## 第１問

解答解説のページへ

[1] (1) $8^{\frac{5}{6}} = \boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$，$\log_{27}\dfrac{1}{9} = \dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}$ である。

(2) $y = 2^x$ のグラフと $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ のグラフは $\boxed{カ}$ である。

$y = 2^x$ のグラフと $y = \log_2 x$ のグラフは $\boxed{キ}$ である。

$y = \log_2 x$ のグラフと $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフは $\boxed{ク}$ である。

$y = \log_2 x$ のグラフと $y = \log_2 \dfrac{1}{x}$ のグラフは $\boxed{ケ}$ である。

$\boxed{カ}$ ～ $\boxed{ケ}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ 同一のもの　　① $x$ 軸に関して対称

② $y$ 軸に関して対称　　③ 直線 $y = x$ に関して対称

(3) $x > 0$ の範囲における関数 $y = \left(\log_2 \dfrac{x}{4}\right)^2 - 4\log_4 x + 3$ の最小値を求めよう。

$t = \log_2 x$ とおく。このとき，$y = t^2 - \boxed{コ}t + \boxed{サ}$ である。また，$x$ が $x > 0$ の範囲を動くとき，$t$ のとり得る値の範囲は $\boxed{シ}$ である。$\boxed{シ}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから 1 つ選べ。

⓪ $t > 0$　　① $t > 1$

② $t > 0$ かつ $t \neq 1$　　③ 実数全体

したがって，$y$ は $t = \boxed{ス}$ のとき，すなわち $x = \boxed{セ}$ のとき，最小値 $\boxed{ソタ}$ をとる。

[2] $k$ を正の定数として，$\cos^2 x - \sin^2 x + k\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right) = 0$ ……①を満たす $x$ について考える。

(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で①を満たす $x$ の個数について考えよう。

①の両辺に $\sin^2 x \cos^2 x$ をかけ，2 倍角の公式を用いて変形すると，$\left(\dfrac{\sin^2 2x}{\boxed{チ}} - k\right)\cos 2x = 0$ ……②を得る。したがって，$k$ の値に関係なく，$x = \dfrac{\pi}{\boxed{ツ}}$ のときはつねに①が成り立つ。また，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $0 < \sin^2 2x \leqq 1$ であるから，$k > \dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$ のとき，①を満たす $x$ は $\dfrac{\pi}{\boxed{ツ}}$ のみで

ある。一方，$0 < k < \dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$ のとき，①を満たす $x$ の個数は $\boxed{ナ}$ 個であり，

$k = \dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$ のときは $\boxed{ニ}$ 個である。

(2) $k = \dfrac{4}{25}$ とし，$\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で①を満たす $x$ について考えよう。

②により，$\sin 2x = \dfrac{\boxed{ヌ}}{\boxed{ネ}}$ であるから，$\cos 2x = \dfrac{\boxed{ノハ}}{\boxed{ヒ}}$ である。したがって，$\cos x = \dfrac{\sqrt{\boxed{フ}}}{\boxed{ヘ}}$ である。

## 第２問

解答解説のページへ

座標平面上で，放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ を $C_1$ とし，放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ を $C_2$ とする。

(1) 実数 $a$ に対して, 2 直線 $x=a$， $x=a+1$ と $C_1$， $C_2$ で囲まれた図形 $D$ の面積 $S$ は

$$S=\int_a^{a+1}\left(\frac{1}{\boxed{\text{ア}}}x^2+\frac{1}{\boxed{\text{イ}}}\right)dx=\frac{a^2}{\boxed{\text{ウ}}}+\frac{a}{\boxed{\text{エ}}}+\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$$

である。$S$ は $a=\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ で最小値 $\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}$ をとる。

(2) 4 点$(a,\ 0)$，$(a+1,\ 0)$，$(a+1,\ 1)$，$(a,\ 1)$を頂点とする正方形を $R$ で表す。$a$ が $a\geqq 0$ の範囲を動くとき，正方形 $R$ と(1)の図形 $D$ の共通部分の面積を $T$ とおく。$T$ が最大となる $a$ の値を求めよう。

直線 $y=1$ は，$C_1$ と $\left(\pm\boxed{\text{ソ}},\ 1\right)$ で，$C_2$ と $\left(\pm\boxed{\text{タ}},\ 1\right)$ で交わる。したがって，正方形 $R$ と図形 $D$ の共通部分が空集合にならないのは，$0\leqq a\leqq\boxed{\text{チ}}$ のときである。

