第１問

[1] (1) $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ に対して，そのグラフの概形から

$a>0$，y 切片から $c>0$ である。

また，頂点 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$ は第 3 象限から，$-\dfrac{b}{2a}<0$，$-\dfrac{b^2-4ac}{4a}<0$

$b>0$，$b^2-4ac>0$

すると，a, b, c の値の組合せは，$(a,\ b,\ c)=\left(\dfrac{1}{2},\ 3,\ 3\right)$ である。

(2) $a,\ b$ の値は変えずに c の値だけ変えるとき，$x=-\dfrac{b}{2a}$，$y=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}=c-\dfrac{b^2}{4a}$

から，頂点は y 軸方向に移動する。

(3) b, c の値は変えずに a の値だけ $a>0$ で変えるとき，

(i) $a=\dfrac{b^2}{4c}$ のとき　$x<0$，$y=0$ から頂点は x 軸上にある。

(ii) $a\neq\dfrac{b^2}{4c}$ のとき　$x<0$，$y\neq 0$ から頂点は第 2 象限と第 3 象限にある。

(4) 図より，$a>0$，$c<0$ であり，頂点が第 4 象限から，$-\dfrac{b}{2a}>0$，$-\dfrac{b^2-4ac}{4a}<0$

$b<0$，$b^2-4ac>0$

このとき，a, c の値は変えずに b の値だけ変えるとき，頂点の y 座標は，

$y=c-\dfrac{b^2}{4a}\leqq c<0$

したがって，頂点は第 1 象限と第 2 象限には移動しない。

[2] (1) $A=60^\circ$ の $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$X=4\cos^2 B+4\sin^2 C-4\sqrt{3}\cos B\sin C$

$B=90^\circ$ とすると，$C=30^\circ$ であり，$\cos B=0$，$\sin C=\dfrac{1}{2}$ となり，$X=1$

(2) $B=13^\circ$ とすると，$C=107^\circ$ であり，$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$ より，

$\sin C=\sin(180^\circ-107^\circ)=\sin 73^\circ=0.9563$

(3) $A=60^\circ$，$B=13^\circ$ のとき概数計算をして $X=1.000$ になったとしても，「$A=60^\circ$，$B=13^\circ$ のとき $X=1$」とは言えない。

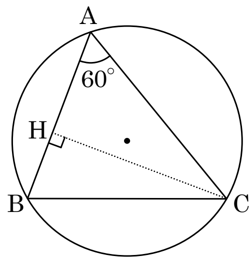
さらに，「$A=60^\circ$ ならば $X=1$」が真という証明にもならない。

(4) $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin B}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin C}=2R$

すると，$\mathrm{BC}=2R\sin 60^\circ=\sqrt{3}R$

$\mathrm{AB}=2R\sin C$，$\mathrm{AC}=2R\sin B$



(5) B が鋭角のとき，点 C から直線 AB に垂線 CH を引くと，

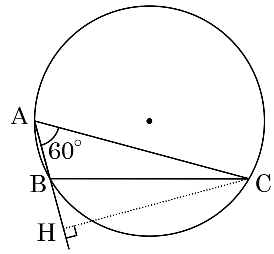
$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=\mathrm{AH}+\mathrm{BH}=\mathrm{AC}\cos 60^\circ+\mathrm{BC}\cos B=2R\sin B\cos 60^\circ+\sqrt{3}R\cos B\\&=R\sin B+\sqrt{3}R\cos B\end{aligned}$$

すると，$2R\sin C=R\sin B+\sqrt{3}R\cos B$ となり，$2\sin C=\sin B+\sqrt{3}\cos B$ から，

$$X=4\cos^2 B+(\sin B+\sqrt{3}\cos B)^2-2\sqrt{3}\cos B(\sin B+\sqrt{3}\cos B)=1$$

(6) B が鈍角のとき，(5)と同様にして，

$$\mathrm{AH}=\mathrm{AC}\cos 60^\circ$$
$$\mathrm{BH}=\mathrm{BC}\cos(180^\circ-B)=-\mathrm{BC}\cos B$$
$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=\mathrm{AH}-\mathrm{BH}=\mathrm{AC}\cos 60^\circ+\mathrm{BC}\cos B\\&=R\sin B+\sqrt{3}R\cos B\end{aligned}$$



