第１問

解答解説のページへ

[1]　$a=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$, $b=\dfrac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}$ とおく。

(1)　$ab=\boxed{\text{ア}}$, $a+b=\boxed{\text{イ}}\left(\boxed{\text{ウエ}}+\sqrt{\boxed{\text{オ}}}\right)$,

$a^2+b^2=\boxed{\text{カ}}\left(\boxed{\text{キ}}-\sqrt{\boxed{\text{ク}}}\right)$である。

(2)　$ab=\boxed{\text{ア}}$と$a^2+b^2+4(a+b)=\boxed{\text{ケコ}}$から，$a$は

$$a^4+\boxed{\text{サ}}a^3-\boxed{\text{シス}}a^2+\boxed{\text{セ}}a+\boxed{\text{ソ}}=0$$

を満たすことがわかる。

[2]　集合 U を$U=\{n\mid n$は$5<\sqrt{n}<6$を満たす自然数$\}$で定め，また，Uの部分集合 P, Q, R, S を次のように定める。

$P=\{n\mid n\in U$かつnは4の倍数$\}$，$Q=\{n\mid n\in U$かつnは5の倍数$\}$

$R=\{n\mid n\in U$かつnは6の倍数$\}$，$S=\{n\mid n\in U$かつnは7の倍数$\}$

全体集合を U とする。集合 P の補集合を$\overline{P}$で表し，同様に Q, R, S の補集合をそれぞれ$\overline{Q}$，$\overline{R}$，$\overline{S}$で表す。

(1)　Uの要素の個数は$\boxed{\text{タチ}}$個である。

(2)　次の⓪～④で与えられた集合のうち，空集合であるものは，$\boxed{\text{ツ}}$, $\boxed{\text{テ}}$である。$\boxed{\text{ツ}}$, $\boxed{\text{テ}}$に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから 1 つずつ選べ。ただし，$\boxed{\text{ツ}}$, $\boxed{\text{テ}}$の解答の順序は問わない。

⓪　$P\cap R$　　①　$P\cap S$　　②　$Q\cap R$　　③　$P\cap\overline{Q}$　　④　$R\cap\overline{Q}$

(3)　集合 X が集合 Y の部分集合であるとき，$X\subset Y$ と表す。このとき，次の⓪～④のうち，部分集合の関係について成り立つものは$\boxed{\text{ト}}$, $\boxed{\text{ナ}}$である。$\boxed{\text{ト}}$, $\boxed{\text{ナ}}$に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから 1 つずつ選べ。ただし，$\boxed{\text{ト}}$, $\boxed{\text{ナ}}$の解答の順序は問わない。

⓪　$P\cup R\subset\overline{Q}$　　①　$S\cap\overline{Q}\subset P$　　②　$\overline{Q}\cap\overline{S}\subset\overline{P}$

③　$\overline{P}\cup\overline{Q}\subset\overline{S}$　　④　$\overline{R}\cap\overline{S}\subset\overline{Q}$

第２問

解答解説のページへ

a を定数とし，x の 2 次関数 $y = x^2 + 2ax + 3a^2 - 6a - 36$ ……①のグラフを G とする。G の頂点の座標は，$\left(\boxed{ア}\,a,\ \boxed{イ}\,a^2 - \boxed{ウ}\,a - \boxed{エオ} \right)$ である。G と y 軸との交点の y 座標を p とする。

(1) $p = -27$ のとき，a の値は $a = \boxed{カ}$，$\boxed{キク}$ である。$a = \boxed{カ}$ のときの①のグラフを x 軸方向に $\boxed{ケ}$，y 軸方向に $\boxed{コ}$ だけ平行移動すると，$a = \boxed{キク}$ のときの①のグラフに一致する。

(2) 下の $\boxed{ス}$，$\boxed{セ}$，$\boxed{ノ}$，$\boxed{ハ}$ には，次の⓪～③のうちから当てはまるものを 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ $>$　　① $<$　　② $\geqq$　　③ $\leqq$