$\boxed{\text{ソ}}\leqq a\leqq\boxed{\text{チ}}$ のとき，正方形 $R$ は放物線 $C_1$ と $x$ 軸の間にあり，この範囲で $a$ が増加するとき，$T$ は $\boxed{\text{ツ}}$。$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから 1 つ選べ。

⓪ 増加する　　① 減少する　　② 変化しない

したがって，$T$ が最大になる $a$ の値は，$0\leqq a\leqq\boxed{\text{ソ}}$ の範囲にある。

$0\leqq a\leqq\boxed{\text{ソ}}$ のとき，(1)の図形 $D$ のうち，正方形 $R$ の外側にある部分の面積 $U$ は，$U=\dfrac{a^3}{\boxed{\text{テ}}}+\dfrac{a^2}{\boxed{\text{ト}}}$ である。よって，$0\leqq a\leqq\boxed{\text{ソ}}$ において

$$T=-\frac{a^3}{\boxed{\text{ナ}}}-\frac{a^2}{\boxed{\text{ニ}}}+\frac{a}{\boxed{\text{ヌ}}}+\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}\ \cdots\cdots\cdots①$$

である。①の右辺の増減を調べることにより，$T$ は $a=\dfrac{\boxed{\text{ネノ}}+\sqrt{\boxed{\text{ハ}}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ で最大値をとることがわかる。

## 第３問

解答解説のページへ

真分数を分母の小さい順に,分母が同じ場合には分子の小さい順に並べてできる数列

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \cdots$$

を$\{a_n\}$とする。真分数とは，分子と分母がともに自然数で，分子が分母より小さい分数のことであり，上の数列では，約分できる形の分数も含めて並べている。以下の問題に分数形で解答する場合は，**解答上の注意**にあるように，それ以上約分できない形で答えよ。

(1)　$a_{15} = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。また，分母に初めて 8 が現れる項は，$a_{\boxed{\text{ウエ}}}$ である。

(2)　$k$ を 2 以上の自然数とする。数列$\{a_n\}$において，$\dfrac{1}{k}$ が初めて現れる項を第 $M_k$ 項とし，$\dfrac{k-1}{k}$ が初めて現れる項を第 $N_k$ 項とすると

$$M_k = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}k^2 - \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}k + \boxed{\text{ケ}},\quad N_k = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}k^2 - \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}k$$

である。よって，$a_{104} = \dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ である。

(3)　$k$ を 2 以上の自然数とする。数列$\{a_n\}$の第 $M_k$ 項から第 $N_k$ 項までの和は，$\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}k - \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。したがって，数列$\{a_n\}$の初項から第 $N_k$ 項までの和は，$\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}k^2 - \dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}k$ である。よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{103} a_n = \frac{\boxed{\text{ハヒフ}}}{\boxed{\text{ヘホ}}}$ である。

## 第４問

解答解説のページへ

四面体 OABC において，$|\overrightarrow{OA}|=3$，$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=2$，$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=60^\circ$ であるとする。また，辺 OA 上に点 P をとり，辺 BC 上に点 Q をとる。以下，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく。

(1)　$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$ であるような実数 $s$，$t$ を用いて $\overrightarrow{OP}=s\vec{a}$，$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$ と表す。$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\boxed{\text{ア}}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\boxed{\text{イ}}$ であることから

$$|\overrightarrow{PQ}|^2=\left(\boxed{\text{ウ}}s-\boxed{\text{エ}}\right)^2+\left(\boxed{\text{オ}}t-\boxed{\text{カ}}\right)^2+\boxed{\text{キ}}$$

となる。したがって，$|\overrightarrow{PQ}|$ が最小となるのは $s=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$，$t=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ のときであり，このとき $|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ となる。

(2)　三角形 ABC の重心を G とする。$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ のとき，三角形 GPQ の面積を求めよう。

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PQ}=\boxed{\text{ス}}$ から，$\angle APQ=\boxed{\text{セソ}}^\circ$ である。したがって，三角形 APQ の面積は $\sqrt{\boxed{\text{タ}}}$ である。また，$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\overrightarrow{OQ}$ であり，点 G は線分 AQ を $\boxed{\text{ナ}}:1$ に内分する点である。

