第１問

解答解説のページへ

[1] a を実数とする。x の関数 $f(x)=(1+2a)(1-x)+(2-a)x$ を考える。

$f(x)=\left(-\boxed{\text{ア}}\,a+\boxed{\text{イ}}\right)x+2a+1$ である。

(1) $0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は，$a\leqq\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ア}}}$ のとき，$\boxed{\text{ウ}}\,a+\boxed{\text{エ}}$ であり，$a>\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ア}}}$ のとき，$\boxed{\text{オ}}\,a+\boxed{\text{カ}}$ である。

(2) $0\leqq x\leqq 1$ において，つねに $f(x)\geqq\dfrac{2(a+2)}{3}$ となる a の値の範囲は，

$\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\leqq a\leqq\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

[2] 次の問いに答えよ。必要ならば，$\sqrt{7}$ が無理数であることを用いてもよい。

(1) A を有理数全体の集合，B を無理数全体の集合とする。空集合を $\varnothing$ と表す。

次の(i)～(iv)が真の命題になるように，$\boxed{\text{サ}}$～$\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～⑤のうちから１つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

(i) $A\ \boxed{\text{サ}}\ \{0\}$　　(ii) $\sqrt{28}\ \boxed{\text{シ}}\ B$

(iii) $A=\{0\}\ \boxed{\text{ス}}\ A$　　(iv) $\varnothing=A\ \boxed{\text{セ}}\ B$

⓪ $\in$　① $\ni$　② $\subset$　③ $\supset$　④ $\cap$　⑤ $\cup$

(2) 実数 x に対する条件 p, q, r を次のように定める。

$p : x$ は無理数　　$q : x+\sqrt{28}$ は有理数　　$r : \sqrt{28}x$ は有理数

次の $\boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{タ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから１つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

p は q であるための $\boxed{\text{ソ}}$。p は r であるための $\boxed{\text{タ}}$。

⓪ 必要十分条件である　① 必要条件であるが，十分条件でない

② 十分条件であるが，必要条件でない

③ 必要条件でも十分条件でもない

[3] a を１以上の定数とし，x についての連立不等式

$$x^2+(20-a^2)x-20a^2\leqq 0\ \cdots\cdots\cdots①,\quad x^2+4ax\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots②$$

を考える。このとき，不等式①の解は $\boxed{\text{チツテ}}\leqq x\leqq a^2$ である。また，不等式②の解は $x\leqq\boxed{\text{トナ}}\,a$，$\boxed{\text{ニ}}\leqq x$ である。

この連立不等式を満たす負の実数が存在するような a の値の範囲は，$1\leqq a\leqq\boxed{\text{ヌ}}$ である。

第２問

解答解説のページへ

[1]　$\triangle$ABC の辺の長さと角の大きさを測ったところ，$\mathrm{AB}=7\sqrt{3}$ および $\angle\mathrm{ACB}=60°$ であった。したがって，$\triangle$ABC の外接円 O の半径は $\boxed{ア}$ である。

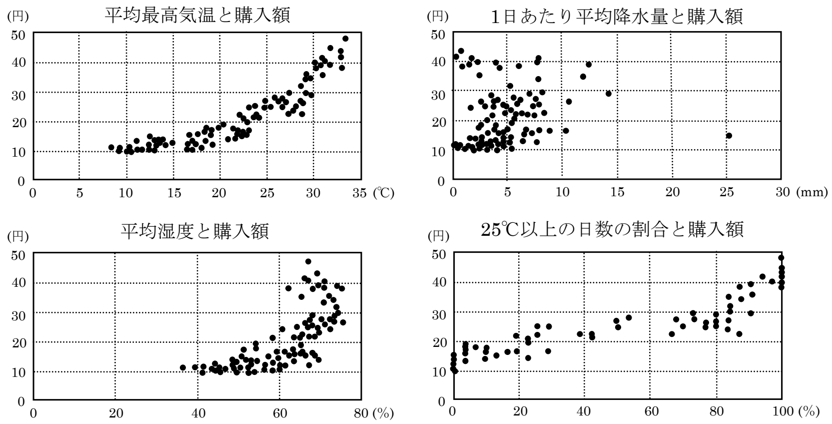
外接円 O の，点 C を含む弧 AB 上で点 P を動かす。

(1)　$2\mathrm{PA}=3\mathrm{PB}$ となるのは $\mathrm{PA}=\boxed{イ}\sqrt{\boxed{ウエ}}$ のときである。