G が x 軸と共有点をもつような a の値の範囲を表す不等式は

$$\boxed{サシ}\ \boxed{ス}\ a\ \boxed{セ}\ \boxed{ソ} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

である。a が②の範囲にあるとき，p は，$a = \boxed{タ}$ で最小値 $\boxed{チツテ}$ をとり，$a = \boxed{ト}$ で最大値 $\boxed{ナニ}$ をとる。

G が x 軸と共有点をもち，さらにそのすべての共有点の x 座標が -1 より大きくなるような a の値の範囲を表す不等式は

$$\boxed{ヌネ}\ \boxed{ノ}\ a\ \boxed{ハ}\ \frac{\boxed{ヒフ}}{\boxed{ヘ}}$$

である。

第３問

解答解説のページへ

△ABC は， AB＝4 ， BC＝2 ， $\cos\angle ABC=\dfrac{1}{4}$ を満たすとする。このとき，

CA＝$\boxed{\text{ア}}$, $\cos\angle BAC=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$， $\sin\angle BAC=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ であり，△ABC の外接円 O の半径は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ である。∠ABC の二等分線と∠BAC の二等分線の交点を D, 直線 BD と辺 AC の交点を E, 直線 BD と円 O との交点で B と異なる交点を F とする。

(1) このとき，AE＝$\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$， BE＝$\dfrac{\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソタ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$， BD＝$\dfrac{\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$

となる。

(2) △EBC の面積は△EAF の面積の $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ 倍である。

(3) 角度に注目すると，線分 FA, FC, FD の関係で正しいのは $\boxed{\text{ネ}}$ であることがわかる。$\boxed{\text{ネ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから１つ選べ。

⓪ FA＜FC＝FD　　① FA＝FC＜FD　　② FC＜FA＝FD

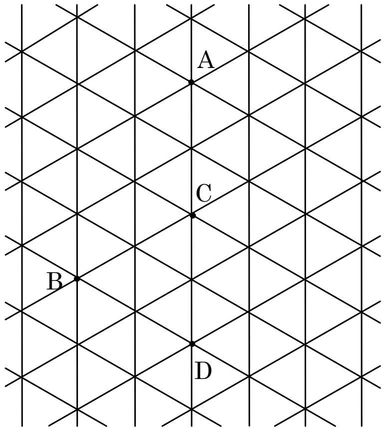
③ FD＜FC＜FA　　④ FA＝FC＝FD　　⑤ FD＜FC＝FA

第４問

解答解説のページへ

右の図は，ある町の街路図の一部である。

ある人が，交差点 A から出発し，次の規則に従って，交差点から隣の交差点への移動を繰り返す。

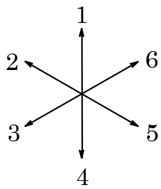


① 街路上のみを移動する。

② 出発前にサイコロを投げ，出た目に応じて図の 1～6 の矢印の方向の隣の交差点に移動する。

③ 交差点に達したら，再びサイコロを投げ，出た目に応じて図の 1～6 の矢印の方向の隣の交差点に移動する。（一度通った道を引き返すこともできる。）

④ 交差点に達するたびに，③と同じことを繰り返す。



(1) 交差点 A を出発し，4 回移動して交差点 B にいる移動の仕方について考える。この場合，3 の矢印の方向の移動と 4 の矢印の方向の移動をそれぞれ 2 回ずつ行うので，このような移動の仕方は $\boxed{ア}$ 通りある。

(2) 交差点 A を出発し，3 回移動して交差点 C にいる移動の仕方は $\boxed{イ}$ 通りある。

(3) 交差点 A を出発し，6 回移動することを考える。このとき，交差点 A を出発し，3 回の移動が終わった時点で交差点 C にいて，次に 3 回移動して交差点 D にいる移動の仕方は $\boxed{ウエ}$ 通りあり，その確率は $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カキクケ}}$ である。