(7) 命題「$p:A=60^\circ \Longrightarrow q:X=1$」は，(5), (6)より真である。

命題「$q:X=1 \Longrightarrow p:A=60^\circ$」は，偽である。（反例：$A=120^\circ$，$B=30^\circ$）

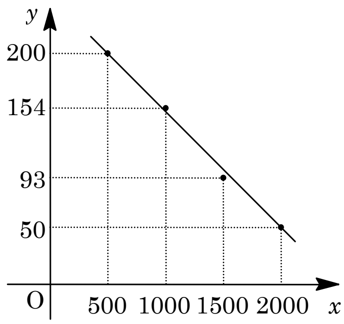
よって，p は q であるための十分条件であるが，必要条件でない。

［コメント］

[1]は 2 次関数のグラフに関する問題。具体的な計算はほとんど不要で，定性的に解けます。[2]は三角比の図形への応用。会話文の読解が必要ですが，過程なしに結論が述べられている箇所もあり，気持ち悪く感じるかもしれません。ただし，疑い深くなければ，気にならないでしょうが……。

第２問

[1] (1) T シャツ 1 枚の価格と販売数についての調査結果をもとにして, T シャツ 1 枚の価格を x, 累積人数を y とすると, 右図のようになり, y は x の 1 次関数とみなせる。

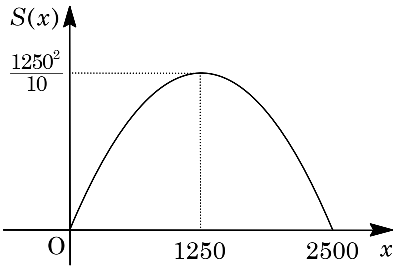


ここで, 売上高を $S(x)$ とおくと, $S(x)=xy$ から, $S(x)$ は x の 2 次関数となる。

(2) $(x,\ y)=(500,\ 200)$, $(2000,\ 50)$ を結んだ直線は,

$$y-200=\frac{50-200}{2000-500}(x-500)$$

$$y=-\frac{1}{10}x+250 \cdots\cdots\cdots ①$$



すると, 売上高 $S(x)$ は,

$$S(x)=x\left(-\frac{1}{10}x+250\right)=-\frac{1}{10}x^2+250x$$

$$=-\frac{1}{10}(x-1250)^2+\frac{1250^2}{10} \cdots\cdots\cdots ②$$

よって, $x=1250$ のとき $S(x)$ は最大になる。

(3) 利益 $T(x)$ は, $T(x)=S(x)-400\times120$ となる。ただし, $0\leqq y\leqq 120$ である。

すると, ①から $1300\leqq x\leqq 2500$ となるので, $T(x)$ が最大になるのは, ②から $x=1300$ のときである。

[2] (1) 観光客数 x と消費総額 y の関係（図 1）をもとにすると, x と y の間には強い正の相関がみられるので, 相関係数は 0.83 である。

(2) 消費額単価を a とおくと, $\dfrac{y}{x}=a$ すなわち $y=ax$ である。

これより, a は各県の表す点と原点を結ぶ直線の傾きとなるので, この傾きが最大である県を求めればよい。

(3) ⓪～⑨の点と原点を結ぶ直線の傾きが最大な点は⑧である。

(4) 図 2 から, 観光客数, 消費総額について, 各県ごとの状況は何ともいえない。

図 3 において, 県内と県外の消費額単価の等しい点を結んでみると, 県外の方が県内よりも高くない県は非常に少ない。また, 北海道, 鹿児島県, 沖縄県の県外の消費額単価は高いので, 除いた 41 県の平均値は 44 県の平均値より小さくなる。さらに, 北海道, 鹿児島県, 沖縄県を除いた 41 県について, 県内の方が県外よりもデータの散らばりが小さい。

以上より, 読み取れる事柄として正しいものは②と③である。

(5) 開催数と観光客数の散布図（図４）から読み取れることとして，まず観光客数の中央値は 30 程度であるが，データの散らばりから平均値はそれより高い。また，散布図からは，因果関係についてはわからない。さらに，開催数の最も多い県では 145 回程度を合わせて 6,000 千人を少し超えるぐらいである。そして，開催数と観光客数には正の相関がみられる。

以上より，最も適切な記述は④である。

［コメント］

[1]は 2 次関数の最大・最小に関する応用問題。(3)では原価 400 円で売価 1300 円ということは，粗利益がほぼ 70％ですが，衣料品の販売では普通こんなものなんでしょうか。応用問題だとつい気になってしまいます。[2]はデータの分析に関する問題。この設問も定性的な内容です。ただ，指標がたくさん出てくるので，その意味の把握に難渋し，そのため時間をかなり取られてしまいます。

