第１問

解答解説のページへ

[1] 連立方程式 $\cos 2\alpha+\cos 2\beta=\dfrac{4}{15}$ ……①，$\cos\alpha\cos\beta=-\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$ ……②を考える。ただし，$0\leqq\alpha\leqq\pi$，$0\leqq\beta\leqq\pi$ であり，$\alpha<\beta$ かつ $|\cos\alpha|\geqq|\cos\beta|$ ……③とする。このとき，$\cos\alpha$ と $\cos\beta$ の値を求めよう。

2 倍角の公式を用いると，①から，$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$ が得られる。また②から，$\cos^2\alpha\cos^2\beta=\dfrac{\boxed{オ}}{15}$ である。

したがって，条件③を用いると，$\cos^2\alpha=\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$，$\cos^2\beta=\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である。

よって，②と条件 $0\leqq\alpha\leqq\pi$，$0\leqq\beta\leqq\pi$，$\alpha<\beta$ から，$\cos\alpha=\dfrac{\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}}$，$\cos\beta=\dfrac{\boxed{ス}\sqrt{\boxed{セ}}}{\boxed{ソ}}$ である。

[2] 座標平面上に点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$ をとり，関数 $y=\log_2 x$ のグラフ上に 2 点 $\mathrm{B}(p,\ \log_2 p)$，$\mathrm{C}(q,\ \log_2 q)$ をとる。線分 AB を $1:2$ に内分する点が C であるとき，p，q の値を求めよう。

真数の条件により，$p>\boxed{タ}$，$q>\boxed{タ}$ である。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という。

線分 AB を $1:2$ に内分する点の座標は，p を用いて

$$\left(\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}p,\ \frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}\log_2 p+\boxed{ナ}\right)$$

と表される。これが C の座標と一致するので

$$\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}p=q\ \cdots\cdots\cdots④,\quad \frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}\log_2 p+\boxed{ナ}=\log_2 q\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

が成り立つ。

⑤は，$p=\dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}q^{\boxed{ネ}}$ ……⑥と変形できる。④と⑥を連立させた方程式を解いて，$p>\boxed{タ}$，$q>\boxed{タ}$ に注意すると，$p=\boxed{ノ}\sqrt{\boxed{ハ}}$，$q=\boxed{ヒ}\sqrt{\boxed{フ}}$ である。

また，C の y 座標 $\log_2\left(\boxed{\text{ヒ}}\sqrt{\boxed{\text{フ}}}\right)$ の値を，小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めると，$\boxed{\text{ヘ}}$ である。$\boxed{\text{ヘ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～ⓑのうちから 1 つ選べ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$，$\log_{10} 7 = 0.8451$ とする。

⓪ 0.3　① 0.6　② 0.9　③ 1.3　④ 1.6　⑤ 1.9

⑥ 2.3　⑦ 2.6　⑧ 2.9　⑨ 3.3　ⓐ 3.6　ⓑ 3.9

第２問

解答解説のページへ

O を原点とする座標平面上の放物線 $y=x^2+1$ を C とし，点 $(a,\ 2a)$ を P とする。

(1) 点 P を通り，放物線 C に接する直線の方程式を求めよう。

C 上の点 $(t,\ t^2+1)$ における接線の方程式は，$y=\boxed{\text{ア}}tx-t^2+\boxed{\text{イ}}$ である。

この直線が P を通るとすると，t は方程式

$$t^2-\boxed{\text{ウ}}at+\boxed{\text{エ}}a-\boxed{\text{オ}}=0$$

を満たすから，$t=\boxed{\text{カ}}a-\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ である。よって，$a\neq\boxed{\text{ケ}}$ のとき，P を通る C の接線は 2 本あり，それらの方程式は

$$y=\left(\boxed{\text{コ}}a-\boxed{\text{サ}}\right)x-\boxed{\text{シ}}a^2+\boxed{\text{ス}}a \quad\cdots\cdots\cdots①$$

