第１問

解答解説のページへ

[1]　O を原点とする座標平面において，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を中心とする円 C が，方程式 $y=\dfrac{4}{3}x$ で表される直線 l に接しているとする。

(1)　円 C の半径 r を求めよう。

点 P を通り直線 l に垂直な直線の方程式は，$y=-\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}(x-p)+q$ なので，P から l に引いた垂線と l の交点 Q の座標は

$$\left(\frac{3}{25}\left(\boxed{\text{ウ}}\,p+\boxed{\text{エ}}\,q\right),\ \frac{4}{25}\left(\boxed{\text{ウ}}\,p+\boxed{\text{エ}}\,q\right)\right)$$

となる。

求める C の半径 r は，P と l の距離 PQ に等しいので

$$r=\frac{1}{5}\left|\,\boxed{\text{オ}}\,p-\boxed{\text{カ}}\,q\,\right|\cdots\cdots\cdots①$$

である。

(2)　円 C が，x 軸に接し，点 $\mathrm{R}(2,\ 2)$ を通る場合を考える。このとき，$p>0$，$q>0$ である。C の方程式を求めよう。

C は x 軸に接するので，C の半径 r は q に等しい。したがって，①により，$p=\boxed{\text{キ}}\,q$ である。

C は点 R を通るので，求める C の方程式は

$$\left(x-\boxed{\text{ク}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{ケ}}\right)^2=\boxed{\text{コ}}\cdots\cdots\cdots②$$

または

$$\left(x-\boxed{\text{サ}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{シ}}\right)^2=\boxed{\text{ス}}\cdots\cdots\cdots③$$

であることがわかる。ただし，$\boxed{\text{コ}}<\boxed{\text{ス}}$ とする。

(3)　方程式②の表す円の中心を S，方程式③の表す円の中心を T とおくと，直線 ST は原点 O を通り，点 O は線分 ST を $\boxed{\text{セ}}$ する。$\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～⑤ のうちから１つ選べ。

⓪　1 : 1 に内分　　①　1 : 2 に内分　　②　2 : 1 に内分

③　1 : 1 に外分　　④　1 : 2 に外分　　⑤　2 : 1 に外分

[2]　自然数 $m,\ n$ に対して，不等式 $\log_2 m^3+\log_3 n^2\leqq 3$ ……④を考える。

$m=2$，$n=1$ のとき，$\log_2 m^3+\log_3 n^2=\boxed{\text{ソ}}$ であり，この $m,\ n$ の値の組は④を満たす。

$m=4$，$n=3$ のとき，$\log_2 m^3+\log_3 n^2=\boxed{\text{タ}}$ であり，この $m,\ n$ の値の組は④を満たさない。

不等式④を満たす自然数 m, n の組の個数を調べよう。④は

$$\log_2 m + \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \log_3 n \leqq \boxed{\text{テ}} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

と変形できる。

n が自然数のとき，$\log_3 n$ のとり得る最小の値は $\boxed{\text{ト}}$ であるから，⑤により，$\log_2 m \leqq \boxed{\text{テ}}$ でなければならない。$\log_2 m \leqq \boxed{\text{テ}}$ により，$m = \boxed{\text{ナ}}$ または $m = \boxed{\text{ニ}}$ でなければならない。ただし，$\boxed{\text{ナ}} < \boxed{\text{ニ}}$ とする。

$m = \boxed{\text{ナ}}$ の場合，⑤は，$\log_3 n \leqq \dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ となり，$n^2 \leqq \boxed{\text{ノハ}}$ と変形できる。

よって，$m = \boxed{\text{ナ}}$ のとき，⑤を満たす自然数 n のとり得る値の範囲は，$n \leqq \boxed{\text{ヒ}}$ である。したがって，$m = \boxed{\text{ナ}}$ の場合，④を満たす自然数 m, n の組の個数は $\boxed{\text{ヒ}}$ である。

