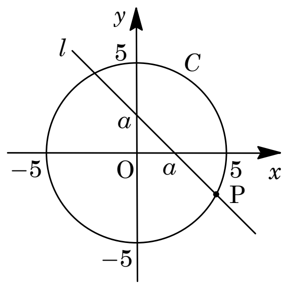
第１問



[1] $C: x^2+y^2=25$ ……①，$l: x+y=a$ ……②に対して，

C と l が異なる２点で交わる条件は，$\dfrac{|-a|}{\sqrt{1^2+1^2}}<5$ より，

$$|a|<5\sqrt{2}\text{，}\ -5\sqrt{2}<a<5\sqrt{2}$$

さて，C と l の交点の１つを $\mathrm{P}(s,\ t)$ とおくと，①②より，

$$s^2+t^2=25\ \cdots\cdots\text{③，}\ s+t=a\ \cdots\cdots\text{④}$$

③④から，$a^2=25+2st$ となり，$st=\dfrac{a^2-25}{2}$

[2] $a>0$ かつ $a\neq 1$ のとき，

(i) $\sqrt[4]{a^3}\times a^{\frac{2}{3}}-a^2=a^{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}-a^2=a^{\frac{17}{12}}-a^2=a^{\frac{17}{12}}(1-a^{\frac{7}{12}})\neq 0$

すると，式を満たす a の値は存在しない。

(ii) $\dfrac{(2a)^6}{(4a)^2}-\dfrac{a^3}{2}=4a^4-\dfrac{a^3}{2}=\dfrac{a^3}{2}(8a-1)$ より，$\dfrac{a^3}{2}(8a-1)=0$ となり，$a=\dfrac{1}{8}$

すると，式を満たす a の値はちょうど１つである。

(iii) $4(\log_2 a-\log_4 a)-\log_{\sqrt{2}} a=4\log_2 a-4\cdot\dfrac{\log_2 a}{2}-\dfrac{\log_2 a}{\frac{1}{2}}=0$

すると，どのような a の値を代入しても成り立つ式である。

[3] (1) (i) $y=\sin 2x$ のグラフは，$y=\sin x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍したものから④である。

(ii) $y=\sin\left(x+\dfrac{3}{2}\pi\right)$ のグラフは，$y=-\cos x$ と変形すると⑥である。

(2) 与えられたグラフの式は，$y=-2\cos 2x$ である。

ここで，⓪～⑦のグラフで y 軸との交点に注目すると，①と⑤と⑥が残り，

$$2\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-2\cos 2x\text{，}\ 2\cos 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=2\cos(2x-\pi)=-2\cos 2x$$

$$2\cos 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos(2x+\pi)=-2\cos 2x$$

よって，求めるグラフは，①と⑤と⑥である。

[4] (1) ①で $x+\dfrac{1}{y}=2\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ は $x=\dfrac{1}{y}$ $(xy=1)$ のとき成り立ち，②で $y+\dfrac{4}{x}=4\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ は $y=\dfrac{4}{x}$ $(xy=4)$ のとき成り立つ。すなわち，①と②の等号がともに成り立つ x，y は存在しないことから，解答 A は誤っている。

(2) 解答 B は正しいので，最小値は 9 である。

［コメント］

小問集合の形式です。[1]は円と直線の関係ですが，突然終了という感じが否めません。[2]は指数・対数計算。[3]は三角関数のグラフ。y 軸との交点に着目して候補を絞り込んでいます。[4]は相加・相乗平均と最小値についての有名な誤答例が題材になっています。

第２問

(1)　3 次関数 $S(x)$ は，グラフが点 $(-1,\ 0)$ を通り，点 $(2,\ 0)$ で x 軸に接していることから，$k \neq 0$ として，$S(x)=k(x+1)(x-2)^2$ と表せる。

点 $(0,\ 4)$ を通ることから，$4k=4\ (k=1)$ となり，$S(x)=(x+1)(x-2)^2$

さて，$S(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ より，

$$S'(x)=f(x)\cdots\cdots\cdots①,\quad S(a)=0\cdots\cdots\cdots②$$

②から $(a+1)(a-2)^2=0$ となり，$a<0$ のとき，$a=-1$ である。

ここで，$S(x)$ は $x=0$ を境に増加から減少，$x=2$ を境に減少から増加に移ることより，その増減および $S'(x)$ の符号変化をまとめると，右表のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$S'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$S(x)$	↗	4	↘	0	↗

すると，①から，$f(0)=0$，$f(2)=0$ であり，$0<x<2$ において $f(x)<0$ となる。これより，$y=f(x)$ のグラフの概形は①である。