第３問

(1) 渋滞中の表示がないとき，表 1 を右表のように書き直すと，A 地点で①の道路を選択する確率は$\dfrac{12}{13}$である。

地点	道路	確率
A	①	$\dfrac{12}{13}$
	④	$\dfrac{1}{13}$
C	②	$\dfrac{7}{8}$
	⑦	$\dfrac{1}{8}$
E	⑤	$\dfrac{1}{2}$
	⑥	$\dfrac{1}{2}$

(2) 渋滞中の表示がないとき，A→D→B の確率は,

(i) $\mathrm{A}\xrightarrow{①}\mathrm{C}\xrightarrow{②}\mathrm{D}\xrightarrow{③}\mathrm{B}$ のとき

$\dfrac{12}{13}\times\dfrac{7}{8}\times1=\dfrac{21}{26}$

(ii) $\mathrm{A}\xrightarrow{④}\mathrm{E}\xrightarrow{⑤}\mathrm{D}\xrightarrow{③}\mathrm{B}$ のとき

$\dfrac{1}{13}\times\dfrac{1}{2}\times1=\dfrac{1}{26}$

(i)(ii)より，$\dfrac{21}{26}+\dfrac{1}{26}=\dfrac{11}{13}$

(3) 渋滞中の表示がないとき，A→D→B のうち E を通過していた条件つき確率は,

$\dfrac{1}{26}\div\dfrac{11}{13}=\dfrac{1}{22}$

(4) ①の道路のみ渋滞中の表示がある場合，①を選ぶ確率は$\dfrac{12}{13}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{13}$，④を選ぶ確率は$1-\dfrac{8}{13}=\dfrac{5}{13}$となる。このとき，A→D→B の確率は,

(i) $\mathrm{A}\xrightarrow{①}\mathrm{C}\xrightarrow{②}\mathrm{D}\xrightarrow{③}\mathrm{B}$ のとき $\dfrac{8}{13}\times\dfrac{7}{8}\times1=\dfrac{7}{13}$

(ii) $\mathrm{A}\xrightarrow{④}\mathrm{E}\xrightarrow{⑤}\mathrm{D}\xrightarrow{③}\mathrm{B}$ のとき $\dfrac{5}{13}\times\dfrac{1}{2}\times1=\dfrac{5}{26}$

(i)(ii)より，$\dfrac{7}{13}+\dfrac{5}{26}=\dfrac{19}{26}$

(4) A→B に 1560 台とする場合，①を通過する台数は，渋滞中の表示がないときでは(1)から $1560\times\dfrac{12}{13}=1440$ 台，①に渋滞中の表示を出したときでは(4)から $1560\times\dfrac{8}{13}=960$ 台である。

(5) ①に渋滞中の表示を出したとき，(4)より，C 地点には 960 台，E 地点には $1560-960=600$ 台となる。

(a) ⓪の場合

$\mathrm{C}\xrightarrow{②}\mathrm{D}$ は $960\times\left(1-\dfrac{1}{8}\times\dfrac{2}{3}\right)=880$ 台，$\mathrm{E}\xrightarrow{⑤}\mathrm{D}$ は $600\times\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\right)=200$ 台となり，D 地点で $880+200=1080$ 台となる。

(b) ①の場合

$\mathrm{C}\xrightarrow{②}\mathrm{D}$ は 880 台，$\mathrm{E}\xrightarrow{⑤}\mathrm{D}$ は $600\times\left(1-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\right)=400$ 台となり，D 地点で $880+400=1280$ 台となる。

(c) ②の場合

$\mathrm{C}\xrightarrow{②}\mathrm{D}$ は $960\times\left(\dfrac{7}{8}\times\dfrac{2}{3}\right)=560$ 台，$\mathrm{E}\xrightarrow{⑤}\mathrm{D}$ は 200 台となり，D 地点で $560+200=760$ 台となる。

(d) ③の場合

$\mathrm{C}\xrightarrow{②}\mathrm{D}$ は 560 台，$\mathrm{E}\xrightarrow{⑤}\mathrm{D}$ は 400 台となり, D 地点で $560+400=960$ 台となる。

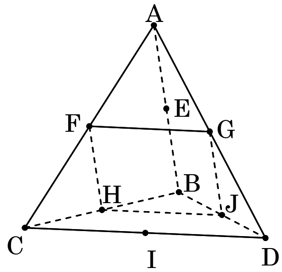
(a)～(d)より，①②③を通過する台数を 1000 以下で最大にするのは③の場合である。

