第１問

解答解説のページへ

[1]　$A=\dfrac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$，$B=\dfrac{1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ とする。このとき

$$AB=\frac{1}{(1+\sqrt{6})^2-\boxed{\text{ア}}}=\frac{\sqrt{6}-\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

であり，また，$\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}=\boxed{\text{エ}}+\boxed{\text{オ}}\sqrt{6}$ である。以上により

$$A+B=\frac{\boxed{\text{カ}}-\sqrt{6}}{\boxed{\text{キ}}}$$

となる。

[2]　三角形に関する条件 p, q, r を次のように定める。

p： 3 つの内角がすべて異なる　　　　q： 直角三角形でない

r： 45° の内角は 1 つもない

条件 p の否定を $\overline{p}$ で表し，同様に $\overline{q}$，$\overline{r}$ はそれぞれ条件 q, r の否定を表すものとする。

(1)　命題「$r \Longrightarrow$ (p または q)」の対偶は「$\boxed{\text{ク}} \Longrightarrow \overline{r}$」である。$\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから 1 つ選べ。

⓪　(p かつ q)　　　　①　($\overline{p}$ かつ $\overline{q}$)

②　($\overline{p}$ または q)　　　　③　($\overline{p}$ または $\overline{q}$)

(2)　次の⓪～④のうち，命題「(p または q) $\Longrightarrow$ r」に対する反例となっている三角形は $\boxed{\text{ケ}}$ と $\boxed{\text{コ}}$ である。$\boxed{\text{ケ}}$ と $\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，⓪～④のうちから 1 つずつ選べ。ただし，$\boxed{\text{ケ}}$ と $\boxed{\text{コ}}$ の解答の順序は問わない。

⓪　直角二等辺三角形　　　　①　内角が 30°，45°，105° の三角形

②　正三角形　　　　③　3 辺の長さが 3, 4, 5 の三角形

④　頂角が 45° の二等辺三角形

(3)　r は(p または q)であるための $\boxed{\text{サ}}$。$\boxed{\text{サ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから 1 つ選べ。

⓪　必要十分条件である

①　必要条件であるが，十分条件でない

②　十分条件であるが，必要条件でない

③　必要条件でも十分条件でもない

第２問

解答解説のページへ

座標平面上にある点 P は，点 A$(-8,\ 8)$ から出発して，直線 $y=-x$ 上を x 座標が 1 秒あたり 2 増加するように一定の速さで動く。また，同じ座標平面上にある点 Q は，点 P が A を出発すると同時に原点 O から出発して，直線 $y=10x$ 上を x 座標が 1 秒あたり 1 増加するように一定の速さで動く。出発してから t 秒後の 2 点 P，Q を考える。点 P が O に到達するのは $t=\boxed{\text{ア}}$ のときである。以下，$0<t<\boxed{\text{ア}}$ で考える。

(1) 点 P と x 座標が等しい x 軸上の点を P$'$，点 Q と x 座標が等しい x 軸上の点を Q$'$ とおく。△OPP$'$ と△OQQ$'$ の面積の和 S を t で表せば

$$S=\boxed{\text{イ}}\,t^2-\boxed{\text{ウエ}}\,t+\boxed{\text{オカ}}$$

となる。これより $0<t<\boxed{\text{ア}}$ においては，$t=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ で S は最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ケコサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ をとる。

次に，a を $0<a<\boxed{\text{ア}}-1$ を満たす定数とする。以下，$a\leqq t\leqq a+1$ における S の最小・最大について考える。

(i) S が $t=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ で最小になるような a の値の範囲は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\leqq a\leqq\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

(ii) S が $t=a$ で最大となるような a の値の範囲は $0<a\leqq\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。

(2) 3 点 O，P，Q を通る 2 次関数のグラフが関数 $y=2x^2$ のグラフを平行移動したものになるのは，$t=\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ のときであり，x 軸方向に $\dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$，$y$ 軸方向に $\dfrac{\boxed{\text{ノハヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}$ だけ平行移動すればよい。

第３問

解答解説のページへ

点 O を中心とする半径 3 の円 O と，点 O を通り，点 P を中心とする半径 1 の円 P を考える。円 P の点 O における接線と円 O との交点を A, B とする。また，円 O の周上に，点 B と異なる点 C を，弦 AC が円 P に接するようにとる。弦 AC と円 P の接点を D とする。このとき

$$\mathrm{AP}=\sqrt{\boxed{\text{アイ}}}\,,\quad \mathrm{OD}=\frac{\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