同様にして，$m = \boxed{\text{ニ}}$ の場合，④を満たす自然数 m, n の組の個数は $\boxed{\text{フ}}$ である。

以上のことから，④を満たす自然数 m, n の組の個数は $\boxed{\text{ヘ}}$ である。

第２問

解答解説のページへ

p を実数とし，$f(x)=x^3-px$ とする。

(1) 関数 $f(x)$ が極値をもつための p の条件を求めよう。$f(x)$ の導関数は，$f'(x)=\boxed{\text{ア}}x^{\boxed{\text{イ}}}-p$ である。したがって，$f(x)$ が $x=a$ で極値をとるならば，$\boxed{\text{ア}}a^{\boxed{\text{イ}}}-p=\boxed{\text{ウ}}$ が成り立つ。さらに，$x=a$ の前後での $f'(x)$ の符号の変化を考えることにより，p が条件 $\boxed{\text{エ}}$ を満たす場合は，$f(x)$ は必ず極値をもつことがわかる。$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから１つ選べ。

⓪ $p=0$　　① $p>0$　　② $p\geqq 0$　　③ $p<0$　　④ $p\leqq 0$

(2) 関数 $f(x)$ が $x=\dfrac{p}{3}$ で極値をとるとする。また，曲線 $y=f(x)$ を C とし，C 上の点 $\left(\dfrac{p}{3},\ f\left(\dfrac{p}{3}\right)\right)$ を A とする。

$f(x)$ が $x=\dfrac{p}{3}$ で極値をとることから，$p=\boxed{\text{オ}}$ であり，$f(x)$ は $x=\boxed{\text{カキ}}$ で極大値をとり，$x=\boxed{\text{ク}}$ で極小値をとる。

曲線 C の接線で，点 A を通り傾きが 0 でないものを l とする。l の方程式を求めよう。l と C の接点の x 座標を b とすると，l は点 $(b,\ f(b))$ における C の接線であるから，l の方程式は b を用いて，$y=\left(\boxed{\text{ケ}}b^2-\boxed{\text{コ}}\right)(x-b)+f(b)$ と表すことができる。また，l は点 A を通るから，方程式 $\boxed{\text{サ}}b^3-\boxed{\text{シ}}b^2+1=0$ を得る。この方程式を解くと，$b=\boxed{\text{ス}}$，$\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ であるが，l の傾きが 0 でないことから，l の方程式は，$y=\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}x+\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

点 A を頂点とし，原点を通る放物線を D とする。l と D で囲まれた図形のうち，不等式 $x\geqq 0$ の表す領域に含まれる部分の面積 S を求めよう。D の方程式は，$y=\boxed{\text{ニ}}x^2-\boxed{\text{ヌ}}x$ であるから，定積分を計算することにより，

$S=\dfrac{\boxed{\text{ネノ}}}{24}$ となる。

第３問

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$の初項は 6 であり，$\{a_n\}$の階差数列は初項が 9，公差が 4 の等差数列である。

(1)　$a_2 = \boxed{アイ}$，$a_3 = \boxed{ウエ}$である。数列$\{a_n\}$の一般項を求めよう。$\{a_n\}$の階差数列の第 n 項が$\boxed{オ}\,n + \boxed{カ}$であるから，数列$\{a_n\}$の一般項は，

$$a_n = \boxed{キ}\,n^{\boxed{ク}} + \boxed{ケ}\,n + \boxed{コ} \cdots\cdots ①$$

である。

(2)　数列$\{b_n\}$は，初項が$\dfrac{2}{5}$で，漸化式 $b_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_{n+1} - 1} b_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \cdots\cdots ②$を満たすとする。$b_2 = \dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シス}}$である。数列$\{b_n\}$の一般項と初項から第 n 項までの和 S_n を求めよう。

①,②により，すべての自然数 n に対して，$b_{n+1} = \dfrac{\boxed{セ}\,n + \boxed{ソ}}{\boxed{セ}\,n + \boxed{タ}} b_n \cdots\cdots ③$