(2)　$\triangle$PAB の面積が最大となるのは $\mathrm{PA}=\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}$ のときである。

(3)　$\sin\angle\mathrm{PBA}$ の値が最大となるのは $\mathrm{PA}=\boxed{キク}$ のときであり，このとき $\triangle$PAB の面積は $\dfrac{\boxed{ケコ}\sqrt{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}}$ である。

[2]　次の 4 つの散布図は，2003 年から 2012 年までの 120 か月の東京の月別データをまとめたものである。それぞれ，1 日の最高気温の月平均(以下，平均最高気温)，1 日あたり平均降水量，平均湿度，最高気温 25 ℃以上の日数の割合を横軸にとり，各世帯の 1 日あたりアイスクリーム平均購入額(以下，購入額)を縦軸としてある。



出典：総務省統計局(2013)『家計調査年報』，『過去の気象データ』(気象庁Webページ)
などにより作成

次の $\boxed{ス}$，$\boxed{セ}$ に当てはまるものを，下の⓪～④のうちから 1 つずつ選べ。ただし，解答の順序は問わない。

これらの散布図から読み取れることとして正しいものは，$\boxed{ス}$ と $\boxed{セ}$ である。

⓪　平均最高気温が高くなるほど購入額は増加する傾向がある

①　1 日あたり平均降水量が多くなるほど購入額は増加する傾向がある

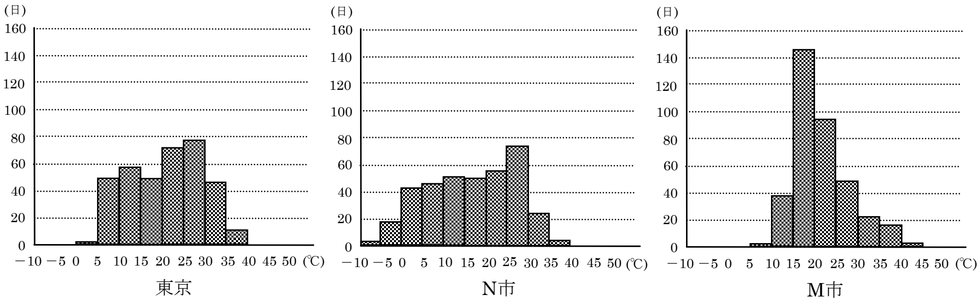
②　平均湿度が高くなるほど購入額の散らばりは小さくなる傾向がある

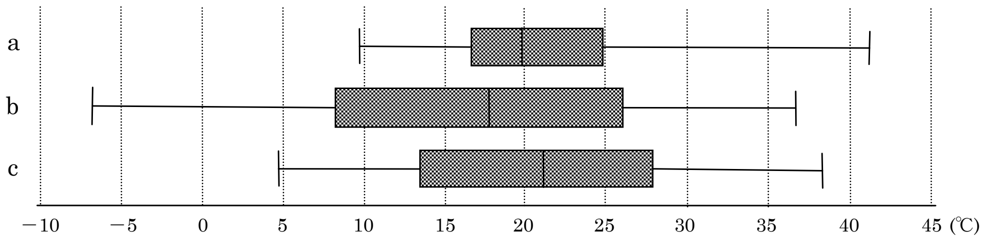
③　25 ℃以上の日数の割合が 80%未満の月は購入額が 30 円を超えていない