である。さらに，$\cos\angle\mathrm{OAD}=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ であり，$\mathrm{AC}=\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

△ABC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{シスセ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ であり，△ABC の内接円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

(1) 円 O の周上に，点 E を線分 CE が円 O の直径となるようにとる。△ABC の内接円の中心を Q とし，△CEA の内接円の中心を R とする。このとき，$\mathrm{QR}=\dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。したがって，内接円 Q と内接円 R は $\boxed{\text{ニ}}$。$\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから 1 つ選べ。

⓪ 内接する　① 異なる 2 点で交わる
② 外接する　③ 共有点をもたない

(2) $\mathrm{AQ}=\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}\sqrt{\boxed{\text{ネノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ であるから，$\mathrm{PQ}=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ヒフ}}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$ となる。したがって，$\boxed{\text{ホ}}$。$\boxed{\text{ホ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから 1 つ選べ。

⓪ 点 P は内接円 Q の周上にある
① 点 Q は円 P の周上にある
② 点 P は内接円 Q の内部にあり，点 Q は円 P の内部にある
③ 点 P は内接円 Q の内部にあり，点 Q は円 P の外部にある

第４問

解答解説のページへ

(1) 1 から 4 までの数字を，重複を許して並べてできる 4 桁の自然数は，全部で $\boxed{アイウ}$個ある。

(2) (1)の$\boxed{アイウ}$個の自然数のうちで，1 から 4 までの数字を重複なく使ってできるものは$\boxed{エオ}$個ある。

(3) (1)の$\boxed{アイウ}$個の自然数のうちで，1331 のように，異なる 2 つの数字を 2 回ずつ使ってできるものの個数を，次の考え方に従って求めよう。

(i) 1 から 4 までの数字から異なる 2 つを選ぶ。この選び方は$\boxed{カ}$通りある。

(ii) (i)で選んだ数字のうち小さい方を，一・十・百・千の位のうち，どの 2 箇所に置くか決める。置く 2 箇所の決め方は$\boxed{キ}$通りある。小さい方の数字を置く場所を決めると，大きい方の数字を置く場所は残りの 2 箇所に決まる。

(iii) (i)と(ii)より，求める個数は$\boxed{クケ}$個である。

(4) (1)の$\boxed{アイウ}$個の自然数を，それぞれ別々のカードに書く。できた$\boxed{アイウ}$枚のカードから 1 枚引き，それに書かれた数の 4 つの数字に応じて，得点を次のように定める。

・4 つとも同じ数字のとき	9 点
・2 回現れる数字が 2 つあるとき	3 点
・3 回現れる数字が 1 つと，1 回だけ現れる数字が 1 つあるとき	2 点
・2 回現れる数字が 1 つと，1 回だけ現れる数字が 2 つあるとき	1 点
・数字の重複がないとき	0 点

(i) 得点が 9 点となる確率は $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サシ}}$，得点が 3 点となる確率は $\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セソ}}$ である。

(ii) 得点が 2 点となる確率は $\dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チツ}}$，得点が 1 点となる確率は $\dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{トナ}}$ である。

(iii) 得点の期待値は $\dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$ 点である。

第１問

問題のページへ

[1] $A=\dfrac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$，$B=\dfrac{1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ に対して，

$$AB=\frac{1}{(1+\sqrt{6})^2-3}=\frac{1}{2(2+\sqrt{6})}=\frac{\sqrt{6}-2}{4}$$

また，$\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}=(1+\sqrt{3}+\sqrt{6})+(1-\sqrt{3}+\sqrt{6})=2+2\sqrt{6}$ となるので，

$$A+B=AB\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)=\frac{\sqrt{6}-2}{4}\cdot(2+2\sqrt{6})=\frac{4-\sqrt{6}}{2}$$

[2] (1) 命題「$r \Longrightarrow (p$ または $q)$」の対偶は，「$(\overline{p}$ かつ $\overline{q}) \Longrightarrow \overline{r}$」である。

(2) 命題「$(p$ または $q) \Longrightarrow r$」に対して，「$(p$ または $q)$かつ $\overline{r}$」の例を考える。

ここで，$(p$ または $q)$は「3 つの内角がすべて異なるか，または直角の内角がない三角形」，$\overline{r}$ は「少なくとも 1 つの内角が $45°$ の三角形」を意味する。

これより，命題「$(p$ または $q) \Longrightarrow r$」の反例は，内角が $30°$，$45°$，$105°$ の三角形，および頂角が $45°$ の二等辺三角形である。