が成り立つことがわかる。ここで，$c_n = \left(\boxed{セ}\,n + \boxed{ソ}\right) b_n \cdots\cdots ④$とするとき，③を c_n と c_{n+1} を用いて変形すると，すべての自然数 n に対して

$$\left(\boxed{セ}\,n + \boxed{チ}\right) c_{n+1} = \left(\boxed{セ}\,n + \boxed{ツ}\right) c_n$$

が成り立つことがわかる。これにより，$d_n = \left(\boxed{セ}\,n + \boxed{テ}\right) c_n \cdots\cdots ⑤$とおくと，すべての自然数 n に対して，$d_{n+1} = d_n$ が成り立つことがわかる。$d_1 = \boxed{ト}$であるから，すべての自然数 n に対して，$d_n = \boxed{ト}$である。したがって，④と⑤により，数列$\{b_n\}$の一般項は

$$b_n = \frac{\boxed{ト}}{\left(\boxed{セ}\,n + \boxed{ソ}\right)\left(\boxed{セ}\,n + \boxed{テ}\right)}$$

である。また

$$b_n = \frac{\boxed{ナ}}{\boxed{セ}\,n + \boxed{ソ}} - \frac{\boxed{ニ}}{\boxed{セ}\,n + \boxed{テ}}$$

が成り立つことを利用すると，数列$\{b_n\}$の初項から第 n 項までの和 S_n は，

$$S_n = \frac{\boxed{ヌ}\,n}{\boxed{ネ}\,n + \boxed{ノ}}$$

であることがわかる。

第４問

解答解説のページへ

座標空間において，立方体 OABC-DEFG の頂点を

O(0, 0, 0)，A(3, 0, 0)，B(3, 3, 0)，C(0, 3, 0)，

D(0, 0, 3)，E(3, 0, 3)，F(3, 3, 3)，G(0, 3, 3)

とし，OD を 2 : 1 に内分する点を K，OA を 1 : 2 に内分する点を L とする。BF 上の点 M，FG 上の点 N および K，L の 4 点は同一平面上にあり，四角形 KLMN は平行四辺形であるとする。

(1)　四角形 KLMN の面積を求めよう。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{LK}}$ を成分で表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{LK}} = \left(\boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}}\right)$$

となり，四角形 KLMN が平行四辺形であることより，$\overrightarrow{\mathrm{LK}} = \boxed{\text{オ}}$ である。$\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから 1 つ選べ。

⓪　$\overrightarrow{\mathrm{ML}}$　　①　$\overrightarrow{\mathrm{LM}}$　　②　$\overrightarrow{\mathrm{NM}}$　　③　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$

ここで，M(3, 3, s)，N(t, 3, 3) と表すと，$\overrightarrow{\mathrm{LK}} = \boxed{\text{オ}}$ であるので，

$s = \boxed{\text{カ}}$，$t = \boxed{\text{キ}}$ となり，N は FG を 1 : $\boxed{\text{ク}}$ に内分することがわかる。

また，$\overrightarrow{\mathrm{LK}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{LM}}$ について，

$$\overrightarrow{\mathrm{LK}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{LM}} = \boxed{\text{ケ}},\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{LK}}\right| = \sqrt{\boxed{\text{コ}}},\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{LM}}\right| = \sqrt{\boxed{\text{サシ}}}$$

となるので，四角形 KLMN の面積は $\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}$ である。

(2)　四角形 KLMN を含む平面を α とし，点 O を通り平面 α と垂直に交わる直線を l，α と l の交点を P とする。$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ と三角錐 OLMN の体積を求めよう。

P(p, q, r) とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{LK}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{LM}}$ と垂直であるから，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{LK}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{LM}} = \boxed{\text{ソ}}$ となるので，$p = \boxed{\text{タ}}\,r$，$q = \dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\,r$ であること

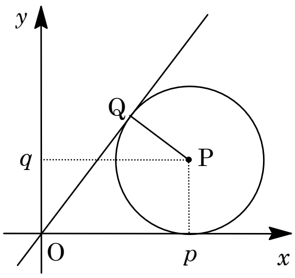
がわかる。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PL}}$ が垂直であることより $r = \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ となり，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ を求めると，

