第１問

解答解説のページへ

[1] O を原点とする座標平面上の 2 点 $P(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$, $Q(2\cos\theta+\cos 7\theta,\ 2\sin\theta+\sin 7\theta)$ を考える。ただし，$\dfrac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ とする。

(1) $OP = \boxed{\text{ア}}$, $PQ = \boxed{\text{イ}}$ である。また

$$OQ^2 = \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}}(\cos 7\theta\cos\theta + \sin 7\theta\sin\theta)$$
$$= \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}}\cos(\boxed{\text{オ}}\,\theta)$$

である。よって，$\dfrac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で，OQ は $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}$ のとき最大値 $\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$

をとる。

(2) 3 点 O, P, Q が一直線上にあるような θ の値を求めよう。

直線 OP を表す方程式は $\boxed{\text{ク}}$ である。$\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから１つ選べ。

⓪ $(\cos\theta)x + (\sin\theta)y = 0$　　① $(\sin\theta)x + (\cos\theta)y = 0$

② $(\cos\theta)x - (\sin\theta)y = 0$　　③ $(\sin\theta)x - (\cos\theta)y = 0$

このことにより，$\dfrac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で，3 点 O, P, Q が一直線上にあるのは $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}$ のときであることがわかる。

(3) $\angle OQP$ が直角となるのは $OQ = \sqrt{\boxed{\text{コ}}}$ のときである。したがって，$\dfrac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で，$\angle OQP$ が直角となるのは $\theta = \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi$ のときである。

[2] a, b を正の実数とする。連立方程式

$$(*) \quad \begin{cases} x\sqrt{y^3} = a \\ \sqrt[3]{x}\,y = b \end{cases}$$

を満たす正の実数 x, y について考えよう。

(1) 連立方程式(＊)を満たす正の実数 x, y は

$$x = a^{\boxed{\text{ス}}}\,b^{\boxed{\text{セソ}}},\quad y = a^p b^{\boxed{\text{タ}}}$$

となる。ただし，$p = \dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

(2) $b = 2\sqrt[3]{a^4}$ とする。a が $a > 0$ の範囲を動くとき，連立方程式(＊)を満たす正の実数 x, y について，$x + y$ の最小値を求めよう。

$b=2\sqrt[3]{a^4}$ であるから，(＊)を満たす正の実数 x, y は，a を用いて

$$x=2^{\boxed{\text{セソ}}}a^{\boxed{\text{トナ}}},\quad y=2^{\boxed{\text{タ}}}a^{\boxed{\text{ニ}}}$$

と表される。したがって，相加平均と相乗平均の関係を利用すると，$x+y$ は $a=2^q$ のとき最小値 $\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}$ をとることがわかる。ただし，$q=\dfrac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である。

第２問

解答解説のページへ

(1) 関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ を求めよう。h が 0 でないとき，x が a から $a+h$ まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率は，$\boxed{\text{ア}}+\dfrac{h}{\boxed{\text{イ}}}$ である。したがって，求める微分係数は

$$f'(a)=\lim_{h\to\boxed{\text{ウ}}}\left(\boxed{\text{ア}}+\frac{h}{\boxed{\text{イ}}}\right)=\boxed{\text{エ}}$$

である。

(2) 放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ を C とし，C 上に点 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2\right)$ をとる。ただし，$a>0$ とする。点 P における C の接線 l の方程式は，$y=\boxed{\text{オ}}\,x-\dfrac{1}{\boxed{\text{カ}}}a^2$ である。直線 l と x 軸との交点 Q の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}},\ 0\right)$ である。点 Q を通り l に垂直な直線を m とすると，m の方程式は，$y=\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}x+\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

直線 m と y 軸との交点を A とする。三角形 APQ の面積を S とおくと，$S=\dfrac{a\left(a^2+\boxed{\text{セ}}\right)}{\boxed{\text{ソ}}}$ となる。また，y 軸と線分 AP および曲線 C によって囲まれた図形の面積を T とおくと，$T=\dfrac{a\left(a^2+\boxed{\text{タ}}\right)}{\boxed{\text{チツ}}}$ となる。

$a>0$ の範囲における $S-T$ の値について調べよう。

$$S-T=\frac{a\left(a^2-\boxed{\text{テ}}\right)}{\boxed{\text{トナ}}}$$

である。$a>0$ であるから，$S-T>0$ となるような a のとり得る値の範囲は $a>\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}$ である。また，$a>0$ のときの $S-T$ の増減を調べると，$S-T$ は $a=\boxed{\text{ヌ}}$ で最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}$ をとることがわかる。