④　この中で正の相関があるのは，平均湿度と購入額の間のみである

[3] 世界の 4 都市（東京, O 市, N 市, M 市）の 2013 年の 365 日の各日の最高気温のデータについて考える。

(1) 次のヒストグラムは, 東京, N 市, M 市のデータをまとめたもので, この 3 都市の箱ひげ図は下の a, b, c のいずれかである。





出典：『過去の気象データ』(気象庁Webページ) などにより作成

次の $\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものを, 下の⓪～⑤のうちから 1 つ選べ。

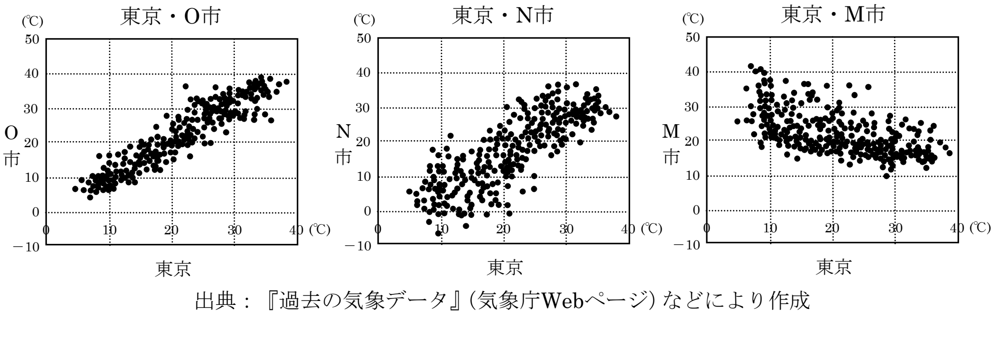
都市名と箱ひげ図の組合せとして正しいものは, $\boxed{\text{ソ}}$ である。

⓪ 東京－a, N 市－b, M 市－c　　① 東京－a, N 市－c, M 市－b

② 東京－b, N 市－a, M 市－c　　③ 東京－b, N 市－c, M 市－a

④ 東京－c, N 市－a, M 市－b　　⑤ 東京－c, N 市－b, M 市－a

(2) 次の 3 つの散布図は, 東京, O 市, N 市, M 市の 2013 年の 365 日の各日の最高気温のデータをまとめたものである。それぞれ O 市, N 市, M 市の最高気温を縦軸にとり, 東京の最高気温を横軸にとってある。



出典：『過去の気象データ』(気象庁Webページ) などにより作成

次の $\boxed{\text{タ}}$, $\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものを，下の⓪〜④のうちから 1 つずつ選べ。ただし，解答の順序は問わない。

これらの散布図から読み取れることとして正しいものは，$\boxed{\text{タ}}$ と $\boxed{\text{チ}}$ である。

⓪ 東京と N 市，東京と M 市の最高気温の間にはそれぞれ正の相関がある

① 東京と N 市の最高気温の間には正の相関，東京と M 市の最高気温の間には負の相関がある

② 東京と N 市の最高気温の間には負の相関，東京と M 市の最高気温の間には正の相関がある

③ 東京と O 市の最高気温の間の相関の方が，東京と N 市の最高気温の間の相関より強い

④ 東京と O 市の最高気温の間の相関の方が，東京と N 市の最高気温の間の相関より弱い

(3) 次の $\boxed{\text{ツ}}$, $\boxed{\text{テ}}$, $\boxed{\text{ト}}$ に当てはまるものを，下の⓪〜⑨のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

N 市では温度の単位として摂氏(℃)のほかに華氏(°F)も使われている。華氏(°F)の温度は，摂氏(℃)での温度を $\frac{9}{5}$ 倍し，32 を加えると得られる。例えば，摂氏 10℃は，$\frac{9}{5}$ 倍し 32 を加えることで華氏 50°F となる。

したがって，N 市の最高気温について，摂氏での分散を X，華氏での分散を Y とすると，$\frac{Y}{X}$ は $\boxed{\text{ツ}}$ になる。

東京(摂氏)と N 市(摂氏)の共分散を Z，東京(摂氏)と N 市(華氏)の共分散を W とすると，$\frac{W}{Z}$ は $\boxed{\text{テ}}$ になる(ただし，共分散は 2 つの変量のそれぞれの偏差の積の平均値)。

東京(摂氏)と N 市(摂氏)の相関係数を U，東京(摂氏)と N 市(華氏)の相関係数を V とすると，$\frac{V}{U}$ は $\boxed{\text{ト}}$ になる。