［コメント］

確率の応用問題です。おもしろい設定なのですが，そのために題意説明がかなり長めです。止むを得ないことですが。また，工夫が施されているにせよ，数値計算は少し面倒です。そして，最後の設問を解答例のように 1 つずつチェックしていくと，タイムオーバーしてしまいます。

第４問

(1)　四角形 FHJG の各辺の長さは，中点連結定理より，正四面体 ABCD の 1 辺の長さの $\frac{1}{2}$ 倍なので，4 辺の長さは等しくなる。

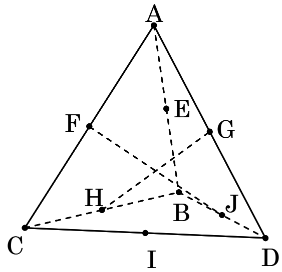


(2)　四角形が正方形であれば 4 辺の長さが等しいが，逆は成立しない。これより，4 辺の長さが等しいことは正方形であるための必要条件であるが十分条件でない。

次に，FJ＝GH を示すために，△AJC と△AHD に着目すると，

$$JA = JC = HA = HD,\ AC = AD$$

すると，この 2 つの三角形は合同な二等辺三角形となり，点 F, G がそれぞれ辺 AC, AD の中点から，中線 FJ, GH の長さは等しくなる。



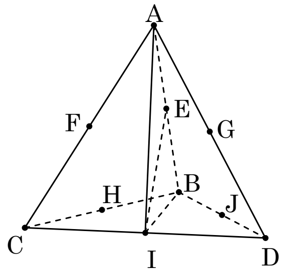
(3)　まず，I が辺 CD の中点なので，

「AI⊥CD かつ BI⊥CD より平面 AIB⊥CD」

このとき，

「EI は平面 ABI 上にあることより EI⊥CD」

これを一般的に記すと，前者が①，後者が②となる。



(4)　四面体 ABCD において，

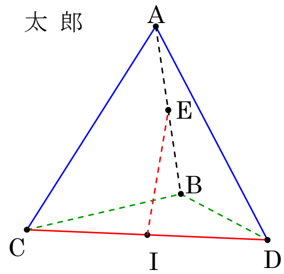
(i)　太郎の考えた条件（AC＝AD，BC＝BD）のとき

△ACD と△BCD はともに二等辺三角形，I は辺 CD の中点なので，

$$AI \perp CD,\ BI \perp CD$$

よって，平面 AIB⊥CD から EI⊥CD が成り立つ。

太 郎



(ii)　花子の考えた条件（BC＝AD，AC＝BD）のとき

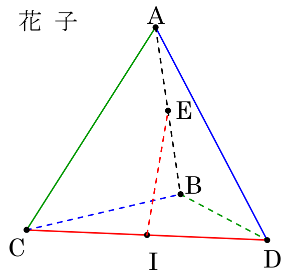
△ACB と△BDA において

$$AC = BD,\ BC = AD,\ AB = BA$$

したがって，△ACB≡△BDA である。

すると，EC＝ED から，△ECD は二等辺三角形となり，I は辺 CD の中点なので，EI⊥CD が成り立つ。

花 子



［コメント］

正四面体を題材とした図形問題です。この問題も会話文がメインとなっており，その説明の読み取りが，方針の決定に最重要です。また，図がたくさん掲げられていますが，特に必要は感じませんでした。なお，内容は最後の設問を除いて基本的です。

第５問

(1) $n=8$ のとき，与えられた方盤に対して，上から 6 行目，左から 3 列目のマス A に当てはまる数は，$6\times3=18$ を 8 で割った余りから 2 である。

上から 5 行目，左から l 列目の数は，$5l$ を 8 で割った余りとなる。その数が 1 であるのは，$1\leqq l\leqq7$ から $l=5$ である。

(2) 方盤のいずれのマスにも 0 が現れない条件は，$1\leqq k\leqq n-1$，$1\leqq l\leqq n-1$ として，kl が n で割り切れない，すなわち kl が n の倍数でないことである。