第３問

解答解説のページへ

自然数 n に対し，2^n の一の位の数を a_n とする。また，数列$\{b_n\}$は

$$b_1=1\,,\ b_{n+1}=\frac{a_nb_n}{4}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\cdots\cdots\cdots①$$

を満たすとする。

(1)　$a_1=2$，$a_2=\boxed{\text{ア}}$，$a_3=\boxed{\text{イ}}$，$a_4=\boxed{\text{ウ}}$，$a_5=\boxed{\text{エ}}$である。このことから，すべての自然数 n に対して，$a_{\boxed{\text{オ}}}=a_n$ となることがわかる。$\boxed{\text{オ}}$に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから１つ選べ。

⓪　$5n$　　①　$4n+1$　　②　$n+3$　　③　$n+4$　　④　$n+5$

(2)　数列$\{b_n\}$の一般項を求めよう。①を繰り返し用いることにより

$$b_{n+4}=\frac{a_{n+3}\,a_{n+2}\,a_{n+1}\,a_n}{2^{\boxed{\text{カ}}}}b_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つことがわかる。ここで，$a_{n+3}\,a_{n+2}\,a_{n+1}\,a_n=3\cdot 2^{\boxed{\text{キ}}}$ であることから，

$b_{n+4}=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}b_n$ が成り立つ。このことから，自然数 k に対して

$$b_{4k-3}=\left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)^{k-1},\quad b_{4k-2}=\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)^{k-1}$$

$$b_{4k-1}=\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)^{k-1},\quad b_{4k}=\left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)^{k-1}$$

である。

(3)　$S_n=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}b_j$ とおく。自然数 m に対して，$S_{4m}=\boxed{\text{タ}}\left(\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)^m-\boxed{\text{チ}}$である。

(4)　積 $b_1b_2\cdots b_n$ を T_n とおく。自然数 k に対して

$$b_{4k-3}\,b_{4k-2}\,b_{4k-1}\,b_{4k}=\frac{1}{\boxed{\text{ツ}}}\left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)^{\boxed{\text{テ}}(k-1)}$$

であることから，自然数 m に対して

$$T_{4m}=\frac{1}{\boxed{\text{ツ}}^m}\left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)^{\boxed{\text{ト}}m^2-\boxed{\text{ナ}}m}$$

である。また，T_{10} を計算すると，$T_{10}=\dfrac{3^{\boxed{\text{ニ}}}}{2^{\boxed{\text{ヌネ}}}}$ である。

第４問

解答解説のページへ

1 辺の長さが 1 のひし形 OABC において，$\angle \mathrm{AOC} = 120^\circ$ とする。辺 AB を $2:1$ に内分する点を P とし，直線 BC 上に点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ となるようにとる。以下，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおく。

(1) 三角形 OPQ の面積を求めよう。$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{a} + \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{b}$ である。実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と表されるので，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \boxed{\text{エ}}\,t\vec{a} + \vec{b}$ である。ここで，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \boxed{\text{キ}}$ であることから，$t = \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

これらのことから，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。よって，三角形 OPQ の面積 S_1 は，$S_1 = \dfrac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ である。

(2) 辺 BC を $1:3$ に内分する点を R とし，直線 OR と直線 PQ との交点を T とする。$\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表し，三角形 OPQ と三角形 PRT の面積比を求めよう。

T は直線 OR 上の点であり，直線 PQ 上の点でもあるので，実数 r, s を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = r\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OP}} + s\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と表すと，$r = \dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$，$s = \dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ となることがわかる。よって，$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = \dfrac{\boxed{\text{ヌネ}}}{\boxed{\text{ノハ}}}\vec{a} + \dfrac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}\vec{b}$ である。

上で求めた r, s の値から，三角形 OPQ の面積 S_1 と，三角形 PRT の面積 S_2 との比は，$S_1 : S_2 = \boxed{\text{ヘホ}} : 2$ である。

第５問

解答解説のページへ

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 7 ページの正規分布表を用いてもよい。

また，小数の形で解答する場合，指定された桁数の 1 つ下の桁を四捨五入し，解答せよ。途中で割り切れた場合，指定された桁まで⓪にマークすること。

(1) 袋の中に白球が 4 個，赤球が 3 個入っている。この袋の中から同時に 3 個の球を取り出すとき，白球の個数を W とする。確率変数 W について

$$P(W=0)=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}},\quad P(W=1)=\frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{イウ}}}$$

$$P(W=2)=\frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{イウ}}},\quad P(W=3)=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{イウ}}}$$