と $y=\boxed{\text{セ}}x$ である。

(2) (1)の方程式①で表される直線を l とする。l と y 軸との交点を $\mathrm{R}(0,\ r)$ とすると，$r=-\boxed{\text{シ}}a^2+\boxed{\text{ス}}a$ である。$r>0$ となるのは，$\boxed{\text{ソ}}<a<\boxed{\text{タ}}$ のときであり，このとき，三角形 OPR の面積 S は

$$S=\boxed{\text{チ}}\left(a^{\boxed{\text{ツ}}}-a^{\boxed{\text{テ}}}\right)$$

となる。

$\boxed{\text{ソ}}<a<\boxed{\text{タ}}$ のとき，S の増減を調べると，S は $a=\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ で最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ をとることがわかる。

(3) $\boxed{\text{ソ}}<a<\boxed{\text{タ}}$ のとき，放物線 C と(2)の直線 l および 2 直線 $x=0$，$x=a$ で囲まれた図形の面積を T とすると

$$T=\frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}a^3-\boxed{\text{ヒ}}a^2+\boxed{\text{フ}}$$

である。$\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\leqq a<\boxed{\text{タ}}$ の範囲において，T は $\boxed{\text{ヘ}}$。$\boxed{\text{ヘ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから 1 つ選べ。

⓪ 減少する　　① 極小値をとるが，極大値はとらない

② 増加する　　③ 極大値をとるが，極小値はとらない

④ 一定である　　⑤ 極小値と極大値の両方をとる

第３問

解答解説のページへ

以下において考察する数列の項は，すべて実数であるとする。

(1)　等比数列$\{s_n\}$の初項が 1，公比が 2 であるとき

$$s_1 s_2 s_3 = \boxed{\text{ア}},\ \ s_1 + s_2 + s_3 = \boxed{\text{イ}}$$

である。

(2)　$\{s_n\}$を初項x，公比rの等比数列とする。a，bを実数（ただし$a \neq 0$）とし，$\{s_n\}$の最初の 3 項が

$$s_1 s_2 s_3 = a^3 \cdots\cdots\cdots ①,\ \ s_1 + s_2 + s_3 = b \cdots\cdots\cdots ②$$

を満たすとする。このとき，$xr = \boxed{\text{ウ}} \cdots\cdots ③$である。

さらに，②③を用いてr, a, bの満たす関係式を求めると

$$\boxed{\text{エ}}\, r^2 + \left(\boxed{\text{オ}} - \boxed{\text{カ}} \right) r + \boxed{\text{キ}} = 0 \cdots\cdots\cdots ④$$

を得る。④を満たす実数rが存在するので

$$\boxed{\text{ク}}\, a^2 + \boxed{\text{ケ}}\, ab - b^2 \leqq 0 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

である。

逆に，a, bが⑤を満たすとき，③，④を用いてr, xの値を求めることができる。

(3)　$a = 64$，$b = 336$のとき，(2)の条件①，②を満たし，公比が 1 より大きい等比数列$\{s_n\}$を考える。③，④を用いて$\{s_n\}$の公比rと初項xを求めると，$r = \boxed{\text{コ}}$，$x = \boxed{\text{サシ}}$である。

$\{s_n\}$を用いて，数列$\{t_n\}$を，$t_n = s_n \log_{\boxed{\text{コ}}} s_n$　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$と定める。このとき，$\{t_n\}$の一般項は$t_n = \left(n + \boxed{\text{ス}} \right) \cdot \boxed{\text{コ}}^{\,n + \boxed{\text{セ}}}$である。$\{t_n\}$の初項から第$n$項までの和$U_n$は，$U_n - \boxed{\text{コ}}\, U_n$を計算することにより

$$U_n = \frac{\boxed{\text{ソ}}\, n + \boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} \cdot \boxed{\text{コ}}^{\,n + \boxed{\text{ツ}}} - \frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