(3) まず，$(\overline{p}$ かつ $\overline{q})$は「直角二等辺三角形」を意味するので，命題「$(\overline{p}$ かつ $\overline{q}) \Longrightarrow \overline{r}$」は真となり，(1)より，その対偶「$r \Longrightarrow (p$ または $q)$」も真である。

次に，(2)より，命題「$(p$ または $q) \Longrightarrow r$」は偽である。

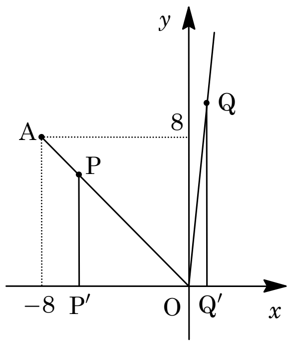
これより，r は$(p$ または $q)$であるための十分条件であるが，必要条件でない。

［解 説］

無理数の計算と命題と条件についての頻出題です。いずれも誘導が細かくつけられています。

第２問

問題のページへ



条件より，出発してから t 秒後の 2 点 P, Q の位置は，

$$\mathrm{P}(-8+2t,\ 8-2t),\ \mathrm{Q}(t,\ 10t)$$

点 P が O に到達するのは，$-8+2t=0$ より，

$$t=4$$

(1)　$0<t<4$ において $\triangle\mathrm{OPP'}=\dfrac{1}{2}(8-2t)^2=2t^2-16t+32$，

$\triangle\mathrm{OQQ'}=\dfrac{1}{2}\cdot 10t^2=5t^2$ となるので，その和 S は，

$$S=7t^2-16t+32=7\left(t-\frac{8}{7}\right)^2+\frac{160}{7}$$

よって，$t=\dfrac{8}{7}$ のとき，S は最小値 $\dfrac{160}{7}$ をとる。

次に，$0<a<3$ を満たす a に対し，$a\leqq t\leqq a+1$ における S について，

(i)　S が $t=\dfrac{8}{7}$ で最小となる a の値の範囲は，$a\leqq\dfrac{8}{7}\leqq a+1$ より，$\dfrac{1}{7}\leqq a\leqq\dfrac{8}{7}$

(ii)　S が $t=a$ で最大となる a の値の範囲は，$a+\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{8}{7}$ より，$0<a\leqq\dfrac{9}{14}$

(2)　条件より，求める 2 次関数を $y=2x^2+bx$ とおくと，グラフが P, Q を通るので，

$$8-2t=2(-8+2t)^2+b(-8+2t)\cdots\cdots\cdots①,\ 10t=2t^2+bt\cdots\cdots\cdots②$$

$0<t<4$ から，①より，$-1=2(-8+2t)+b$，$4t+b=15\cdots\cdots\cdots③$

②より，$10=2t+b$ となり，③と合わせると，$t=\dfrac{5}{2}$

このとき，$b=5$ となり，求める 2 次関数は，

$$y=2x^2+5x=2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$$

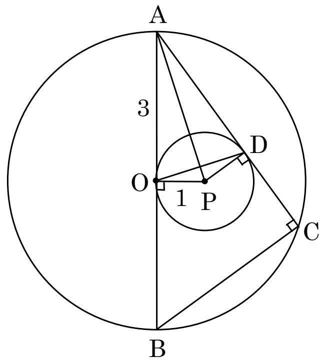
すると，$y=2x^2$ のグラフを，x 軸方向に $-\dfrac{5}{4}$，y 軸方向に $-\dfrac{25}{8}$ だけ平行移動したものとなる。

［解　説］

最初の設定が従来と異なりますが，内容は基本的です。最大・最小についても，定義域が変動するタイプなので，図による判断が容易です。

第3問

問題のページへ



右図より，$\mathrm{AP}=\sqrt{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OP}^2}=\sqrt{10}$

$\mathrm{AO}=\mathrm{AD}=3$，$\mathrm{PO}=\mathrm{PD}=1$ より $\mathrm{AP}\perp\mathrm{OD}$ となり，

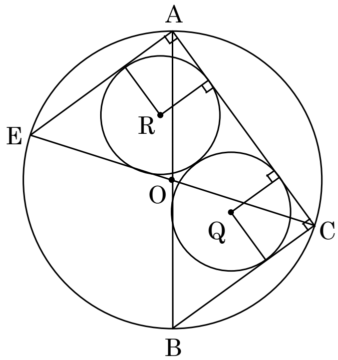
$$\frac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{OD}=\frac{1}{2}\mathrm{AO}\cdot\mathrm{PO}+\frac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\mathrm{PD}$$