であり，期待値（平均）は $\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$，分散は $\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ である。

(2) 確率変数 Z が標準正規分布に従うとき

$$P(-\boxed{\text{タ}}\leqq Z\leqq\boxed{\text{タ}})=0.99$$

が成り立つ。$\boxed{\text{タ}}$ に当てはまる最も適切なものを，次の⓪～③のうちから 1 つ選べ。

⓪ 1.64　　① 1.96　　② 2.33　　③ 2.58

(3) 母標準偏差 σ の母集団から，大きさ n の無作為標本を抽出する。ただし，n は十分に大きいとする。この標本から得られる母平均 m の信頼度（信頼係数）95％の信頼区間を $A\leqq m\leqq B$ とし，この信頼区間の幅 L_1 を $L_1=B-A$ で定める。

この標本から得られる信頼度 99％の信頼区間を $C\leqq m\leqq D$ とし，この信頼区間の幅 L_2 を $L_2=D-C$ で定めると

$$\frac{L_2}{L_1}=\boxed{\text{チ}}.\boxed{\text{ツ}}$$

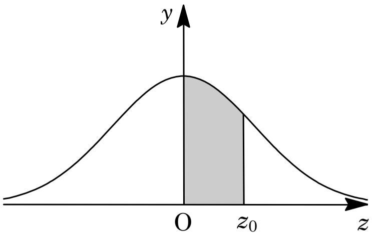
が成り立つ。また，同じ母集団から，大きさ $4n$ の無作為標本を抽出して得られる母平均 m の信頼度 95％の信頼区間を $E\leqq m\leqq F$ とし，この信頼区間の幅 L_3 を $L_3=F-E$ で定める。このとき

$$\frac{L_3}{L_1}=\boxed{\text{テ}}.\boxed{\text{ト}}$$

が成り立つ。

正 規 分 布 表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

第１問

問題のページへ

[1]　(1)　点 $\mathrm{P}(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$，$\mathrm{Q}(2\cos\theta+\cos7\theta,\ 2\sin\theta+\sin7\theta)$ に対して,

$$\mathrm{OP}=\sqrt{4\cos^2\theta+4\sin^2\theta}=2\,,\ \ \mathrm{PQ}=\sqrt{\cos^2 7\theta+\sin^2 7\theta}=1$$

$$\mathrm{OQ}^2=(2\cos\theta+\cos7\theta)^2+(2\sin\theta+\sin7\theta)^2$$

$$=5+4(\cos7\theta\cos\theta+\sin7\theta\sin\theta)=5+4\cos6\theta$$

すると，$\dfrac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$\dfrac{3\pi}{4}\leqq6\theta\leqq\dfrac{3\pi}{2}$ から，OQ は $6\theta=\dfrac{3\pi}{2}\left(\theta=\dfrac{\pi}{4}\right)$ のとき最大値 $\sqrt{5+4\cdot0}=\sqrt{5}$ をとる。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2(\cos\theta,\ \sin\theta)$ より，直線 OP の法線ベクトルの成分を $(\sin\theta,\ -\cos\theta)$ とおくことができるので，直線 OP の方程式は，$(\sin\theta)x-(\cos\theta)y=0$

3 点 O, P, Q が一直線上にある条件は，点 Q が直線 OP 上にあることなので,

$$\sin\theta(2\cos\theta+\cos7\theta)-\cos\theta(2\sin\theta+\sin7\theta)=0$$

$$\sin\theta\cos7\theta-\cos\theta\sin7\theta=0$$

よって，$\sin6\theta=0$ となり，$\dfrac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$6\theta=\pi\left(\theta=\dfrac{\pi}{6}\right)$ である。

(3)　$\angle\mathrm{OQP}=90^\circ$ のとき，三平方の定理より，$\mathrm{OQ}=\sqrt{\mathrm{OP}^2-\mathrm{PQ}^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$

すると，(1)から，$5+4\cos6\theta=3$ となり，$\cos6\theta=-\dfrac{1}{2}$

よって，$\dfrac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$6\theta=\dfrac{4}{3}\pi\left(\theta=\dfrac{2}{9}\pi\right)$ である。

