightarrow{\mathrm{GF}}|=\frac{1}{3}\sqrt{5+4\cdot16+4\cdot3}=3$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{GM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{6}(-4\vec{a}-\vec{b}+4\vec{c})$ から，

$$|\overrightarrow{\mathrm{GM}}|=\frac{1}{6}\sqrt{16\cdot5+16+16\cdot3}=2$$

次に，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\vec{c}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}\left\{-2\vec{a}-2\vec{b}+(3t-1)\vec{c}\right\}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{GF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\frac{1}{9}\left\{-2\cdot5+4\cdot16+2(3t-1)\cdot3\right\}=2t+\frac{16}{3}\ \cdots\cdots\cdots①$$
$$\overrightarrow{\mathrm{GM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\frac{1}{18}\left\{8\cdot5+2\cdot16+4(3t-1)\cdot3\right\}=2t+\frac{10}{3}\ \cdots\cdots\cdots②$$

さらに，$\angle\mathrm{FGH}=\angle\mathrm{MGH}$ のとき，$\cos\angle\mathrm{FGH}=\cos\angle\mathrm{MGH}$ から，

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{GF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}}{|\overrightarrow{\mathrm{GF}}||\overrightarrow{\mathrm{GH}}|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{GM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}}{|\overrightarrow{\mathrm{GM}}||\overrightarrow{\mathrm{GH}}|},\ \frac{\overrightarrow{\mathrm{GF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}}{3}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{GM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}}{2}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{GF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{GM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}$………③

①②③より，$2t+\dfrac{16}{3}=\dfrac{3}{2}\left(2t+\dfrac{10}{3}\right)$となり，$t=\dfrac{1}{3}$である。

［解 説］

何とも言いがたいほどの計算量です。配点を考えると，制限時間は 12 分ですが，これでは不足するのが普通です。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{GM}}$の絡んでいる部分は，計算結果が問題文中に記してあり，勢いがそがれてしまいます。もっとも，この形式，今年が最初というわけではありませんが。