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = \dfrac{\boxed{\text{ヌ}}\sqrt{\boxed{\text{ネノ}}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}$ である。$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ は三角形 LMN を底面とする三角錐

OLMN の高さであるから，三角錐 OLMN の体積は $\boxed{\text{フ}}$ である。

第１問

問題のページへ



[1] (1) 点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を通り直線 $l: y=\dfrac{4}{3}x$ ……ⓐに垂直な直線は，傾きが $-\dfrac{3}{4}$ より，$y=-\dfrac{3}{4}(x-p)+q$ ………ⓑ

ⓐⓑの交点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ は，$\dfrac{4}{3}x=-\dfrac{3}{4}(x-p)+q$ より，

$$25x=9p+12q\ ,\ \ x=\frac{3}{25}(3p+4q)$$

$$y=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{25}(3p+4q)=\frac{4}{25}(3p+4q)$$

ここで，l に接する円 C の半径 r は距離 PQ に等しく，$l: 4x-3y=0$ から，

$$r=\mathrm{PQ}=\frac{|4p-3q|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{1}{5}|4p-3q| \text{………①}$$

(2) 円 C が x 軸に接し点 $\mathrm{R}(2,\ 2)$ を通るとき，$p>0, q>0$ で $q=r$ である。

さらに，$q<\dfrac{4}{3}p$ なので，①より，$q=\dfrac{1}{5}(4p-3q)$，$p=2q$ ………ⓒ

ここで，$\mathrm{PR}=q$ より，$(p-2)^2+(q-2)^2=q^2$ ………ⓓ

ⓒⓓより，$(2q-2)^2+(q-2)^2=q^2$ となり，$4q^2-12q+8=0$ から，

$$(q-1)(q-2)=0\ ,\ \ q=1,\ 2$$

これより，$q=1$ のとき，$C:(x-2)^2+(y-1)^2=1$ ………②

また，$q=2$ のとき，$C:(x-4)^2+(y-2)^2=4$ ………③

(3) 方程式②の表す円の中心 $\mathrm{S}(2,\ 1)$，方程式③の表す円の中心 $\mathrm{T}(4,\ 2)$ なので，線分 OT の中点が S となり，O は線分 ST を $1:2$ に外分する。

[2] $(m,\ n)=(2,\ 1)$ のとき，$\log_2 m^3+\log_3 n^2=\log_2 8+\log_3 1=3+0=3$

$(m,\ n)=(4,\ 3)$ のとき，$\log_2 m^3+\log_3 n^2=\log_2 64+\log_3 9=6+2=8$

さて，m, n を自然数とするとき，不等式 $\log_2 m^3+\log_3 n^2 \leqq 3$ ……④に対し，

$$3\log_2 m+2\log_3 n\leqq 3\ ,\ \ \log_2 m+\frac{2}{3}\log_3 n\leqq 1 \text{………⑤}$$

ここで，$\log_3 n\geqq \log_3 1=0$ から，⑤により，$\log_2 m\leqq 1$ となり，$m=1,\ 2$

$m=1$ のとき，⑤は $\log_3 n\leqq\dfrac{3}{2}$ となり，$n\leqq 3^{\frac{3}{2}}$ から $n^2\leqq 3^3=27$，すなわち $n\leqq 5$ から $(m,\ n)$ の組は 5 個である。

また，$m=2$ のとき，⑤は $\log_3 n\leqq 0$ となり，$n=1$ から $(m,\ n)$ の組は 1 個である。

以上より，④を満たす自然数 $(m,\ n)$ の組の個数は，$5+1=6$ である。

［解 説］

昨年同様，図形と式と指数・対数いう構成です。非常に丁寧な誘導つきです。

第２問

問題のページへ

(1) $f(x)=x^3-px$ に対し $f'(x)=3x^2-p$ となり，$x=a$ で極値をとるならば，

$3a^2-p=0$ ………①

さらに，$x=a$ の前後での $f'(x)$ の符号が変化することより，$p>0$ である。

(2) $f(x)$ が $x=\dfrac{p}{3}$ で極値をとることより，①から，$3\cdot\dfrac{p^2}{9}-p=0$，$p^2-3p=0$