[2]　(1)　a,b および x,y を正の実数とする x,y についての連立方程式(＊)は,

$$x\sqrt{y^3}=a\cdots\cdots\cdots①,\ \ \sqrt[3]{x}\,y=b\cdots\cdots\cdots②$$

①より $x^2y^3=a^2\cdots\cdots③$，②より $xy^3=b^3\cdots\cdots④$ となるので，③④より,

$$x=\frac{a^2}{b^3}=a^2b^{-3},\ \ y=\frac{b}{a^{\frac{2}{3}}b^{-1}}=a^{-\frac{2}{3}}b^2$$

(2)　$b=2\sqrt[3]{a^4}=2a^{\frac{4}{3}}$ のとき，(1)より,

$$x=a^2(2a^{\frac{4}{3}})^{-3}=a^2\cdot2^{-3}a^{-4}=2^{-3}a^{-2}\,,\ \ y=a^{-\frac{2}{3}}(2a^{\frac{4}{3}})^2=a^{-\frac{2}{3}}\cdot2^2a^{\frac{8}{3}}=2^2a^2$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係を利用すると,

$$x+y=2^{-3}a^{-2}+2^2a^2\geqq2\sqrt{2^{-3}a^{-2}\cdot2^2a^2}=2\sqrt{2^{-1}}=\sqrt{2}$$

等号成立は，$2^{-3}a^{-2}=2^2a^2$ すなわち $a^4=2^{-5}\left(a=2^{-\frac{5}{4}}\right)$ のときである。

よって，$x+y$ は $a=2^{-\frac{5}{4}}$ のとき最小値 $\sqrt{2}$ をとる。

［解 説］

[1]は三角関数, [2]は指数関数の問題で，ともに基本事項の組合せとなっています。

第２問

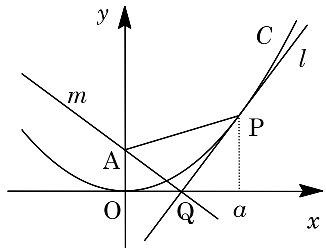
問題のページへ

(1) 関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$ に対して，x が a から $a+h$ まで変化するときの平均変化率は,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}=\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{2}(a+h)^2-\frac{1}{2}a^2\right\}=\frac{1}{h}\left(ah+\frac{1}{2}h^2\right)=a+\frac{h}{2}$$

これより，$f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}=\lim_{h\to 0}\left(a+\dfrac{h}{2}\right)=a$

(2) $a>0$ として，放物線 $C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2\right)$ における接線 l の方程式は,



$$y-\frac{1}{2}a^2=a(x-a),\ \ y=ax-\frac{1}{2}a^2$$

接線 l と x 軸との交点 Q は，$ax-\dfrac{1}{2}a^2=0$ より $x=\dfrac{a}{2}$ となり，座標は $\mathrm{Q}\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$ である。さらに, Q を通り l に垂直な直線 m の方程式は，その傾きが $-\dfrac{1}{a}$ より,

$$y=-\frac{1}{a}\left(x-\frac{a}{2}\right),\ \ y=-\frac{1}{a}x+\frac{1}{2}$$

さて，m と y 軸との交点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に対して，線分 AP の中点は $\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a^2+1}{4}\right)$ となるので，これより △APQ の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+1}{4}\cdot a=\frac{a(a^2+1)}{8}$$

また，y 軸と線分 AP および曲線 C によって囲まれた図形の面積 T は,

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2}\right)a-\int_0^a\frac{1}{2}x^2dx=\frac{a(a^2+1)}{4}-\frac{a^3}{6}=\frac{a(a^2+3)}{12}$$

すると，$S-T=\dfrac{a(a^2+1)}{8}-\dfrac{a(a^2+3)}{12}=\dfrac{a(a^2-3)}{24}$ となり，$S-T>0$ のとき,

$$a^2-3>0\ ,\ \ a>\sqrt{3}$$

ここで，$g(a)=a(a^2-3)=a^3-3a$ とおくと，$S-T=\dfrac{g(a)}{24}$ となり

$$g'(a)=3a^2-3=3(a+1)(a-1)$$

すると，$g(a)$ の値の増減は右表のようになり，$S-T$ は $a=1$ のとき最小値 $-\dfrac{2}{24}=-\dfrac{1}{12}$ をとる。

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(a)$		$-$	0	$+$
$g(a)$	0	↘	-2	↗