であることがわかる。

第４問

解答解説のページへ

座標平面上に点A(2, 0)をとり，原点 O を中心とする半径が 2 の円周上に点 B, C, D, E, F を，点 A, B, C, D, E, F が順に正六角形の頂点となるようにとる。ただし，B は第 1 象限にあるとする。

(1) 点 B の座標は$\left(\boxed{\text{ア}},\ \sqrt{\boxed{\text{イ}}}\right)$，点 D の座標は$\left(-\boxed{\text{ウ}},\ 0\right)$である。

(2) 線分 BD の中点を M とし，直線 AM と直線 CD の交点を N とする。$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を求めよう。

$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ は実数 r, s を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+r\overrightarrow{\mathrm{AM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ と 2 通りに表すことができる。ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\left(-\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}},\ \frac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}\right),\quad \overrightarrow{\mathrm{DC}}=\left(\boxed{\text{ク}},\ \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}\right)$$

であるから，$r=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$，$s=\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。よって

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\left(-\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}},\ \frac{\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}\right)$$

である。

(3) 線分 BF 上の点 P をとり，その y 座標を a とする。点 P から直線 CE に引いた垂線と，点 C から直線 EP に引いた垂線との交点を H とする。

$\overrightarrow{\mathrm{EP}}$ が，$\overrightarrow{\mathrm{EP}}=\left(\boxed{\text{テ}},\ \boxed{\text{ト}}+\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}\right)$ と表せることより，H の座標を a を用いて表すと

$$\left(\frac{\boxed{\text{ニ}}a^{\boxed{\text{ヌ}}}+\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}},\ \boxed{\text{ハ}}\right)$$

である。

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ のなす角を θ とする。$\cos\theta=\dfrac{12}{13}$ のとき，a の値は

$a=\pm\dfrac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フヘ}}}$ である。

第５問

解答解説のページへ

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 7 ページの正規分布表を用いてもよい。

(1)　1 回の試行において，事象 A の起こる確率が p，起こらない確率が $1-p$ であるとする。この試行を n 回繰り返すとき，事象 A の起こる回数を W とする。確率変数 W の平均（期待値）m が $\dfrac{1216}{27}$，標準偏差 σ が $\dfrac{152}{27}$ であるとき，$n=\boxed{アイウ}$，

$p=\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オカ}}$ である。

(2)　(1)の反復試行において，W が 38 以上となる確率の近似値を求めよう。いま

$$P(W \geqq 38)=P\left(\frac{W-m}{\sigma} \geqq -\boxed{キ}.\boxed{クケ}\right)$$

と変形できる。ここで，$Z=\dfrac{W-m}{\sigma}$ とおき，W の分布を正規分布で近似すると，正規分布表から確率の近似値は次のように求められる。

$$P\left(Z \geqq -\boxed{キ}.\boxed{クケ}\right)=0.\boxed{コサ}$$

(3)　連続型確率変数 X のとり得る値 x の範囲が $s \leqq x \leqq t$ で，確率密度関数が $f(x)$ のとき，X の平均 $E(X)$ は次の式で与えられる。

$$E(X)=\int_s^t xf(x)dx$$

a を正の実数とする。連続型確率変数 X のとり得る値 x の範囲が $-a \leqq x \leqq 2a$ で，確率密度関数が

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{3a^2}(x+a) & (-a \leqq x \leqq 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{3a^2}(2a-x) & (0 \leqq x \leqq 2a \text{ のとき}) \end{cases}$$

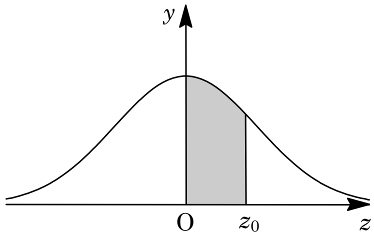
であるとする。このとき，$a \leqq X \leqq \dfrac{3}{2}a$ となる確率は $\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ である。

また，X の平均は $\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$ である。さらに，$Y=2X+7$ とおくと，Y の平均は