⓪ $-\frac{81}{25}$　① $-\frac{9}{5}$　② -1　③ $-\frac{5}{9}$　④ $-\frac{25}{81}$

⑤ $\frac{25}{81}$　⑥ $\frac{5}{9}$　⑦ 1　⑧ $\frac{9}{5}$　⑨ $\frac{81}{25}$

第３問

解答解説のページへ

赤球 4 個，青球 3 個，白球 5 個，合計 12 個の球がある。これら 12 個の球を袋の中に入れ，この袋から A さんがまず 1 個取り出し，その球をもとに戻さずに続いて B さんが 1 個取り出す。

(1)　A さんと B さんが取り出した 2 個の球のなかに，赤球か青球が少なくとも 1 個含まれている確率は $\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$ である。

(2)　A さんが赤球を取り出し，かつ B さんが白球を取り出す確率は $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カキ}}$ である。

これより，A さんが取り出した球が赤球であったとき，B さんが取り出した球が白球である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケコ}}$ である。

(3)　A さんは 1 球取り出したのち，その色を見ずにポケットの中にしまった。B さんが取り出した球が白球であることがわかったとき，A さんが取り出した球も白球であった条件付き確率を求めたい。

　A さんが赤球を取り出し，かつ B さんが白球を取り出す確率は $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カキ}}$ であり，A さんが青球を取り出し，かつ B さんが白球を取り出す確率は $\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シス}}$ である。

同様に，A さんが白球を取り出し，かつ B さんが白球を取り出す確率を求めることができ，これらの事象は互いに排反であるから，B さんが白球を取り出す確率は $\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソタ}}$ である。よって，求める条件付き確率は $\dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツテ}}$ である。

第４問

解答解説のページへ

(1) 不定方程式 $92x+197y=1$ をみたす整数 x, y の組の中で, x の絶対値が最小のものは, $x=\boxed{\text{アイ}}$, $y=\boxed{\text{ウエ}}$ である。

不定方程式 $92x+197y=10$ をみたす整数 x, y の組の中で, x の絶対値が最小のものは, $x=\boxed{\text{オカキ}}$, $y=\boxed{\text{クケ}}$ である。

(2) 2 進法で $11011_{(2)}$ と表される数を 4 進法で表すと $\boxed{\text{コサシ}}_{(4)}$ である。

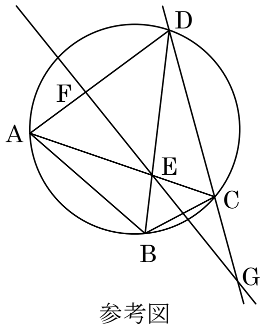
次の⓪～⑤の 6 進法の小数のうち, 10 進法で表すと有限小数として表せるのは, $\boxed{\text{ス}}$, $\boxed{\text{セ}}$, $\boxed{\text{ソ}}$ である。ただし, 解答の順序は問わない。

⓪ $0.3_{(6)}$　① $0.4_{(6)}$　② $0.33_{(6)}$　③ $0.43_{(6)}$

④ $0.033_{(6)}$　⑤ $0.043_{(6)}$

第５問

解答解説のページへ



参考図

四角形 ABCD において，AB＝4，BC＝2，DA＝DC であり，4 つの頂点 A, B, C, D は同一円周上にある。対角線 AC と対角線 BD の交点を E, 線分 AD を 2 : 3 の比に内分する点を F, 直線 FE と直線 DC の交点を G とする。

次の $\boxed{\text{ア}}$ には⓪～④のうちから当てはまるものを 1 つ選べ。

∠ABC の大きさが変化するとき四角形 ABCD の外接円の大きさも変化することに注意すると，∠ABC の大きさがいくらであっても，∠DAC と大きさが等しい角は，∠DCA と ∠DBC と $\boxed{\text{ア}}$ である。

⓪ ∠ABD　① ∠ACB　② ∠ADB　③ ∠BCG　④ ∠BEG

このことより $\dfrac{EC}{AE}=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。次に，△ACD と直線 FE に着目すると，$\dfrac{GC}{DG}=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(1) 直線 AB が点 G を通る場合について考える。