以上のことから，三角形 GPQ の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

## 第５問

解答解説のページへ

$n$ を自然数とする。原点 O から出発して数直線上を $n$ 回移動する点 A を考える。点 A は，1 回ごとに，確率 $p$ で正の向きに 3 だけ移動し，確率$1-p$ で負の向きに 1 だけ移動する。ここで，$0<p<1$ である。$n$ 回移動した後の点 A の座標を $X$ とし，$n$ 回の移動のうち正の向きの移動の回数を $Y$ とする。

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 8 ページの正規分布表を用いてもよい。

(1) $p=\dfrac{1}{3}$，$n=2$のとき，確率変数 $X$ のとり得る値は，小さい順に $-\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$であり，これらの値をとる確率は，それぞれ $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$，$\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{オ}}}$，$\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(2) $n$ 回移動したとき，$X$ と $Y$ の間に，$X=\boxed{\text{ク}}n+\boxed{\text{ケ}}Y$ の関係が成り立つ。

確率変数 $Y$ の平均（期待値）は$\boxed{\text{コ}}$，分散は$\boxed{\text{サ}}$なので，$X$ の平均は$\boxed{\text{シ}}$，分散は$\boxed{\text{ス}}$である。$\boxed{\text{コ}}$～$\boxed{\text{ス}}$に当てはまるものを，次の⓪～ⓑのうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

| | | |
|---|---|---|
| ⓪ $np$ | ① $np(1-p)$ | ② $\dfrac{p(1-p)}{n}$ |
| ③ $2np$ | ④ $2np(1-p)$ | ⑤ $p(1-p)$ |
| ⑥ $4np$ | ⑦ $4np(1-p)$ | ⑧ $16np(1-p)$ |
| ⑨ $4np-n$ | ⓐ $4np(1-p)-n$ | ⓑ $16np(1-p)-n$ |

(3) $p=\dfrac{1}{4}$のとき，1200 回移動した後の点 A の座標 $X$ が 120 以上になる確率の近似値を求めよう。

(2)より，$Y$ の平均は$\boxed{\text{セソタ}}$，標準偏差は$\boxed{\text{チツ}}$であり，求める確率は次のようになる。

$$P(X\geqq 120)=P\left(\frac{Y-\boxed{\text{セソタ}}}{\boxed{\text{チツ}}}\geqq\boxed{\text{テ}}.\boxed{\text{トナ}}\right)$$

いま，標準正規分布に従う確率変数を $Z$ とすると，$n=1200$は十分に大きいので，求める確率の近似値は正規分布表から次のように求められる。

$$P(Z\geqq\boxed{\text{テ}}.\boxed{\text{トナ}})=0.\boxed{\text{ニヌネ}}$$

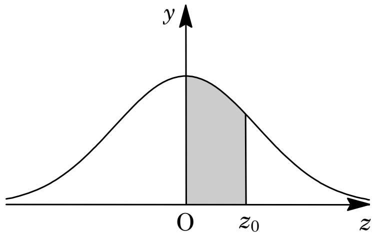
(4) $p$ の値がわからないとする。2400 回移動した後の点 A の座標が $X=1440$ のとき，$p$ に対する信頼度 95%の信頼区間を求めよう。

$n$ 回移動したときに $Y$ がとる値を $y$ とし，$r=\dfrac{y}{n}$ とおくと，$n$ が十分に大きいならば，確率変数 $R=\dfrac{Y}{n}$ は近似的に平均 $p$，分散 $\dfrac{p(1-p)}{n}$ の正規分布に従う。

$n=2400$ は十分に大きいので，このことを利用し，分散を $\dfrac{r(1-r)}{n}$ で置き換えることにより，求める信頼区間は，$0.\boxed{\text{ノハヒ}} \leqq p \leqq 0.\boxed{\text{フヘホ}}$ となる。