$\dfrac{\boxed{タチ}}{\boxed{ツ}}+\boxed{テ}$ である。

正 規 分 布 表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

第１問

問題のページへ

[1]　$\cos 2\alpha+\cos 2\beta=\dfrac{4}{15}$ ……①，$\cos\alpha\cos\beta=-\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$ ……②に対して，

①より，$2\cos^2\alpha-1+2\cos^2\beta-1=\dfrac{4}{15}$，$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\dfrac{17}{15}$

②より，$\cos^2\alpha\cos^2\beta=\dfrac{4}{15}$

すると，$\cos^2\alpha$，$\cos^2\beta$ は２次方程式 $x^2-\dfrac{17}{15}x+\dfrac{4}{15}=0$ の２つの解となり，

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{4}{5}\right)=0,\ x=\frac{1}{3},\ \frac{4}{5}$$

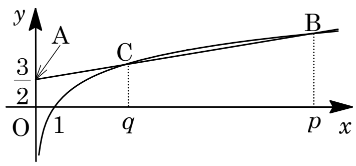
ここで，$|\cos\alpha|\geqq|\cos\beta|$ ……③より，$\cos^2\alpha>\cos^2\beta$ なので，

$$\cos^2\alpha=\frac{4}{5},\ \cos^2\beta=\frac{1}{3}$$

②から $\cos\alpha\cos\beta<0$ であり，$0\leqq\alpha\leqq\pi$，$0\leqq\beta\leqq\pi$，$\alpha<\beta$ から，

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5},\ \cos\beta=-\sqrt{\frac{1}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

[2]　点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$，$\mathrm{B}(p,\ \log_2 p)$，$\mathrm{C}(q,\ \log_2 q)$ に対し，$p>0$，$q>0$ のもとで，線分 AB を $1:2$ に内分する点の座標を $(x,\ y)$ とおくと，



$$x=\frac{p}{1+2}=\frac{1}{3}p,\ y=\frac{3+\log_2 p}{1+2}=\frac{1}{3}\log_2 p+1$$

この内分点が点 C なので，

$$\frac{1}{3}p=q\ \text{………④},\ \frac{1}{3}\log_2 p+1=\log_2 q\ \text{………⑤}$$

⑤より，$\log_2 p=3(\log_2 q-1)$，$\log_2 p=\log_2\left(\dfrac{q}{2}\right)^3$ から，$p=\left(\dfrac{q}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}q^3$ ………⑥

④⑥より，$\dfrac{1}{8}q^3=3q$ となり，$q>0$ から $q=2\sqrt{6}$，$p=3\cdot 2\sqrt{6}=6\sqrt{6}$

また，点 C の y 座標 $\log_2 q$ は，

$$\log_2 q=\log_2 2\sqrt{6}=\log_2 2^{\frac{3}{2}}3^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\log_2 3=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\log_{10}3}{\log_{10}2}$$

$$=1.5+\frac{0.4771}{2\times 0.3010}\fallingdotseq 1.5+0.8=2.3$$

［解　説］

[1]は三角方程式を題材とした基本題です。最後の設問は，$0\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{2}<\beta\leqq\pi$ に注目して符号を決めます。また，[2]は対数関数のグラフをもとに考える問題です。なお，最後の数値計算も煩雑ではありません。