(2)　$a=0$ のとき，①②より，$S'(x)=f(x)$，$S(0)=0$ である。

これより，矛盾するグラフの組は，

①：$y=f(x)$ のグラフの x 切片が $0<x<1$ でない。

④：$y=f(x)$ のグラフは，x 軸対称したものが対応する。

［コメント］

微分と積分の関係についての定性的な問題です。センター試験においては，本問の計算の難易度が数学ⅡB の平均点に強く影響していましたが……。

第３問

(1) 薬Dを12時間ごとに1錠ずつ服用するとき，n 回目の服用直後の血中濃度 a_n は，
$P=5$，$T=12$ から，

$$a_1=5,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+5\cdots\cdots\cdots①$$

①を変形すると，$a_{n+1}-10=\frac{1}{2}(a_n-10)$ となる。

これより，数列 $\{a_n-10\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列になるので，一般項は，

$$a_n-10=(a_1-10)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって，$a_n=10-5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdots\cdots②$ である。

また，①から $a_{n+2}=\frac{1}{2}a_{n+1}+5$ となり，①との両辺の差をとると，

$$a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$$

これより，階差数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列になり，この式を変形すると，②を導くことができる。

(2) $M=2$，$L=40$ に対して，②から，

$$a_n<10<40=L\quad(n\geqq 1)$$

$$a_n-P=5-5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\geqq 5-\frac{5}{2}=\frac{5}{2}>2=M\quad(n\geqq 2)$$

これより，正しい記述は②と③である。

(3) 薬Dを24時間ごとに1錠ずつ服用するとき, n 回目の服用直後の血中濃度 b_n は,

$$b_1=5,\ b_{n+1}=\frac{1}{4}b_n+5\cdots\cdots\cdots③$$

③を変形すると，$b_{n+1}-\frac{20}{3}=\frac{1}{4}\left(b_n-\frac{20}{3}\right)$ となり，

$$b_n-\frac{20}{3}=\left(b_1-\frac{20}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=-\frac{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

よって，$b_n=\frac{20}{3}-\frac{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\cdots\cdots④$ である。

さて，$24n$ 時間経過後の服用直前の血中濃度 $a_{2n+1}-P$，$b_{n+1}-P$ は，②④から，

$$a_{2n+1}-P=10-5\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}-5=5-5\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$$

$$b_{n+1}-P=\frac{20}{3}-\frac{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}-5=\frac{5}{3}-\frac{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$$

これより，$\frac{b_{n+1}-P}{a_{2n+1}-P}=\frac{1}{3}\cdots\cdots⑤$ となる。

(4) 薬Dを24時間ごとに k 錠ずつ服用するとき，$24n$ 時間経過後の服用直前の血中濃度は，$k(b_{n+1}-P)$ となる。

すると，12 時間ごとに 1 錠ずつ服用する場合と 24 時間ごとに k 錠ずつ服用する場合，$24n$ 時間経過後の服用直前の血中濃度が等しくなるのは，⑤から，

$$\frac{k(b_{n+1}-P)}{a_{2n+1}-P}=1,\ \frac{k}{3}=1$$

よって，$k=3$ のときであり，この場合は④から，$3b_n=20-5\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ となり，

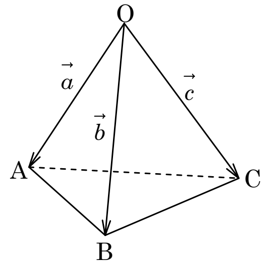
$$3b_n<20<40=L\quad(n\geqq 1)$$

これより，正しい記述は③である。

［コメント］

医学や薬学の単科大学で出題されそうな漸化式の応用問題です。共通テストらしい構成です。なお，非常にていねいな誘導のため，経験がなくても解答ができるように配慮してあります。

第４問



(1) $\vec{a}=(1,\ 1,\ 0)$，$\vec{b}=(1,\ 0,\ 1)$，$\vec{c}=(0,\ 1,\ 1)$のとき，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1+0+0=1,\ \vec{a}\cdot\vec{c}=0+1+0=1$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}=1-1=0$ となるので，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\neq\vec{0}$から，$\mathrm{OA}\perp\mathrm{BC}$ である。

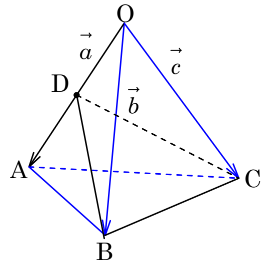
(2) 四面体 OABC に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\neq\vec{0}$から，

$$\mathrm{OA}\perp\mathrm{BC}\iff\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0\iff\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