このとき，△AGD の辺 AG 上に点 B があるので，BG＝$\boxed{\text{カ}}$ である。また，直線 AB と直線 DC が点 G で交わり，4 点 A, B, C, D は同一円周上にあるので，

DC＝$\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ である。

(2) 四角形 ABCD の外接円の直径が最小となる場合について考える。

このとき，四角形 ABCD の外接円の直径は $\boxed{\text{ケ}}$ であり，∠BAC＝$\boxed{\text{コサ}}$° である。また，直線 FE と直線 AB の交点を H とするとき，$\dfrac{GC}{DG}=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ の関係に着目して AH を求めると，AH＝$\boxed{\text{シ}}$ である。

第１問

問題のページへ

[1] $f(x)=(1+2a)(1-x)+(2-a)x=(-3a+1)x+2a+1$ に対して，

(1) $0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は，

(i) $-3a+1\geqq 0\left(a\leqq\frac{1}{3}\right)$ のとき　$f(0)=2a+1$

(ii) $-3a+1<0\left(a>\frac{1}{3}\right)$ のとき　$f(1)=-a+2$

(2) $0\leqq x\leqq 1$ において，つねに $f(x)\geqq\frac{2(a+2)}{3}$ となる条件は，(1)より，

(i) $-3a+1\geqq 0\left(a\leqq\frac{1}{3}\right)$ のとき　$2a+1\geqq\frac{2(a+2)}{3}$ より $4a\geqq 1$ となり，

$a\leqq\frac{1}{3}$ と合わせると，$\frac{1}{4}\leqq a\leqq\frac{1}{3}$

(ii) $-3a+1<0\left(a>\frac{1}{3}\right)$ のとき　$-a+2\geqq\frac{2(a+2)}{3}$ より $-5a\geqq -2$ となり，

$a>\frac{1}{3}$ と合わせると，$\frac{1}{3}<a\leqq\frac{2}{5}$

(i)(ii)より，$\frac{1}{4}\leqq a\leqq\frac{2}{5}$

[2] (1) A を有理数全体の集合，B を無理数全体の集合とするとき，

(i) 0は有理数より，$A\supset\{0\}$

(ii) $\sqrt{28}=2\sqrt{7}$ は無理数より，$\sqrt{28}\in B$

(iii) $\{0\}$ は A の部分集合より，$A=\{0\}\cup A$

(iv) A と B の共通部分は空集合となり，$\varnothing=A\cap B$

(2) 条件 $p:x$ は無理数，$q:x+\sqrt{28}$ は有理数，$r:\sqrt{28}x$ は有理数 に対して，

$p\Rightarrow q$ は偽(反例 $x=\sqrt{7}$)，$p\Leftarrow q$ は真(有理数と無理数の差は無理数)より，p は q であるための必要条件であるが十分条件でない。

$p\Rightarrow r$ は偽(反例 $x=1+\sqrt{7}$)，$p\Leftarrow r$ も偽(反例 $x=0$)より，p は r であるための必要条件でも十分条件でもない。

[3] 連立不等式 $x^2+(20-a^2)x-20a^2\leqq 0$ ……①，$x^2+4ax\geqq 0$ ……②に対して，

①より，$(x-a^2)(x+20)\leqq 0$ となり，$a^2\geqq 1$ から，$-20\leqq x\leqq a^2$ ………③

②より，$x(x+4a)\geqq 0$ となり，$-4a\leqq -4$ から，$x\leqq -4a$，$0\leqq x$ ………④

③かつ④を満たす負の実数が存在する $a(a\geqq 1)$ の値の範囲は，$-20\leqq -4a$ より，

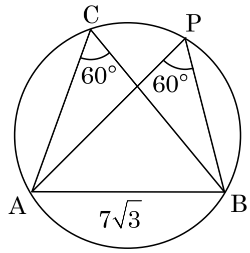
$1\leqq a\leqq 5$

[解 説]