第２問

問題のページへ

(1)　$C: y = x^2 + 1$ 上の点 $(t,\ t^2+1)$ における接線の方程式は，$y' = 2x$ から，

$$y - (t^2+1) = 2t(x-t),\ \ y = 2tx - t^2 + 1$$

この直線が $\mathrm{P}(a,\ 2a)$ を通るので，$2a = 2at - t^2 + 1$ となり，

$$t^2 - 2at + 2a - 1 = 0,\ (t-2a+1)(t-1) = 0$$

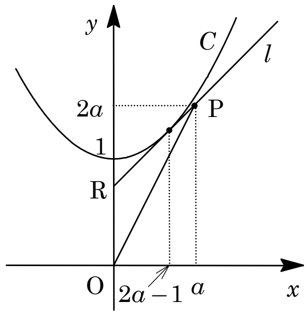
よって，$t = 2a-1,\ 1$ である。

すると，$2a-1 \neq 1\ (a \neq 1)$ のとき，P を通る C の接線は２本あり，$t = 2a-1$ では,

$$y = 2(2a-1)x - (2a-1)^2 + 1,\ \ y = (4a-2)x - 4a^2 + 4a \cdots\cdots\cdots ①$$

$t = 1$ では，$y = 2x$ となる。

(2)　直線①を l とし，y 軸との交点を $\mathrm{R}(0,\ r)$ とすると，



$$r = -4a^2 + 4a$$

$r > 0$ となるのは，$-4a^2 + 4a > 0$ から $a(a-1) < 0$ となり，$0 < a < 1$ のときである。

このとき，△OPR の面積 S は,

$$S = \frac{1}{2}(-4a^2+4a)a = 2(a^2 - a^3)$$

$$S' = 2(2a - 3a^2) = -2a(3a-2)$$

すると，$0 < a < 1$ のとき S の値の増減は右表のようになり，S は $a = \frac{2}{3}$ で最大値 $\frac{8}{27}$ をとる。

a	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
S'	0	＋	0	−	
S		↗	$\frac{8}{27}$	↘	

(3)　$0 < a < 1$ のとき，C と l および２直線 $x = 0$，$x = a$ で囲まれた図形の面積 T は,

$$T = \int_0^a \{x^2 + 1 - (4a-2)x + 4a^2 - 4a\}dx$$

$$= \Big[\frac{x^3}{3} - (2a-1)x^2 + (4a^2-4a+1)x\Big]_0^a$$

$$= \frac{a^3}{3} - (2a-1)a^2 + (4a^2-4a+1)a = \frac{7}{3}a^3 - 3a^2 + a$$

すると，$T' = 7a^2 - 6a + 1$ となり，$T' = 0$ の解は $a = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{7}$ である。

よって，$\frac{2}{3} \leqq a < 1$ の範囲では，$\frac{3+\sqrt{2}}{7} < \frac{2}{3}$ から $T' > 0$ となるので，T は増加する。

［解 説］

微積分の総合問題です。(3)で面積 T を求める際に，$0 < a < \frac{1}{2}$ のとき接点の x 座標は負となりますが，C と l の上下関係は変わらないため，積分計算は同一です。

第３問

問題のページへ

(1) 等比数列$\{s_n\}$が初項 1，公比 2 のとき，$s_1=1$，$s_2=2$，$s_3=4$ となり，

$$s_1s_2s_3=8,\ s_1+s_2+s_3=7$$

(2) 初項 x，公比 r の等比数列$\{s_n\}$は，$s_1=x$，$s_2=xr$，$s_3=xr^2$ となり，条件より，

$$s_1s_2s_3=a^3\cdots\cdots\cdots①,\ s_1+s_2+s_3=b\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$x^3r^3=a^3$ となり，x, r, a が実数から $xr=a\cdots\cdots\cdots③$

②③より，$\dfrac{a}{r}+a+ar=b$ から，$ar^2+(a-b)r+a=0\cdots\cdots\cdots④$

すると，④を満たす実数 r が存在するので，$D=(a-b)^2-4a^2\geqq 0$ となり，

$$3a^2+2ab-b^2\leqq 0\cdots\cdots\cdots⑤$$

(3) $a=64$，$b=336$ のとき，③，④から，

$$xr=64\cdots\cdots\cdots⑥,\ 64r^2-272r+64=0\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑦より，$4r^2-17r+4=0$ となり，$(4r-1)(r-4)=0$