よって，$\sqrt{10}\,\mathrm{OD}=6$ から，$\mathrm{OD}=\dfrac{6}{\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$ である。

余弦定理より，$\cos\angle\mathrm{OAD}=\dfrac{9+9-\dfrac{36}{10}}{2\cdot3\cdot3}=\dfrac{4}{5}$ となり，

$$\mathrm{AC}=2\mathrm{OA}\cos\angle\mathrm{OAD}=6\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{5}$$

すると，$\sin\angle\mathrm{OAD}=\dfrac{3}{5}$ より，$\mathrm{BC}=6\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{18}{5}$ となり，$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{24}{5}\cdot\dfrac{18}{5}=\dfrac{216}{25}$



さらに，$\triangle\mathrm{ABC}$ の内接円の半径を r とおくと，

$$\frac{1}{2}\left(6+\frac{24}{5}+\frac{18}{5}\right)r=\frac{216}{25},\quad r=\frac{216}{25}\cdot\frac{10}{72}=\frac{6}{5}$$

(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{AEC}$ は合同なので，内接円の半径はともに $r=\dfrac{6}{5}$ であり，

$$\mathrm{QR}=\mathrm{AC}-2r=\frac{24}{5}-\frac{12}{5}=\frac{12}{5}$$

すると，QR は内接円 Q と R の半径の和 $2r$ となり，Q と R は外接する。

(2) $\mathrm{AQ}^2=\left(\dfrac{24}{5}-\dfrac{6}{5}\right)^2+\left(\dfrac{6}{5}\right)^2=\dfrac{6^2\times10}{5^2}$ より，$\mathrm{AQ}=\dfrac{6\sqrt{10}}{5}$

ここで，点 P, Q はともに $\angle\mathrm{BAC}$ の二等分線上にあるので，

$$\mathrm{PQ}=\mathrm{AQ}-\mathrm{AP}=\frac{6}{5}\sqrt{10}-\sqrt{10}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

したがって，$\mathrm{PQ}<\dfrac{6}{5}$ より点 P は内接円 Q の内部にあり，$\mathrm{PQ}<1$ より点 Q は円 P の内部にある。

［解 説］

三角比と平面図形の融合です。特筆すべきは，2 番目の空欄 OD を求める箇所です。上の解答例では，四角形 AOPD の面積を媒介にして求めましたが，それ以外にも直角三角形の相似を利用する手もあります。いずれにせよ，ここが本問の関所です。通過できなければ悲惨な状況になってしまいます。

第４問

問題のページへ

(1) 1から4までの数字を，重複を許して並べてできる4桁の自然数は，

$4^4=256$ 個

(2) 1から4までの数字を，重複なく並べてできる4桁の自然数は，

$4!=24$ 個

(3) (i) 1から4までの数字から異なる2つを選ぶ方法は，${}_4\mathrm{C}_2=6$ 通りある。

(ii) (i)で，小さい方の数字を2箇所に置く方法は ${}_4\mathrm{C}_2=6$ 通り，残りの2箇所には大きい方の数字を置く。

(iii) 異なる2つの数字を2回ずつ使ってできる自然数の個数は，$6\times6=36$ である。

(4) (i) 4つとも同じ数字のときは4通りで，得点が9点となる確率は $\dfrac{4}{256}=\dfrac{1}{64}$。

2回現れる数字が2つあるときは，(3)より36通りで，得点が3点となる確率は $\dfrac{36}{256}=\dfrac{9}{64}$ である。

(ii) 3回現れる数字が1つと，1回だけ現れる数字が1つあるときは，数字の選ぶ方法が ${}_4\mathrm{P}_2=12$ 通りで，選んだ数字の置き方が4通りずつより，$12\times4=48$ 通りである。すると，得点が2点となる確率は $\dfrac{48}{256}=\dfrac{3}{16}$ である。

また，数字の重複がないときは，(2)より24通りなので，2回現れる数字が1つと，1回だけ現れる数字が2つあるときは，$256-(4+36+48+24)=144$ 通りとなる。すると，得点が1点となる確率は $\dfrac{144}{256}=\dfrac{9}{16}$ である。

(iii) 得点の期待値は，(i)(ii)より，

$$9\times\frac{1}{64}+3\times\frac{9}{64}+2\times\frac{3}{16}+1\times\frac{9}{16}+0\times\frac{24}{256}=\frac{3}{2}$$

［解 説］

確率の基本問題です。第1問と同じように，誘導が非常にていねいです。