例年とは傾向が異なりますが，関数，命題，不等式についての基本題です。なお，[2]は，(1)がヒントで(2)の反例 $x=0$ につながっているのでしょう。

第２問

問題のページへ



[1] △ABC の外接円 O の半径を R とおくと，正弦定理から，

$$\frac{7\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2R,\ \ R=\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=7$$

(1) 余弦定理から，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2-2\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}\cos 60^\circ=(7\sqrt{3})^2$

$$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2-\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=147\cdots\cdots\cdots(*)$$

条件より，$2\mathrm{PA}=3\mathrm{PB}$ なので $\mathrm{PB}=\frac{2}{3}\mathrm{PA}$ となり，$(*)$から，

$$\mathrm{PA}^2+\frac{4}{9}\mathrm{PA}^2-\frac{2}{3}\mathrm{PA}^2=147$$

よって，$\frac{7}{9}\mathrm{PA}^2=147$ から，$\mathrm{PA}=3\sqrt{21}$

(2) △PAB の面積が最大となるのは $\mathrm{PA}=\mathrm{PB}$ のときであり，$(*)$から，

$$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PA}^2-\mathrm{PA}^2=147,\ \ \mathrm{PA}=7\sqrt{3}$$

(3) 正弦定理から $\sin\angle\mathrm{PBA}=\frac{\mathrm{PA}}{2\cdot 7}$ となり，この値が最大となるのは PA が外接円 O の直径となるときである。すなわち，$\mathrm{PA}=14$ のときである。

このとき，$\angle\mathrm{PBA}=90^\circ$ となり，$\mathrm{PB}=\sqrt{14^2-(7\sqrt{3})^2}=7\sqrt{4-3}=7$ から，

$$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\cdot 7\sqrt{3}\cdot 7=\frac{49}{2}\sqrt{3}$$

[2] 散布図から読み取れることとして，

(i) 平均最高気温が高くなること，および最高気温 25℃以上の日数の割合が大きくなると，購入額が増加する傾向がある。

(ii) 1 日あたり平均降水量と購入額の間には，相関は見られない。

(iii) 平均湿度が高くなると購入額の散らばりは大きくなる。

(iv) 25℃以上の日数の割合が 80%未満の月は購入額が 30 円を超えていない。

これより，正しいと判断できるのは，0と3である。

[3] (1) 最大値に着目すると，M 市は箱ひげ図 a が対応する。

また，最小値に着目すると，N 市は箱ひげ図 b，東京は箱ひげ図 c が対応する。

(2) 散布図から読み取れることとして，

(i) 東京と O 市，東京と N 市の最高気温の間にはそれぞれ正の相関がある。そして，その相関は東京と O 市の方が東京と N 市より強い。

(ii) 東京と M 市の最高気温の間には負の相関がある。

これより，正しいと判断できるのは，1と3である。

(3) $k=1,\ 2,\ \cdots,\ 365$ として，N 市の最高気温のデータを $x=x_k$ (℃)，$y=y_k$ (°F)とし，その平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$ とおくと，

$$y_k=\frac{9}{5}x_k+32,\ \overline{y}=\frac{9}{5}\overline{x}+32$$

ここで，x，y の分散をそれぞれ X, Y とすると，

$$Y=\frac{1}{365}\sum_{k=1}^{365}(y_k-\overline{y})^2=\frac{1}{365}\sum_{k=1}^{365}\left(\frac{9}{5}x_k+32-\frac{9}{5}\overline{x}-32\right)^2$$

$$=\frac{81}{25}\cdot\frac{1}{365}\sum_{k=1}^{365}(x_k-\overline{x})^2=\frac{81}{25}X$$

したがって，$\dfrac{Y}{X}=\dfrac{81}{25}$ である。

また，東京の最高気温のデータを $t=t_k$ (℃)とし，その平均値を $\overline{t}$ とおく。そして，t と x，t と y の共分散をそれぞれ Z, W とすると，

$$W=\frac{1}{365}\sum_{k=1}^{365}(t_k-\overline{t})(y_k-\overline{y})=\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{365}\sum_{k=1}^{365}(t_k-\overline{t})(x_k-\overline{x})=\frac{9}{5}Z$$