# 正 規 分 布 表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。




| $z_0$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0000 | 0.0040 | 0.0080 | 0.0120 | 0.0160 | 0.0199 | 0.0239 | 0.0279 | 0.0319 | 0.0359 |
| 0.1 | 0.0398 | 0.0438 | 0.0478 | 0.0517 | 0.0557 | 0.0596 | 0.0636 | 0.0675 | 0.0714 | 0.0753 |
| 0.2 | 0.0793 | 0.0832 | 0.0871 | 0.0910 | 0.0948 | 0.0987 | 0.1026 | 0.1064 | 0.1103 | 0.1141 |
| 0.3 | 0.1179 | 0.1217 | 0.1255 | 0.1293 | 0.1331 | 0.1368 | 0.1406 | 0.1443 | 0.1480 | 0.1517 |
| 0.4 | 0.1554 | 0.1591 | 0.1628 | 0.1664 | 0.1700 | 0.1736 | 0.1772 | 0.1808 | 0.1844 | 0.1879 |
| 0.5 | 0.1915 | 0.1950 | 0.1985 | 0.2019 | 0.2054 | 0.2088 | 0.2123 | 0.2157 | 0.2190 | 0.2224 |
| 0.6 | 0.2257 | 0.2291 | 0.2324 | 0.2357 | 0.2389 | 0.2422 | 0.2454 | 0.2486 | 0.2517 | 0.2549 |
| 0.7 | 0.2580 | 0.2611 | 0.2642 | 0.2673 | 0.2704 | 0.2734 | 0.2764 | 0.2794 | 0.2823 | 0.2852 |
| 0.8 | 0.2881 | 0.2910 | 0.2939 | 0.2967 | 0.2995 | 0.3023 | 0.3051 | 0.3078 | 0.3106 | 0.3133 |
| 0.9 | 0.3159 | 0.3186 | 0.3212 | 0.3238 | 0.3264 | 0.3289 | 0.3315 | 0.3340 | 0.3365 | 0.3389 |
| 1.0 | 0.3413 | 0.3438 | 0.3461 | 0.3485 | 0.3508 | 0.3531 | 0.3554 | 0.3577 | 0.3599 | 0.3621 |
| 1.1 | 0.3643 | 0.3665 | 0.3686 | 0.3708 | 0.3729 | 0.3749 | 0.3770 | 0.3790 | 0.3810 | 0.3830 |
| 1.2 | 0.3849 | 0.3869 | 0.3888 | 0.3907 | 0.3925 | 0.3944 | 0.3962 | 0.3980 | 0.3997 | 0.4015 |
| 1.3 | 0.4032 | 0.4049 | 0.4066 | 0.4082 | 0.4099 | 0.4115 | 0.4131 | 0.4147 | 0.4162 | 0.4177 |
| 1.4 | 0.4192 | 0.4207 | 0.4222 | 0.4236 | 0.4251 | 0.4265 | 0.4279 | 0.4292 | 0.4306 | 0.4319 |
| 1.5 | 0.4332 | 0.4345 | 0.4357 | 0.4370 | 0.4382 | 0.4394 | 0.4406 | 0.4418 | 0.4429 | 0.4441 |
| 1.6 | 0.4452 | 0.4463 | 0.4474 | 0.4484 | 0.4495 | 0.4505 | 0.4515 | 0.4525 | 0.4535 | 0.4545 |
| 1.7 | 0.4554 | 0.4564 | 0.4573 | 0.4582 | 0.4591 | 0.4599 | 0.4608 | 0.4616 | 0.4625 | 0.4633 |
| 1.8 | 0.4641 | 0.4649 | 0.4656 | 0.4664 | 0.4671 | 0.4678 | 0.4686 | 0.4693 | 0.4699 | 0.4706 |
| 1.9 | 0.4713 | 0.4719 | 0.4726 | 0.4732 | 0.4738 | 0.4744 | 0.4750 | 0.4756 | 0.4761 | 0.4767 |
| 2.0 | 0.4772 | 0.4778 | 0.4783 | 0.4788 | 0.4793 | 0.4798 | 0.4803 | 0.4808 | 0.4812 | 0.4817 |
| 2.1 | 0.4821 | 0.4826 | 0.4830 | 0.4834 | 0.4838 | 0.4842 | 0.4846 | 0.4850 | 0.4854 | 0.4857 |
| 2.2 | 0.4861 | 0.4864 | 0.4868 | 0.4871 | 0.4875 | 0.4878 | 0.4881 | 0.4884 | 0.4887 | 0.4890 |
| 2.3 | 0.4893 | 0.4896 | 0.4898 | 0.4901 | 0.4904 | 0.4906 | 0.4909 | 0.4911 | 0.4913 | 0.4916 |
| 2.4 | 0.4918 | 0.4920 | 0.4922 | 0.4925 | 0.4927 | 0.4929 | 0.4931 | 0.4932 | 0.4934 | 0.4936 |
| 2.5 | 0.4938 | 0.4940 | 0.4941 | 0.4943 | 0.4945 | 0.4946 | 0.4948 | 0.4949 | 0.4951 | 0.4952 |
| 2.6 | 0.4953 | 0.4955 | 0.4956 | 0.4957 | 0.4959 | 0.4960 | 0.4961 | 0.4962 | 0.4963 | 0.4964 |
| 2.7 | 0.4965 | 0.4966 | 0.4967 | 0.4968 | 0.4969 | 0.4970 | 0.4971 | 0.4972 | 0.4973 | 0.4974 |
| 2.8 | 0.4974 | 0.4975 | 0.4976 | 0.4977 | 0.4977 | 0.4978 | 0.4979 | 0.4979 | 0.4980 | 0.4981 |
| 2.9 | 0.4981 | 0.4982 | 0.4982 | 0.4983 | 0.4984 | 0.4984 | 0.4985 | 0.4985 | 0.4986 | 0.4986 |
| 3.0 | 0.4987 | 0.4987 | 0.4987 | 0.4988 | 0.4988 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4990 | 0.4990 |