［解 説］

計算が質・量ともに穏やかな微積分の問題です。なお，△APQ の面積については，点 Q を通り x 軸に垂直な直線で左右に分け，その和として計算しています。

第３問

問題のページへ

(1) 2^n の一の位の数を a_n とすると，$a_1=2$，$a_2=4$，$a_3=8$，$a_4=6$，$a_5=2$

これより，帰納的に，すべての自然数 n に対して，$a_{n+4}=a_n$ である。

(2) 条件より，$b_1=1$，$b_{n+1}=\dfrac{a_n b_n}{4}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$……①なので，

$$b_{n+4}=\frac{a_{n+3}b_{n+3}}{4}=\frac{a_{n+3}}{4}\cdot\frac{a_{n+2}b_{n+2}}{4}=\frac{a_{n+3}}{4}\cdot\frac{a_{n+2}}{4}\cdot\frac{a_{n+1}b_{n+1}}{4}$$
$$=\frac{a_{n+3}}{4}\cdot\frac{a_{n+2}}{4}\cdot\frac{a_{n+1}}{4}\cdot\frac{a_n b_n}{4}=\frac{a_{n+3}\,a_{n+2}\,a_{n+1}\,a_n}{2^8}b_n$$

ここで，数列 $\{a_n\}$ は周期 4 の周期数列なので，(1)より，

$$a_{n+3}\,a_{n+2}\,a_{n+1}\,a_n=2\cdot4\cdot8\cdot6=3\cdot2^7$$

これより，$b_{n+4}=\dfrac{3\cdot2^7}{2^8}b_n=\dfrac{3}{2}b_n$ ………②

さて，①から，$b_1=1$，$b_2=\dfrac{a_1b_1}{4}=\dfrac{1}{2}$，$b_3=\dfrac{a_2b_2}{4}=\dfrac{1}{2}$，$b_4=\dfrac{a_3b_3}{4}=1$ なので，②より，自然数 k に対して，

$$b_{4k-3}=b_1\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1},\quad b_{4k-2}=b_2\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$$
$$b_{4k-1}=b_3\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1},\quad b_{4k}=b_4\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$$

(3) (2)より，$b_{4k-3}+b_{4k-2}+b_{4k-1}+b_{4k}=3\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}$ となり，$S_n=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}b_j$ に対して，

$$S_{4m}=\sum_{j=1}^{4m}b_j=\sum_{j=1}^{m}(b_{4j-3}+b_{4j-2}+b_{4j-1}+b_{4j})=\sum_{j=1}^{m}3\left(\frac{3}{2}\right)^{j-1}$$
$$=3\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{m}-1\right\}\left(\frac{3}{2}-1\right)^{-1}=6\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{m}-1\right\}=6\left(\frac{3}{2}\right)^{m}-6$$

(4) (2)より，$b_{4k-3}\,b_{4k-2}\,b_{4k-1}\,b_{4k}=\dfrac{1}{4}\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}\right\}^4=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{4(k-1)}$

ここで，$c_k=b_{4k-3}\,b_{4k-2}\,b_{4k-1}\,b_{4k}$ とおくと，$T_n=b_1b_2\cdots b_n$ に対して，

$$T_{4m}=c_1c_2\cdots c_m=\left(\frac{1}{4}\right)^{m}\left(\frac{3}{2}\right)^{0+4+\cdots+4(m-1)}=\frac{1}{4^m}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4(m-1)m}{2}}=\frac{1}{4^m}\left(\frac{3}{2}\right)^{2m^2-2m}$$

また，$T_{10}=T_8\,b_9\,b_{10}=\dfrac{1}{4^2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^4\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2^5}\left(\dfrac{3}{2}\right)^8=\dfrac{3^8}{2^{13}}$ である。

［解 説］

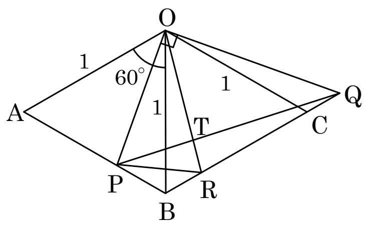
細かく誘導のついた周期数列を題材とした問題です。難しい計算はありませんが，問題量を考えると，時間的にかなり厳しい内容となっています。

第４問

問題のページへ

(1)　まず，AP : PB = 2 : 1 より，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{3}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$$



また，点 Q は直線 BC 上にあるので，

$$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{AB}$$

$$=(1-t)\vec{b}+t(\vec{b}-\vec{a})=-t\vec{a}+\vec{b}$$

ここで，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\frac{1}{2}$ であり，$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OQ}$ から，