言い換えると，n が素数ということになる。

(3) $n=56$ のとき，方盤の上から 27 行目，左から l 列目の数が 1 であるのは，$27l$ を 56 で割った余りが 1 から，m を 0 以上の整数として，$27l=56m+1$ と表せ，

$$27l-56m=1\quad(1\leqq l\leqq55)\cdots\cdots\cdots①$$

①を満たす特殊解を求めるために，27 と 56 に対して互除法を適用すると，右のようになる。

$$\begin{array}{r|r|r} & 13 & 2 \\ 2\,) & 27\,) & 56 \\ & 26 & 54 \\ \hline & 1 & 2 \end{array}$$

ここで，$a=27$，$b=56$ とおき，互除法のプロセスに対比させて，余りの 1 に着目すると，

$$\begin{array}{r|r|r} & 13 & 2 \\ b-2a\,) & a\,) & b \\ & 13b-26a & 2a \\ \hline & -13b+27a & b-2a \end{array}$$

$$27a-13b=1,\ 27\times27-13\times56=1$$

よって，$27\times27-56\times13=1\cdots\cdots\cdots②$

①②より，$27(l-27)-56(m-13)=0$

$$27(l-27)=56(m-13)$$

ここで，27 と 56 は互いに素なので，$l-27=56p$，$m-13=27p$ （p は整数）

$$l=56p+27,\ m=27p+13$$

すると，$1\leqq l\leqq55$，$m\geqq0$ から，$p=0$ となり，$l=27$ である。

(4) $n=56$ のとき，方盤の上から 24 行目，左から l 列目の数が 0 であるのは，$24l$ が 56 の倍数から，m を 1 以上の整数として，$24l=56m$ となり，

$$3l=7m\quad(1\leqq l\leqq55)$$

すると，l は 7 の倍数となり，$l=7,\ 14,\ \cdots,\ 49$ から 7 個ある。

また，方盤の上から j 行目，左から l 列目の数が 0 であるのは，jl が 56 の倍数から，m を 1 以上の整数として，

$$jl=56m\quad(1\leqq j\leqq55,\ 1\leqq l\leqq55)$$

そして，この式を満たす l の個数が最も多いのは，$j=28$ である。

(5) $n=56$ のとき，(3)と同様に設定して，

(a) 0の場合　5 行目，l 列目の数が 0 であるのは，

$$5l=56m\quad(1\leqq l\leqq55)$$

上式を満たす l は存在しないので，上から 5 行目に 0 はない。

(b) ①の場合　6 行目，l 列目の数が 0 であるのは，$6l=56m$ から，

$$3l=28m \quad (1\leqq l\leqq 55)$$

すると，$l=28$ で上式を満たすので，上から 6 行目には 0 がある。

(c) ②の場合　9 行目，l 列目の数が 1 であるのは $9l=56m+1$ から，

$$9l-56m=1 \quad (1\leqq l\leqq 55)$$

$$\begin{array}{rrr} & 4 & 6 \\ 2) & 9) & 56 \\ & 8 & 54 \\ \hline & 1 & 2 \end{array}$$

$a=9$，$b=56$ とおくと，$25a-4b=1$ から，

$$25\times9-4\times56=1,\ 9\times25-56\times4=1$$

$$\begin{array}{rrr} & 4 & 6 \\ b-6a) & a) & b \\ & 4b-24a & 6a \\ \hline & -4b+25a & b-6a \end{array}$$

すると，$l=25$ で上式を満たすので，上から 9 行目には 1 がある。

(d) ③の場合　10 行目，l 列目の数が 1 であるのは，

$10l=56m+1$ から，

$$10l-56m=1 \quad (1\leqq l\leqq 55)$$

上式の左辺は偶数，右辺は奇数より，満たす l は存在しないので，上から 10 行目に 1 はない。

(e) ④の場合　15 行目，l 列目の数が 7 であるのは，$15l=56m+7$ から，

$$15l=7(8m+1) \quad (1\leqq l\leqq 55)$$

すると，l は 7 の倍数となり，$l=7\times7=49$ で上式を満たす。これより，上から 15 行目には 7 がある。

(f) ⑤の場合　21 行目，l 列目の数が 7 であるのは，$21l=56m+7$ から，

$$3l-8m=1 \quad (1\leqq l\leqq 55)$$

すると，$l=3$ で上式を満たすので，上から 21 行目には 7 がある。

［コメント］

2 次試験に出題されても不思議ではないような標準的な整数問題です。特に，太郎さんと花子さんの会話がないので，スッキリした印象です。ただ，最後の設問は「すべて選べ」ということなので，6 つの場合について順番に調べていくと解答例のようになり，質と量，ともにハードです。