## 第１問

問題のページへ

[1]　(1)　$8^{\frac{5}{6}}=(2^3)^{\frac{5}{6}}=2^{\frac{5}{2}}=4\sqrt{2}$，$\log_{27}\dfrac{1}{9}=\dfrac{\log_3 3^{-2}}{\log_3 27}=\dfrac{-2\log_3 3}{3\log_3 3}=-\dfrac{2}{3}$

(2)　$y=2^x$ と $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$ のグラフは，$y$ 軸に関して対称。

$y=2^x$ と $y=\log_2 x$ $(x=2^y)$ のグラフは，直線 $y=x$ に関して対称。

$y=\log_2 x$ と $y=\log_{\frac{1}{2}} x=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 2^{-1}}=-\log_2 x$ のグラフは，$x$ 軸に関して対称。

$y=\log_2 x$ と $y=\log_2\dfrac{1}{x}=\log_2 x^{-1}=-\log_2 x$ のグラフは，$x$ 軸に関して対称。

(3)　$y=\left(\log_2\dfrac{x}{4}\right)^2-4\log_4 x+3$ に対して，$t=\log_2 x$ とおくと，

$$y=(\log_2 x-\log_2 4)^2-4\cdot\frac{\log_2 x}{\log_2 4}+3=(t-2)^2-2t+3$$

$$=t^2-6t+7=(t-3)^2-2$$

ここで，$x$ が $x>0$ の範囲を動くとき，$t$ のとり得る値の範囲は実数全体より，$t=3$，すなわち $x=2^3=8$ のとき，$y$ は最小値 $-2$ をとる。

[2]　(1)　$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos^2 x-\sin^2 x+k\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)=0$ ……①に対して，

$$\sin^2 x\cos^2 x(\cos^2 x-\sin^2 x)+k(\sin^2 x-\cos^2 x)=0$$

よって，$\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)^2\cos 2x-k\cos 2x=0$ から，$\left(\dfrac{\sin^2 2x}{4}-k\right)\cos 2x=0$ ………②

$k=\dfrac{\sin^2 2x}{4}$ ………③，$\cos 2x=0$ ………④

④から，$2x=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $x=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$k$ の値に関係なく①が成り立つ。

また，③を満たす $x$ は，$0<\sin^2 2x\leqq 1$ より，$k>\dfrac{1}{4}$ のとき存在しない。$k=\dfrac{1}{4}$ のときは $x=\dfrac{\pi}{4}$ のみである。さらに，$0<k<\dfrac{1}{4}$ のときは $\dfrac{\pi}{4}$ でない $x$ が 2 個存在する。

したがって，③または④と同値である①を満たす $x$ の個数は，$k>\dfrac{1}{4}$ のとき 1 個，$0<k<\dfrac{1}{4}$ のとき 3 個，$k=\dfrac{1}{4}$ のとき 1 個である。

(2)　条件より，②は $\left(\dfrac{\sin^2 2x}{4}-\dfrac{4}{25}\right)\cos 2x=0$ となり，$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ で $\cos 2x<0$ から，