すると，$p>0$ から，$p=3$ である。

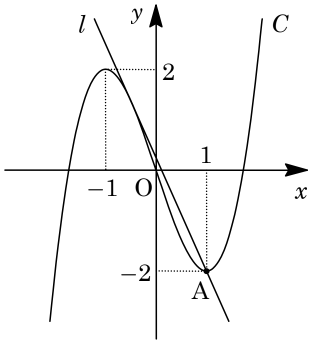
これより，$f(x)=x^3-3x$ となり，

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

右表から，$f(x)$ は $x=-1$ で極大値をとり，$x=1$ で極小値をとる。

ここで，曲線 C の接線で点 $\mathrm{A}(1,\ -2)$ を通り傾きが 0 でないものを l とする。その接点の座標を $(b,\ f(b))$ とおくと，$f'(b)=3b^2-3$ より，l の方程式は，



$$y=(3b^2-3)(x-b)+f(b)$$
$$=(3b^2-3)(x-b)+b^3-3b$$
$$=(3b^2-3)x-2b^3 \text{………②}$$

$\mathrm{A}(1,\ -2)$ を通ることより，$-2=(3b^2-3)-2b^3$ から，

$2b^3-3b^2+1=0$，$(b-1)^2(2b+1)=0$

すると，$b=1,\ -\dfrac{1}{2}$ となるが，$f'(b)\neq0$ から $b\neq\pm1$ なので，$b=-\dfrac{1}{2}$

よって，②より，$y=\left(3\cdot\dfrac{1}{4}-3\right)x+2\cdot\dfrac{1}{8}=-\dfrac{9}{4}x+\dfrac{1}{4}$

さて，点 A を頂点とし，原点を通る放物線 $D : y=k(x-1)^2-2$ とおくと，

$0=k(-1)^2-2$，$k=2$

よって，$y=2(x-1)^2-2=2x^2-4x$

すると，l と D で囲まれた図形のうち，不等式 $x\geqq0$ の表す領域の面積 S は，

$$S=\int_0^1\left\{-\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}-(2x^2-4x)\right\}dx=\int_0^1\left(-2x^2+\frac{7}{4}x+\frac{1}{4}\right)dx$$
$$=-\frac{2}{3}+\frac{7}{8}+\frac{1}{4}=\frac{11}{24}$$

［解 説］

微積分の基本的な問題です。計算量は少なめです。

第３問

問題のページへ

(1) $\{a_n\}$の階差数列を$\{p_n\}$とおくと，$p_n=9+4(n-1)=4n+5$となり，

$$a_2=a_1+p_1=6+9=15,\ a_3=a_1+p_1+p_2=6+(9+13)=28$$

$n\geqq 2$において，$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}p_k=6+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+5)$

$$=6+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+5(n-1)=2n^2+3n+1\cdots\cdots\text{①}$$

なお，この式は$n=1$のときも成立している。

(2) 数列$\{b_n\}$は，$b_1=\frac{2}{5}$，$b_{n+1}=\frac{a_n}{a_{n+1}-1}b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$……②より，

$$b_2=\frac{a_1}{a_2-1}b_1=\frac{6}{15-1}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{35}$$

①②より，$b_{n+1}=\frac{2n^2+3n+1}{2(n+1)^2+3(n+1)}b_n=\frac{(2n+1)(n+1)}{(n+1)(2n+5)}b_n=\frac{2n+1}{2n+5}b_n$……③

ここで，$c_n=(2n+1)b_n$……④とおくと，$b_n=\frac{c_n}{2n+1}$となり，③から，

$$\frac{c_{n+1}}{2n+3}=\frac{2n+1}{2n+5}\cdot\frac{c_n}{2n+1},\ (2n+5)c_{n+1}=(2n+3)c_n$$