したがって，$\dfrac{W}{Z}=\dfrac{9}{5}$ である。

さらに，t の分散を T とおき，t と x，t と y の相関係数をそれぞれ U, V とすると，

$$V=\frac{W}{\sqrt{T}\sqrt{Y}}=\frac{\frac{9}{5}Z}{\sqrt{T}\sqrt{\frac{81}{25}X}}=\frac{Z}{\sqrt{T}\sqrt{X}}=U$$

したがって，$\dfrac{V}{U}=1$ である。

［解 説］

昨年と異なり，三角比とデータの分析の組合せで構成されています。[3]の(3)を除いて基本題です。なお，この[3](3)は数Ⅰの範囲とは思えませんが，結論に至るプロセスは，かなり記述を省略しつつ簡単に示しておきました。シグマ記号を使ったり，粗っぽい解答例ですが，公式を示してオシマイとするよりは……。

第３問

問題のページへ

(1) 赤球 4 個，青球 3 個，白球 5 個の球を袋の中に入れ，この袋から A がまず 1 個取り出し，その球をもとに戻さずに続いて B が 1 個取り出す。このとき，A, B が取り出した 2 個の球について，白球のみの確率は，$\dfrac{5}{12}\times\dfrac{4}{11}=\dfrac{5}{33}$

すると，赤球か青球が少なくとも 1 個含まれている確率は，$1-\dfrac{5}{33}=\dfrac{28}{33}$

(2) A が赤球, B が白球を取り出す確率は，$\dfrac{4}{12}\times\dfrac{5}{11}=\dfrac{5}{33}$

すると，A が赤球を取り出す確率は $\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$ なので，A の取り出した球が赤球であったとき，B の取り出した球が白球である条件付き確率は，

$$\frac{5}{33}\div\frac{1}{3}=\frac{5}{11}$$

(3) A が赤球，B が白球を取り出す確率は，(2)より $\dfrac{5}{33}$ である。

また，A が青球，B が白球を取り出す確率は，$\dfrac{3}{12}\times\dfrac{5}{11}=\dfrac{5}{44}$

さらに，A が白球，B も白球を取り出す確率は，(1)より $\dfrac{5}{33}$ である。

これより，B が白球を取り出す確率は，

$$\frac{5}{33}+\frac{5}{44}+\frac{5}{33}=\frac{5}{12}$$

したがって，B の取り出した球が白球であることがわかったとき，A の取り出した球も白球であった条件付き確率は，

$$\frac{5}{33}\div\frac{5}{12}=\frac{4}{11}$$

［解 説］

条件付き確率が題材となっている基本的な問題です。

第４問

問題のページへ

$$\begin{array}{rr|rr|r} & & 7 & & 2\\ 13 &) & 92 &) & 197\\ & & 91 & & 184\\ \hline & & 1 & & 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr|rr|r} & & 7 & & 2\\ b-2a &) & a &) & b\\ & & 7b-14a & & 2a\\ \hline & & 15a-7b & & b-2a \end{array}$$

(1)　不定方程式　$92x+197y=1$ ……①に対し，①を満たす特殊解を求めるために，92 と 197 に互除法を適用すると，右のようになる。ここで，$a=92$，$b=197$ とおき，互除法のプロセスと対比させて，余りの 1 に着目すると，

$15a-7b=1$，$15\times92-7\times197=1$

よって，$92\times15+197\times(-7)=1$ ………②

①②より，$92(x-15)+197(y+7)=0$

$92(x-15)=-197(y+7)$

ここで，92 と 197 は互いに素なので，k を整数として，

$x-15=197k$，$y+7=-92k$

すなわち，$x=197k+15$，$y=-92k-7$ と表せ，x の絶対値が最小となるのは $k=0$ のときで，このとき $x=15$，$y=-7$ である。

次に，不定方程式　$92x+197y=10$ ……③に対し，③を満たす特殊解は，②より，

$92\times150+197\times(-70)=10$ ………④

③④より，$92(x-150)+197(y+70)=0$，$92(x-150)=-197(y+70)$

ここで，92 と 197 は互いに素なので，l を整数として，

$x-150=197l$，$y+70=-92l$

すなわち，$x=197l+150$，$y=-92l-70$ と表せ，x の絶対値が最小となるのは $l=-1$ のときで，このとき $x=-47$，$y=22$ である。