$\dfrac{\sin^2 2x}{4}=\dfrac{4}{25}$，$\sin^2 2x=\dfrac{16}{25}$

$\sin 2x>0$ から $\sin 2x=\dfrac{4}{5}$ となり，$\cos 2x=-\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=-\dfrac{3}{5}$

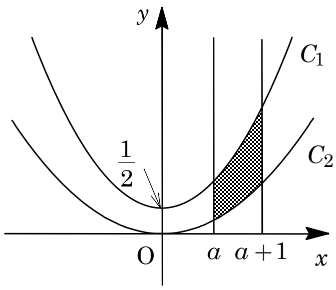
よって，$2\cos^2 x-1=-\dfrac{3}{5}$ より $\cos^2 x=\dfrac{1}{5}$ となり，$\cos x>0$ から $\cos x=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ である。

［解 説］

関数についての基本的な問題の組合せです。注意するのは，[2]の(1)で，$k=\dfrac{1}{4}$のとき，③の解と④の解は同じという点だけです。

## 第２問

問題のページへ



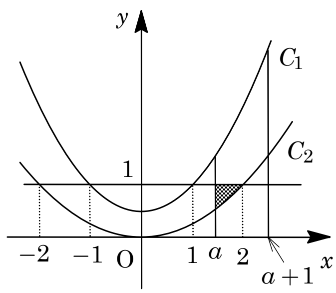

(1) $C_1 : y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$，$C_2 : y=\frac{1}{4}x^2$ に対して，2 直線 $x=a$，$x=a+1$ と $C_1$，$C_2$ で囲まれた図形 $D$ の面積 $S$ は,

$$S=\int_a^{a+1}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x^2\right)dx$$
$$=\int_a^{a+1}\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\right)dx=\left[\frac{x^3}{12}+\frac{x}{2}\right]_a^{a+1}$$
$$=\frac{1}{12}(3a^2+3a+1)+\frac{1}{2}=\frac{a^2}{4}+\frac{a}{4}+\frac{7}{12}=\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{48}$$

これより，$S$ は $a=-\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{25}{48}$ をとる。

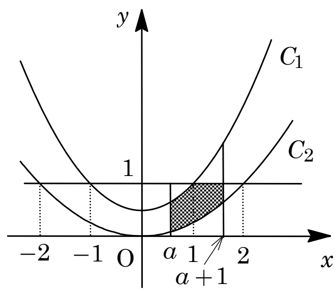
(2) $C_1$ と直線 $y=1$ の交点は，$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}=1$ より $x=\pm1$ となり，その座標は $(\pm1,\ 1)$

$C_2$ と直線 $y=1$ の交点は，$\frac{1}{4}x^2=1$ より $x=\pm2$ となり，その座標は $(\pm2,\ 1)$




したがって，$a\geqq0$ のとき，4 点 $(a,\ 0)$，$(a+1,\ 0)$，$(a+1,\ 1)$，$(a,\ 1)$ を頂点とする正方形 $R$ と図形 $D$ の共通部分が空集合にならないのは，$0\leqq a\leqq2$ のときである。そして，この共通部分の面積 $T$ は，$1\leqq a\leqq2$ のとき，$a$ が増加すると明らかに減少する。

これより，$T$ が最大になる $a$ の値は，$0\leqq a\leqq1$ の範囲にあり，このとき図形 $D$ のうち，正方形 $R$ の外側にある部分の面積 $U$ は,




$$U=\int_1^{a+1}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}-1\right)dx$$
$$=\int_1^{a+1}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)dx=\left[\frac{x^3}{6}-\frac{x}{2}\right]_1^{a+1}$$
$$=\frac{1}{6}(a^3+3a^2+3a)-\frac{1}{2}a=\frac{a^3}{6}+\frac{a^2}{2}$$

すると，$T=S-U$ から,

$$T=\frac{a^2}{4}+\frac{a}{4}+\frac{7}{12}-\frac{a^3}{6}-\frac{a^2}{2}=-\frac{a^3}{6}-\frac{a^2}{4}+\frac{a}{4}+\frac{7}{12}$$
$$T'=-\frac{a^2}{2}-\frac{a}{2}+\frac{1}{4}$$
$$=-\frac{1}{4}(2a^2+2a-1)$$