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(-t\vec{a}+\vec{b})=0$$

よって，$-t+\frac{1}{2}(1-2t)+2=0$ から，$t=\frac{5}{4}$ である。

これより，$|\overrightarrow{OP}|^2=\frac{1}{9}|\vec{a}+2\vec{b}|^2=\frac{1}{9}\left(1+4\cdot\frac{1}{2}+4\right)=\frac{7}{9}$，$|\overrightarrow{OP}|=\frac{\sqrt{7}}{3}$

$$|\overrightarrow{OQ}|^2=\left|-\frac{5}{4}\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\frac{25}{16}-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}+1=\frac{21}{16}，\ |\overrightarrow{OQ}|=\frac{\sqrt{21}}{4}$$

よって，△OPQ の面積 S_1 は，$S_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{4}=\frac{7\sqrt{3}}{24}$

(2)　辺 BC を $1:3$ に内分する点 R に対し，T は直線 OR 上の点なので，

$$\overrightarrow{OT}=r\overrightarrow{OR}=r\left(\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{a}\right)=-\frac{1}{4}r\vec{a}+r\vec{b}\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，T は直線 PQ 上の点なので，

$$\overrightarrow{OT}=(1-s)\overrightarrow{OP}+s\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}(1-s)(\vec{a}+2\vec{b})+s\left(-\frac{5}{4}\vec{a}+\vec{b}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{19}{12}s\right)\vec{a}+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}s\right)\vec{b}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立なので，$-\frac{1}{4}r=\frac{1}{3}-\frac{19}{12}s$，$r=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}s$ となり，

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}s\right)=\frac{1}{3}-\frac{19}{12}s，\ \frac{3}{2}s-\frac{1}{2}=0，\ s=\frac{1}{3}$$

また，$r=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$ から，$\overrightarrow{OT}=-\frac{7}{36}\vec{a}+\frac{7}{9}\vec{b}$

すると，PQ : PT $=1:s=3:1$，OT : TR $=r:1-r=7:2$ となり，△OPQ の面積 S_1 と△PRT の面積 S_2 の比は，

$$S_1:S_2=3\times7:1\times2=21:2$$

［解　説］

平面ベクトルの図形への応用問題です。標準的な内容で，計算も穏やかです。

第５問

問題のページへ

(1) 白球が 4 個, 赤球が 3 個入っている袋の中から同時に 3 個の球を取り出すとき, 白球の個数を W とすると,

$$P(W=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{1}{35},\ P(W=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{12}{35}$$

$$P(W=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{18}{35},\ P(W=3)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{4}{35}$$

W の平均を $E(W)$, 分散を $V(W)$ とすると,

$$E(W)=0\times\frac{1}{35}+1\times\frac{12}{35}+2\times\frac{18}{35}+3\times\frac{4}{35}=\frac{12}{7}$$

また, $E(W^2)=0\times\frac{1}{35}+1\times\frac{12}{35}+4\times\frac{18}{35}+9\times\frac{4}{35}=\frac{24}{7}$ から,

$$V(W)=E(W^2)-\{E(W)\}^2=\frac{24}{7}-\left(\frac{12}{7}\right)^2=\frac{24}{49}$$

(2) $\frac{0.99}{2}=0.495$ なので, 正規分布表と選択肢を見比べると, $z_0=2.58$ となる。

これより, 確率変数 Z が $N(0,\ 1)$ に従うとき,

$$P(-2.58\leqq Z\leqq 2.58)=0.99$$

(3) 母標準偏差 σ の母集団から, 大きさ n の無作為標本を抽出して得られる母平均 m の信頼度 95%の信頼区間について, その幅 L_1 は,

$$L_1=2\times1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

また, 母平均 m の信頼度 99%の信頼区間について, その幅 L_2 は, (2)より,

$$L_2=2\times2.58\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

これより, $\frac{L_2}{L_1}=\frac{2.58}{1.96}\fallingdotseq 1.3$ となる。

さらに, 同じ母集団から, 大きさ $4n$ の無作為標本を抽出して得られる母平均 m の信頼度 95%の信頼区間について, その幅 L_3 は,

$$L_3=2\times1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}=\frac{1}{2}\left(2\times1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

これより, $\frac{L_3}{L_1}=\frac{1}{2}=0.5$ となる。

［解 説］

確率分布と統計的推測についての基本事項の確認問題です。