さらに，$d_n=(2n+3)c_n$……⑤とおくと，$d_{n+1}=d_n$となる。

すると，$d_1=5c_1=5\cdot 3b_1=15\cdot\frac{2}{5}=6$から，$d_n=6$となり，④⑤より，

$$b_n=\frac{c_n}{2n+1}=\frac{d_n}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{6}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{3}{2n+1}-\frac{3}{2n+3}$$

これより，数列$\{b_n\}$の初項から第n項までの和S_nは，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2k+1}-\frac{3}{2k+3}\right)=\frac{3}{2+1}-\frac{3}{2n+3}=\frac{2n}{2n+3}$$

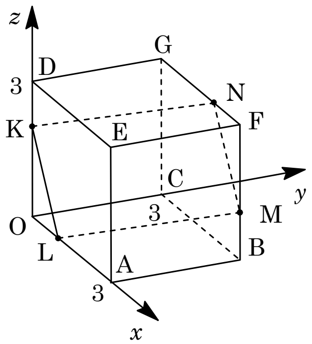
［解 説］

漸化式の関係する 2 題です。(2)は，2 次試験によく出題されるタイプですが，細かい誘導のため，方針に迷う段階はないでしょう。

第４問

問題のページへ

(1) 右図の１辺の長さが３の立方体 OABC-DEFG に対して，OD を$2:1$に内分する点$\mathrm{K}(0,\ 0,\ 2)$，OA を$1:2$に内分する点$\mathrm{L}(1,\ 0,\ 0)$とすると，$\overrightarrow{\mathrm{LK}}=(-1,\ 0,\ 2)$



四角形 KLMN は平行四辺形なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{LK}}=\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdots\cdots\cdots①$$

そこで，$\mathrm{M}(3,\ 3,\ s)$，$\mathrm{N}(t,\ 3,\ 3)$とおくと，①より，$(-1,\ 0,\ 2)=(t-3,\ 0,\ 3-s)$となり，

$$t-3=-1,\ 3-s=2$$

よって，$t=2$，$s=1$から，$\mathrm{M}(3,\ 3,\ 1)$，$\mathrm{N}(2,\ 3,\ 3)$となり，N は FG を$1:2$に内分する。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{LM}}=(2,\ 3,\ 1)$から，$\overrightarrow{\mathrm{LK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{LM}}=(-1)\cdot2+0+2\cdot1=0$

$$|\overrightarrow{\mathrm{LK}}|=\sqrt{(-1)^2+0+2^2}=\sqrt{5},\ |\overrightarrow{\mathrm{LM}}|=\sqrt{2^2+3^2+1^2}=\sqrt{14}$$

すると，四角形 KLMN は長方形となり，その面積Sは，$S=\sqrt{5}\times\sqrt{14}=\sqrt{70}$

(2) O から四角形 KLMN を含む平面αに引いた垂線と平面αの交点を$\mathrm{P}(p,\ q,\ r)$とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{LK}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{LM}}=0$より，

$$-p+2r=0\cdots\cdots\cdots②,\ 2p+3q+r=0\cdots\cdots\cdots③$$

②より$p=2r$となり，③から$q=\dfrac{1}{3}(-2\cdot2r-r)=-\dfrac{5}{3}r$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(2r,\ -\dfrac{5}{3}r,\ r\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{PL}}=\left(1-2r,\ \dfrac{5}{3}r,\ -r\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PL}}=0$から，

$$2r(1-2r)-\frac{25}{9}r^2-r^2=0$$

$r\neq0$から，$18(1-2r)-25r-9r=0$，$18-70r=0$より，$r=\dfrac{9}{35}$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{9}{35}\left(2,\ -\dfrac{5}{3},\ 1\right)$となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\frac{9}{35}\sqrt{2^2+\left(-\frac{5}{3}\right)^2+1^2}=\frac{9}{35}\sqrt{\frac{70}{9}}=\frac{3}{35}\sqrt{70}$$

これから，三角錐 OLMN の体積Vは，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}S\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{70}}{2}\cdot\frac{3}{35}\sqrt{70}=1$$

［解 説］

空間図形へのベクトルの応用です。過去には，計算が難であるケースがありましたが，本問は穏やかな設定です。