$0\leqq a\leqq1$ での $T'=0$ の解は $a=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ となり，$T$ の増減は右表のようになる。

| $a$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ | $\cdots$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $T'$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $T$ | | ↗ | | ↘ | |

よって，$T$ は $a=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ のとき最大値をとる。

［解 説］

面積についての設問がメインとなっている微積分の総合問題です。計算量は例年より少なめです。

## 第３問

問題のページへ

(1) 与えられた数列$\{a_n\}$を，分母に着目して以下のようにグループ分けをする。

$$\frac{1}{2}\ \Big|\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\ \Big|\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4}\ \Big|\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\ \Big|\ \frac{1}{6},\ \cdots$$

そして，第１群，第２群，第３群，第４群，…と名付ける。

さて，$15=1+2+3+4+5$ より，$a_{15}$ は第５群の末項より $a_{15}=\dfrac{5}{6}$ である。

また，分母に初めて８が現れるのは第７群の初項であり，第６群の末項の次項と考えると，$(1+2+3+4+5+6)+1=22$ 項目，すなわち $a_{22}$ である。

(2) $k$ を２以上の自然数として，分母が $k$ である第 $k-1$ 群の末項までの項数は，

$$1+2+3+\cdots+(k-1)=\frac{1}{2}k(k-1)$$

そして，第 $k-1$ 群の初項が第 $M_k$ 項，末項が第 $N_k$ 項なので，

$$M_k=\frac{1}{2}(k-1)(k-2)+1=\frac{1}{2}k^2-\frac{3}{2}k+2\quad（k=2\text{ のときも成立}）$$

$$N_k=\frac{1}{2}k(k-1)=\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}k$$

ここで，第 104 項が第 $k-1$ 群に属するとすると，$M_k-1<104\leqq N_k$ となり，

$$\frac{1}{2}(k-1)(k-2)<104\leqq\frac{1}{2}k(k-1)\ ,\ (k-1)(k-2)<208\leqq k(k-1)$$

すると，$14\times13=182$，$15\times14=210$ であるので，$k-1=14$ となる。

よって，$a_{104}$ は第 14 群に属する。さらに，$104-(M_{15}-1)=104-91=13$ から，$a_{104}$ はこの群の 13 項目である。これより，分母は 15，分子は 13 となり，

$$a_{104}=\frac{13}{15}$$

(3) 数列$\{a_n\}$の第 $M_k$ 項から第 $N_k$ 項までの和，すなわち第 $k-1$ 群内の項の和は，

$$\frac{1}{k}\{1+2+3+\cdots+(k-1)\}=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2}k(k-1)=\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}$$

これより，数列$\{a_n\}$の初項から第 $N_k$ 項までの和 $S_{N_k}$ は，

$$S_{N_k}=\left(\frac{1}{2}\cdot2-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot3-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot4-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}\right)(k-1)=\frac{1}{4}k(k-1)=\frac{1}{4}k^2-\frac{1}{4}k$$

そして，(2)から，$a_{103}$ は第 14 群の第 12 項目なので，

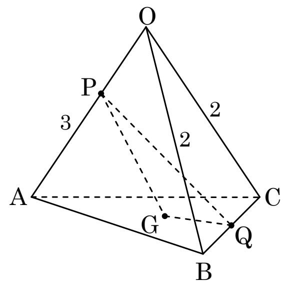
$$\sum_{n=1}^{103}a_n=S_{N_{13+1}}+\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{3}{15}+\cdots+\frac{12}{15}=\frac{1}{4}\cdot14\cdot13+\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{2}\cdot12\cdot13=\frac{507}{10}$$

### ［解　説］

群数列の基本題なのですが，誘導が「第 $k$ 群の分母は $k+1$」ではなく，「分母 $k$ が第 $k-1$ 群」となっているため，有難迷惑な印象をもってしまい……。

## 第４問

問題のページへ




(1) 四面体 OABC において，$|\overrightarrow{OA}|=3$，$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=2$

$$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=60^\circ$$

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくと，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=3\cdot 2\cos 60^\circ=3,\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=2\cdot 2\cos 60^\circ=2$$