すると，$r>1$ から $r=4$ となり，⑥に代入すると，$x=16$ である。

よって，$s_n=16\cdot 4^{n-1}=4^{n+1}$ となり，

$$t_n=s_n\log_4 s_n=4^{n+1}\log_4 4^{n+1}=(n+1)\cdot 4^{n+1}$$

ここで，$U_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}t_k=\sum_{k=1}^{n}(k+1)\cdot 4^{k+1}$ とおくと，

$$\begin{aligned}U_n-4U_n&=2\cdot 4^2+(4^3+4^4+\cdots+4^{n+1})-(n+1)\cdot 4^{n+2}\\&=4^2+(4^2+4^3+4^4+\cdots+4^{n+1})-(n+1)\cdot 4^{n+2}\\&=16+\frac{4^2(4^n-1)}{4-1}-(n+1)\cdot 4^{n+2}\\&=16+\frac{1}{3}\cdot 4^{n+2}-\frac{16}{3}-(n+1)\cdot 4^{n+2}=\frac{32}{3}-\left(n+\frac{2}{3}\right)\cdot 4^{n+2}\end{aligned}$$

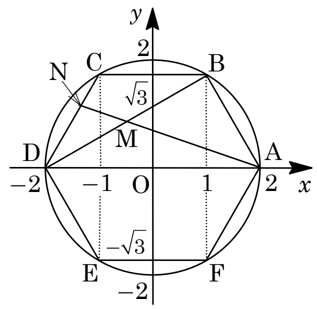
したがって，$U_n=-\dfrac{32}{9}+\dfrac{1}{3}\left(n+\dfrac{2}{3}\right)\cdot 4^{n+2}=\dfrac{3n+2}{9}\cdot 4^{n+2}-\dfrac{32}{9}$ となる。

［解 説］

等比数列の基本題です。(3)の和 U_n を求める計算についても，(等差)×(等比)タイプの有名な方法が誘導として与えられています。

第４問

問題のページへ



(1) 右図より，B$(1,\ \sqrt{3})$，D$(-2,\ 0)$である。

(2) 線分 BD の中点を M とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}})-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$=\frac{1}{2}(-1,\ \sqrt{3})-(2,\ 0)=\left(-\frac{5}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ \sqrt{3})$$

さて, 直線 AM と直線 CD の交点が N なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+r\overrightarrow{\mathrm{AM}}=(2,\ 0)+r\left(-\frac{5}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(2-\frac{5}{2}r,\ \frac{\sqrt{3}}{2}r\right)\ (r \text{ は実数})$$

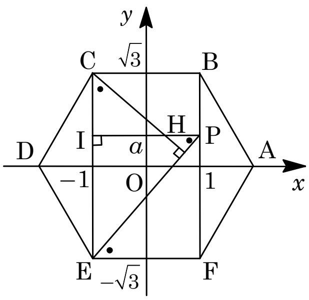
$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(-2,\ 0)+s(1,\ \sqrt{3})=(-2+s,\ \sqrt{3}s)\ (s \text{ は実数})$$

これより，$2-\frac{5}{2}r=-2+s$ ……①，$\frac{\sqrt{3}}{2}r=\sqrt{3}s$ ……②

②より $r=2s$ となり，①に代入すると $2-5s=-2+s$ から，$s=\frac{2}{3}$ である。

よって，$r=2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\left(-2+\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)=\left(-\frac{4}{3},\ \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$ である。

(3) 線分 BF 上の点 P の y 座標が a なので，P$(1,\ a)$ より，



$$\overrightarrow{\mathrm{EP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(2,\ a+\sqrt{3})$$

そこで，$\angle\mathrm{PEF}=\varphi$ とおくと，$\tan\varphi=\frac{a+\sqrt{3}}{2}$

さて, P から直線 CE に引いた垂線 PI と, 点 C から直線 EP に引いた垂線との交点を H とすると,

$$\angle\mathrm{HCI}=\angle\mathrm{HPE}=\angle\mathrm{PEF}=\varphi$$

すると，$\mathrm{HI}=\mathrm{CI}\tan\varphi=(\sqrt{3}-a)\cdot\frac{a+\sqrt{3}}{2}=\frac{3-a^2}{2}$ となり，点 H の座標は,

$$\left(-1+\frac{3-a^2}{2},\ a\right)=\left(\frac{-a^2+1}{2},\ a\right)$$

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ のなす角を θ とし，$\cos\theta=\frac{12}{13}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ の値から,

$$\frac{-a^2+1}{2}+a^2=\sqrt{1+a^2}\cdot\sqrt{\frac{(-a^2+1)^2}{4}+a^2}\cdot\frac{12}{13}$$