(4) 交差点 A を出発し，6 回移動して交差点 D にいる移動の仕方について考える。

・ 1 の矢印の向きの移動を含むものは $\boxed{コ}$ 通りある。

・ 2 の矢印の向きの移動を含むものは $\boxed{サシ}$ 通りある。

・ 6 の矢印の向きの移動を含むものも $\boxed{サシ}$ 通りある。

・ 上記 3 つ以外の場合，4 の矢印の向きの移動は $\boxed{ス}$ 回だけに決まるので，移動の仕方は $\boxed{セソ}$ 通りある。

よって，交差点 A を出発し，6 回移動して交差点 D にいる移動の仕方は $\boxed{タチツ}$ 通りある。

第１問

問題のページへ

[1] (1) $a=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$, $b=\dfrac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}$ に対して，$ab=\dfrac{1-3}{1-2}=2$ ………①

$$a+b=\frac{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{2})}{1-2}=-(2-2\sqrt{6})=2(-1+\sqrt{6})$$

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=4(7-2\sqrt{6})-4=8(3-\sqrt{6})$$

(2) $a^2+b^2+4(a+b)=8(3-\sqrt{6})+8(-1+\sqrt{6})=16$ ………②

②に，①から $b=\dfrac{2}{a}$ を代入すると，$a^2+\dfrac{4}{a^2}+4\left(a+\dfrac{2}{a}\right)=16$ となり，

$$a^4+4+4a^3+8a=16a^2,\ a^4+4a^3-16a^2+8a+4=0$$

[2] (1) $U=\{n\mid n\text{は}5<\sqrt{n}<6\text{を満たす自然数}\}$ より，$25<n<36$ となるので，

$$U=\{26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35\}$$

よって，U の要素の個数は 10 個である。

(2) 条件より，$P=\{n\mid n\in U\text{かつ}n\text{は}4\text{の倍数}\}$，$Q=\{n\mid n\in U\text{かつ}n\text{は}5\text{の倍数}\}$

$R=\{n\mid n\in U\text{かつ}n\text{は}6\text{の倍数}\}$，$S=\{n\mid n\in U\text{かつ}n\text{は}7\text{の倍数}\}$

これより，$P=\{28,\ 32\}$，$Q=\{30,\ 35\}$，$R=\{30\}$，$S=\{28,\ 35\}$ となり，

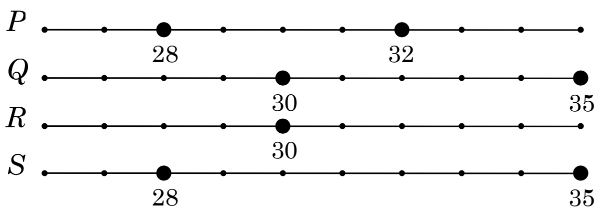
$P\cap R=\phi$

$P\cap S=\{28\}$

$Q\cap R=\{30\}$

$P\cap\overline{Q}=\{28,\ 32\}$

$R\cap\overline{Q}=\phi$



(3) $P\cup R=\{28,\ 30,\ 32\}$ より $P\cup R\not\subset\overline{Q}$，$S\cap\overline{Q}=\{28\}$ より $S\cap\overline{Q}\subset P$

$\overline{Q}\cap\overline{S}=\overline{Q\cup S}=\{26,\ 27,\ 29,\ 31,\ 32,\ 33,\ 34\}$ より $\overline{Q}\cap\overline{S}\not\subset\overline{P}$

$\overline{P}\cup\overline{Q}=\overline{P\cap Q}=U$ より $\overline{P}\cup\overline{Q}\not\subset\overline{S}$

$\overline{R}\cap\overline{S}=\overline{R\cup S}=\{26,\ 27,\ 29,\ 31,\ 32,\ 33,\ 34\}$ より $\overline{R}\cap\overline{S}\subset\overline{Q}$