(3) $\mathrm{OA}\perp\mathrm{BC}$ の条件は，(2)より，$|\vec{a}||\vec{c}|\cos\angle\mathrm{AOC}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}$

$$|\vec{c}|\cos\angle\mathrm{AOC}=|\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}\cdots\cdots\cdots(*)$$

すると，$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$ かつ $\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}$ であれば$(*)$がつねに成り立ち，四面体 OABC は$\mathrm{OA}\perp\mathrm{BC}$ である。



(4) $\mathrm{OC}=\mathrm{OB}=\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ のとき，OA の中点を D とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BO}}),\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}-\overrightarrow{\mathrm{BO}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}\{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BO}}|^2\}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BO}}|$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0$ である。

同様に，$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CO}}|$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ である。

すると，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BD}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}})=0$ となり，$\mathrm{OA}\perp\mathrm{BC}$ である。

(5) (4)では，$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BO}}|$ かつ $|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CO}}|$ の条件だけで $\mathrm{OA}\perp\mathrm{BC}$ が成立していることに注意すると，$\mathrm{OA}\perp\mathrm{BC}$ が成り立つ四面体の適切な記述は，

⓪：$\mathrm{OC}=\mathrm{AC}$ かつ $\mathrm{OB}=\mathrm{AB}$ かつ $\mathrm{OB}\neq\mathrm{OC}$ であるような四面体 OABC

［コメント］

空間ベクトルの四面体への応用問題です。計算はほとんど必要のない定性的な問題です。

第５問

(1) 確率変数 X が $E(X)=104$，$\sigma(X)=2$ の正規分布に従うとき，$Z=\dfrac{X-104}{2}$ とおくと，確率変数 Z は $N(0,\ 1)$ に従う。

ここで，$100 \leqq X \leqq 106$ のとき，$-2 \leqq Z \leqq 1$ となるので，その確率は,

$$0.4772+0.3413=0.8185 \fallingdotseq 0.819$$

また，$X \leqq 98$ のとき，$Z \leqq -3$ となるので，その確率は,

$$0.5-0.4987=0.0013 \fallingdotseq 0.001$$

そして，この確率は,「コインを 10 枚投げたときすべて表」の確率 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}=\dfrac{1}{1024}$ に近い値になっている。

さて，ポップコーン１袋の重さを W とおくと，$W=X+5$ であり,

$$E(W)=E(X)+5=109,\ V(W)=V(X)=2^2=4$$

そして，2 袋分の重さ Y は，$E(W_1)=E(W_2)=109$，$V(W_1)=V(W_2)=4$ を満たす互いに独立な W_1 と W_2 に対して，$Y=W_1+W_2$ と表せ,

$$m_Y=E(Y)=E(W_1)+E(W_2)=109+109=218$$

$$\sigma=\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{V(W_1)+V(W_2)}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$$

また，$102 \leqq X \leqq 106$ のとき $-1 \leqq Z \leqq 1$ となり，Y について同じ確率となるのは,

$$-1 \leqq \frac{Y-m_Y}{2\sqrt{2}} \leqq 1,\ m_Y-2\sqrt{2} \leqq Y \leqq m_Y+2\sqrt{2}$$

(2) $n=100$，$\overline{X}=104$，$S=2$ のとき，母平均 m の信頼度 95%の信頼区間は

$$104-1.96\times\frac{2}{\sqrt{100}} \leqq m \leqq 104+1.96\times\frac{2}{\sqrt{100}} \cdots\cdots\cdots(*)$$

すると，$1.96\times\dfrac{2}{\sqrt{100}}=0.392$ より，$103.6 \leqq m \leqq 104.4$ である。

また，信頼度 99%の信頼区間は，信頼度 95%のものより広い範囲になる。

さらに，信頼区間の幅を(*)の半分にするには，１ つの方法は，標本の大きさを $100 \to 400$ と 4 倍にして $1.96\times\dfrac{2}{\sqrt{100}} \to 1.96\times\dfrac{2}{\sqrt{400}}$ とする場合である。

もう １ つの方法は，信頼度を変更して $1.96\times\dfrac{2}{\sqrt{100}} \to 0.98\times\dfrac{2}{\sqrt{100}}$ とする場合である。このとき正規分布表から $z_0=0.98$ は 0.3365 に対応することより，信頼度を $0.3365\times 2=0.673$，すなわち 67.3% にすればよい。

［コメント］

確率分布と統計的推測についての問題です。数値計算は電卓を利用しましたが……。なお, (1)の後半は，あまり出会ったことのないおもしろい設定です。