よって，$\frac{a^2+1}{2}=\frac{6}{13}(a^2+1)\sqrt{1+a^2}$ から $a^2+1=\frac{169}{144}$ となり，$a=\pm\frac{5}{12}$ である。

[解 説]

平面ベクトルの基本題です。(3)の点 H の x 座標を求める方法は, いろいろ考えられますが, ここでは直角三角形の相似に注目しました。

第５問

問題のページへ

(1) 1 回の試行で，事象 A の起こる確率が p，起こらない確率が $1-p$ であるとし，この試行を n 回繰り返すとき，事象 A の起こる回数を W とする。

このとき，W は $B(n,\ p)$ に従うので，平均 $m=np$，標準偏差 $\sigma=\sqrt{np(1-p)}$ となり，条件から，

$$np=\frac{1216}{27}\cdots\cdots\cdots①,\quad \sqrt{np(1-p)}=\frac{152}{27}\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$np(1-p)=\dfrac{152^2}{27^2}=\dfrac{2^6\times19^2}{3^6}$ となり，①と合わせて，

$$1-p=\frac{2^6\times19^2}{3^6}\cdot\frac{27}{1216}=\frac{2^6\times19^2}{3^3}\cdot\frac{1}{2^6\times19}=\frac{19}{27}$$

よって，$p=\dfrac{8}{27}$，$n=\dfrac{1216}{27}\cdot\dfrac{27}{8}=152$ である。

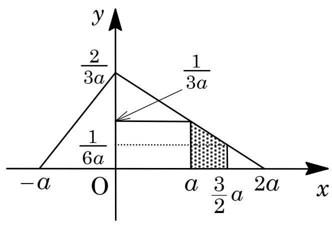
(2) 試行回数 152 は大きいことから，W は近似的に $N(m,\ \sigma^2)$ に従い，

$$Z=\frac{W-m}{\sigma}=\frac{27}{152}\left(W-\frac{1216}{27}\right)=\frac{27}{152}W-8$$

すると，Z は $N(0,\ 1)$ に従い，正規分布表から，

$$P(W\geqq 38)=P\left(Z\geqq\frac{27}{152}\times38-8\right)=P(Z\geqq-1.25)=0.5+0.3944\fallingdotseq0.89$$

(3) 連続型確率変数 X に対して，確率密度関数 $f(x)$ $(-a\leqq x\leqq 2a)$ が与えられ，そのグラフ $y=f(x)$ を描くと右図のようになる。



このとき，$a\leqq X\leqq\dfrac{3}{2}a$ となる確率は，右図の網点部の面積が対応し，

$$P\left(a\leqq X\leqq\frac{3}{2}a\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3a}+\frac{1}{6a}\right)\left(\frac{3}{2}a-a\right)=\frac{1}{8}$$

また，$E(X)=\displaystyle\int_{-a}^{2a}xf(x)dx$ から，

$$E(X)=\frac{2}{3a^2}\int_{-a}^{0}x(x+a)dx+\frac{1}{3a^2}\int_{0}^{2a}x(2a-x)dx$$

$$=-\frac{2}{3a^2}\cdot\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{3a^2}\cdot\frac{1}{6}(2a)^3=-\frac{a}{9}+\frac{4}{9}a=\frac{a}{3}$$

さらに，$Y=2X+7$ とおくと，$E(Y)=2E(X)+7=\dfrac{2}{3}a+7$ である。

［解 説］

少し数値計算は面倒ですが，内容は確率分布の基本題です。なお，(3)では定積分の計算を省力化しています。