［解 説］

無理数の計算と集合という小問の 2 題構成です。[2]の(3)では，ド・モルガンの法則を利用せずに，数直線を見ながら判断しても OK です。

第２問

問題のページへ

$y=x^2+2ax+3a^2-6a-36$ ……①に対して，$y=(x+a)^2+2a^2-6a-36$ より，①のグラフ G の頂点の座標は，$(-a,\ 2a^2-6a-36)$ となる。

また，G と y 軸との交点の y 座標 p は，$p=3a^2-6a-36$ である。

(1)　$p=-27$ のとき，$3a^2-6a-36=-27$ より，$3a^2-6a-9=0$ から，

$a^2-2a-3=0$，$(a-3)(a+1)=0$

よって，$a=3,\ -1$ である。

ここで，$a=3$ のとき G の頂点の座標は $(-3,\ -36)$，$a=-1$ のとき G の頂点の座標は $(1,\ -28)$ なので，$a=3$ のときの①のグラフを x 軸方向に $1-(-3)=4$，y 軸方向に $-28-(-36)=8$ だけ平行移動すると，$a=-1$ のときのグラフに一致する。

(2)　G が x 軸と共有点をもつ条件は，$2a^2-6a-36\leqq 0$ より，$(a-6)(a+3)\leqq 0$ から，

$-3\leqq a\leqq 6$ ………②

このとき，$p=3(a-1)^2-39$ より，p は $a=1$ で最小値 -39，$a=6$ で最大値 36 をとる。

さらに，G と x 軸とのすべての共有点の x 座標が -1 より大きくなる条件は，

$-a>-1$，$a<1$ ………③

また，$f(x)=x^2+2ax+3a^2-6a-36$ とおくと，$f(-1)>0$ から，

$3a^2-8a-35>0$　，$(3a+7)(a-5)>0$

よって，$a<-\dfrac{7}{3}$，$5<a$ ………④

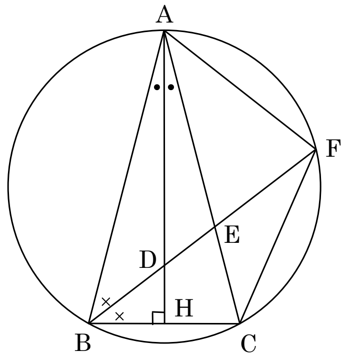
すると，②③④より，$-3\leqq a<-\dfrac{7}{3}$

［解 説］

2 次関数のグラフに関する基本的な問題です。そして，これまでも頻出してきたタイプです。

第３問

問題のページへ



$\triangle$ABC において，AB $=4$，BC $=2$，$\cos\angle \mathrm{ABC}=\dfrac{1}{4}$ から，A から BC に下ろした垂線の足を H とおくと，BH $=4\times\dfrac{1}{4}=1$ となり，H は辺 BC の中点である。

すると，$\triangle$ABC は二等辺三角形となり，

$$\mathrm{CA}=\mathrm{AB}=4$$

また，余弦定理より，$\cos\angle \mathrm{BAC}=\dfrac{4^2+4^2-2^2}{2\cdot 4\cdot 4}=\dfrac{7}{8}$，

$$\sin\angle \mathrm{BAC}=\sqrt{1-\frac{7^2}{8^2}}=\frac{\sqrt{15}}{8}$$

さらに，$\triangle$ABC の外接円 O の半径 R は，正弦定理より，

$$2R=\frac{2}{\frac{\sqrt{15}}{8}}=\frac{16}{\sqrt{15}},\quad R=\frac{8}{\sqrt{15}}=\frac{8\sqrt{15}}{15}$$

(1) BE は$\angle$ABC の二等分線より，AE : EC $=$ BA : BC $=4:2=2:1$ となり，

$$\mathrm{AE}=\frac{2}{3}\mathrm{AC}=\frac{8}{3}$$

ここで，$\triangle$ABE に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{BE}^2=4^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2-2\cdot 4\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{7}{8}=\frac{40}{9},\quad \mathrm{BE}=\frac{2\sqrt{10}}{3}$$