(2)　まず，次の 2 進法の整数を 4 進法で表すと，

$$11011_{(2)}=1\times2^4+1\times2^3+1\times2+1=1\times4^2+2\times4+3=123_{(4)}$$

また，次の 6 進法の小数を 10 進法で表すと，

$$0.3_{(6)}=3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2},\ 0.4_{(6)}=4\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3},\ 0.33_{(6)}=3\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6^2}=\frac{7}{12}$$

$$0.43_{(6)}=4\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6^2}=\frac{3}{4},\ 0.033_{(6)}=\frac{7}{12}\times\frac{1}{6}=\frac{7}{72},\ 0.043_{(6)}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{8}$$

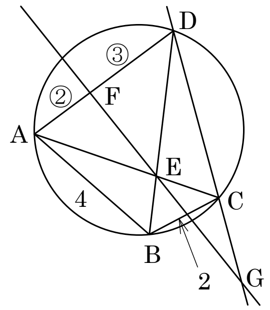
したがって，10 進法で有限小数として表せる数は，$0.3_{(6)}$，$0.43_{(6)}$，$0.043_{(6)}$である。

［解 説］

昨年と同様な互除法を使う 1 次不定方程式，および記数法の理解を確認する基本的な問題の組合せです。

第５問

問題のページへ



四角形ABCDは円に内接するので，

$\angle DAC = \angle DBC$，$\angle DCA = \angle ABD$

また，$DA = DC$ より，$\angle DAC = \angle DCA$ なので，

$\angle DAC = \angle DBC = \angle DCA = \angle ABD$

すると，直線BDは$\angle ABC$の二等分線となり，

$EC : AE = BC : AB = 2 : 4$，$\dfrac{EC}{AE} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

次に，△ACDと直線FEにメネラウスの定理を適用すると，

$\dfrac{AF}{FD} \cdot \dfrac{DG}{GC} \cdot \dfrac{CE}{EA} = 1$，$\dfrac{GC}{DG} = \dfrac{AF}{FD} \cdot \dfrac{CE}{EA} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$

(1)　直線ABが点Gを通る場合について，△AGDにチェバの定理を適用すると，

$\dfrac{AB}{BG} \cdot \dfrac{GC}{CD} \cdot \dfrac{DF}{FA} = 1$，$\dfrac{BG}{AB} = \dfrac{GC}{CD} \cdot \dfrac{DF}{FA} = \dfrac{1}{3-1} \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{4}$

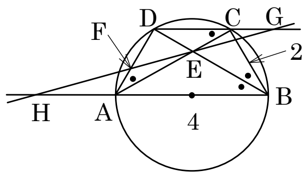
すると，$BG = \dfrac{3}{4} AB = 3$

また，$DC = x$ とおくと，$\dfrac{GC}{DC + GC} = \dfrac{1}{3}$ から $GC = \dfrac{x}{2}$ となり，方べきの定理より，

$GC \cdot GD = GB \cdot GA$，$\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{x}{2} + x\right) = 3(3+4)$，$\dfrac{3}{4}x^2 = 21$

よって，$DC = x = 2\sqrt{7}$

(2)　四角形ABCDの外接円の直径が最小となる場合は，その直径は $AB = 4$ である。そして，$AB = 4$，$BC = 2$，$\angle ACB = 90°$ から，$\angle BAC = 30°$ である。



すると，$\angle ABC = 60°$ から $\angle DBC = \angle ABD = 30°$ となり，四角形ABCDは $AD = DC = CB = 2$ である等脚台形になる。

これより，△AHEと△CGEは相似となり，相似比は $AE : CE = 2 : 1$ から，

$AH = 2CG = 2 \cdot \dfrac{1}{2} DC = 2$

［解 説］

平面図形について，いろいろな定理を確認する問題です。問題文に参考図は書いてあるものの，題意に対応すると，(1)は想像力を加えて何とかなりますが，(2)については書き直す必要が生じるでしょう。そのため，結構，時間を費やします。