また，$\overrightarrow{OP}=s\vec{a}$，$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$ から，

$$\overrightarrow{PQ}=-s\vec{a}+(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$$

$$|\overrightarrow{PQ}|^2=s^2\cdot 3^2+(1-t)^2\cdot 2^2+t^2\cdot 2^2-2s(1-t)\cdot 3-2st\cdot 3+2(1-t)t\cdot 2$$

$$=9s^2-6s+4t^2-4t+4=(3s-1)^2+(2t-1)^2+2$$

したがって，$|\overrightarrow{PQ}|$ が最小となるのは $s=\dfrac{1}{3}$，$t=\dfrac{1}{2}$ のときであり，このとき $|\overrightarrow{PQ}|^2=2$ すなわち $|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{2}$ となる。

(2) $|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{2}$ のとき，(1)より，$\overrightarrow{PQ}=-\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$ となり，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PQ}=\vec{a}\cdot\left(-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=-\frac{1}{3}\cdot 3^2+\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 3=0$$

よって，$\angle APQ=90^\circ$ であるので，$\triangle APQ=\dfrac{1}{2}AP\cdot PQ=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}$

また，三角形 ABC の重心を G とすると，

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OQ}$$

これより，点 G は線分 AQ を $2:1$ に内分するので，

$$\triangle GPQ=\frac{1}{3}\triangle APQ=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

### ［解 説］

ベクトルの四面体への応用問題です。計算量も少なく，内容も平易なものとなっています。

## 第５問

問題のページへ

(1) 原点 O から出発して数直線上を移動する点 A は，1 回ごとに，確率 $p$ で正の向きに 3 だけ移動し，確率 $1-p$ で負の向きに 1 だけ移動する。そして，$n$ 回移動した後の点 A の座標を $X$ とし，$n$ 回の移動のうち正の向きの移動の回数を $Y$ とする。

$p=\frac{1}{3}$，$n=2$ のとき，$X$ のとり得る値は，$-1-1=-2$，$-1+3=2$，$3+3=6$

$$P(X=-2)=(1-p)^2=\frac{4}{9},\ P(X=2)={}_2\mathrm{C}_1\,p(1-p)=\frac{4}{9}$$

$$P(X=6)=p^2=\frac{1}{9}$$

(2) $n$ 回の移動のうち正の向きに $Y$ 回，負の向きに $n-Y$ 回より，

$$X=3Y-(n-Y)=-n+4Y$$

ここで，確率変数 $Y$ は $B(n,\ p)$ に従い，$E(Y)=np$，$V(Y)=np(1-p)$ から，

$$E(X)=-n+4E(Y)=4np-n,\ V(X)=4^2V(Y)=16np(1-p)$$

(3) $p=\frac{1}{4}$，$n=1200$ のとき，(2)より，

$$E(Y)=1200\times\frac{1}{4}=300,\ \sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{1200\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}=\sqrt{225}=15$$

ここで，$X=-1200+4Y$ から，$X\geqq 120$ は $Y=\frac{X+1200}{4}\geqq 330$ に対応し，さらに $Z=\frac{Y-300}{15}$ とおくと，

$$P(X\geqq 120)=P(Y\geqq 330)=P(Z\geqq 2.00)$$

1200 は十分に大きく，$Z$ は $N(0,\ 1)$ に従うとみなせるので，正規分布表より，

$$P(Z\geqq 2.00)=0.5-0.4772\fallingdotseq 0.023$$

(4) $n=2400$，$X=1440$ のとき，(2)から，$1440=-2400+4Y$ となり $Y=960$ より，

$$R=\frac{Y}{n}=\frac{960}{2400}=\frac{2}{5}=0.4$$

さて，$n$ が十分に大きいならば，確率変数 $R=\frac{Y}{n}$ は近似的に $N\left(p,\ \frac{p(1-p)}{n}\right)$ に従うことから，母比率 $p$ に対する信頼度 95%の信頼区間は，

$$R-1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\leqq p\leqq R+1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

そこで，$p$ を $R=0.4$ で置き換えて，

$$1.96\times\sqrt{\frac{0.4\times0.6}{2400}}=1.96\times\sqrt{\frac{0.24}{2400}}=1.96\times\frac{1}{100}=0.0196$$

よって，$0.4-0.0196\leqq p\leqq 0.4+0.0196$ から，$0.380\leqq p\leqq 0.420$ となる。

［解 説］

確率分布と統計的推測の基本題です。(4)では，数値に配慮を強く感じます。