AD は$\angle$BAE の二等分線より，BD : DE $=$ AB : AE $=4:\dfrac{8}{3}=3:2$ から，

$$\mathrm{BD}=\frac{3}{5}\mathrm{BE}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

(2) $\triangle$EBC と$\triangle$EAF は，$\angle$EBC $=\angle$EAF，$\angle$BEC $=\angle$AEF より相似になる。

すると，$\triangle$EBC : $\triangle$EAF $=\mathrm{BE}^2:\mathrm{AE}^2=\dfrac{40}{9}:\dfrac{64}{9}=5:8$ となり，$\triangle$EBC の面積は$\triangle$EAF の面積の$\dfrac{5}{8}$倍となる。

(3) まず，$\angle$ABF $=\angle$CBF より，FA $=$ FC である。

また，$\angle$FAD $=\angle$FAE $+\angle$EAD $=\angle$CBF $+\angle$BAD $=\angle$ABD $+\angle$BAD $=\angle$ADF となり，FA $=$ FD である。

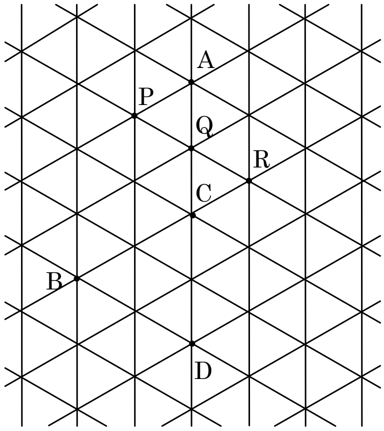
よって，FA $=$ FC $=$ FD となる。

［解 説］

三角比の平面図形への応用問題です。(3)では，問題文中の「角度に注目すると」に従えば，そのまま結論へと導かれます。

第４問

問題のページへ



(1) 4 回移動して A→B である場合は，3 の向きの移動，4 の向きの移動がそれぞれ 2 回ずつであるので，$\dfrac{4!}{2!\,2!}=6$ 通りある。

(2) 3 回移動して A→C である場合は，右図の交差点 P, Q, R に対して，

(i) A→P→C のとき　$1\times2=2$ 通り

(ii) A→Q→C のとき　$1\times2=2$ 通り

(iii) A→R→C のとき　$2\times1=2$ 通り

(i)～(iii)より，$2+2+2=6$ 通りある。

(3) 3 回移動して A→C である場合は，(2)より 6 通り，3 回移動して C→D である場合も，同様に考えて 6 通りとなる。

これより，6 回移動して A→C→D である場合は，$6\times6=36$ 通りあり，その確率は，$\dfrac{36}{6^6}=\dfrac{1}{1296}$ である。

(4) 6 回移動して A→D である移動の仕方は，

(i) 1 の向きの移動を含むとき

1 の向きの移動，4 の向きの移動が，それぞれ 1 回，5 回より，$\dfrac{6!}{5!}=6$ 通りある。

(ii) 2 の向きの移動を含むとき

2 の向きの移動, 4 の向きの移動, 5 の向きの移動が，それぞれ 1 回, 4 回, 1 回より，$\dfrac{6!}{4!}=30$ 通りある。

(iii) 6 の向きの移動を含むとき　(ii)と同様に 30 通りある。

(iv) 1, 2, 6 の向きの移動を含まないとき

3 の向きの移動，4 の向きの移動，5 の向きの移動が，それぞれ 2 回ずつであるので，$\dfrac{6!}{2!\,2!\,2!}=90$ 通りある。

(i)～(iv)より，求める移動の仕方は，$6+30+30+90=156$ 通りある。

［解 説］

場合の数と確率の問題です。(4)は(3)と切り離し，誘導にのっていく必要があります。また，問題文に「矢印の方向」と「矢印の向き」という言葉が混在し，ちょっと気になりました。