第１問

解答解説のページへ

[1]　(1)　1 ラジアンとは，$\boxed{\text{ア}}$のことである。$\boxed{\text{ア}}$に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから 1 つ選べ。

⓪　半径が 1，面積が 1 の扇形の中心角の大きさ

①　半径が π，面積が 1 の扇形の中心角の大きさ

②　半径が 1，弧の長さが 1 の扇形の中心角の大きさ

③　半径が π，弧の長さが 1 の扇形の中心角の大きさ

(2)　144° を弧度で表すと $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$ ラジアンである。また，$\dfrac{23}{12}\pi$ ラジアンを度で表すと$\boxed{\text{エオカ}}$° である。

(3)　$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で，$2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{5}\right)-2\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{30}\right)=1$ ……①を満たす θ の値を求めよう。$x=\theta+\dfrac{\pi}{5}$ とおくと，①は

$$2\sin x-2\cos\left(x-\frac{\pi}{\boxed{\text{キ}}}\right)=1$$

と表せる。加法定理を用いると，この式は，$\sin x-\sqrt{\boxed{\text{ク}}}\cos x=1$ となる。さらに，三角関数の合成を用いると

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}\right)=\frac{1}{\boxed{\text{コ}}}$$

と変形できる。$x=\theta+\dfrac{\pi}{5}$，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ だから，$\theta=\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}\pi$ である。

[2]　c を正の定数として，不等式 $x^{\log_3 x} \geqq \left(\dfrac{x}{c}\right)^3$ ……②を考える。

3 を底とする②の両辺の対数をとり，$t=\log_3 x$ とおくと，

$$t^{\boxed{\text{ソ}}}-\boxed{\text{タ}}\,t+\boxed{\text{タ}}\log_3 c \geqq 0 \text{ ………③}$$

となる。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という。

$c=\sqrt[3]{9}$ のとき，②を満たす x の値の範囲を求めよう。③により，$t \leqq \boxed{\text{チ}}$，$t \geqq \boxed{\text{ツ}}$ である。さらに，真数の条件を考えて，$\boxed{\text{テ}} < x \leqq \boxed{\text{ト}}$，$x \geqq \boxed{\text{ナ}}$ となる。

次に，②が $x > \boxed{\text{テ}}$ の範囲でつねに成り立つような c の値の範囲を求めよう。x が $x > \boxed{\text{テ}}$ の範囲を動くとき，t のとり得る値の範囲は$\boxed{\text{ニ}}$である。$\boxed{\text{ニ}}$に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから 1 つ選べ。

⓪ 正の実数全体　　① 負の実数全体

② 実数全体　　③ 1以外の実数全体

この範囲の t に対して，③がつねに成り立つための必要十分条件は，$\log_3 c \geqq \dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である。すなわち，$c \geqq \sqrt[\boxed{\text{ノ}}]{\boxed{\text{ハヒ}}}$ である。

第２問

解答解説のページへ

[1]　$p>0$ とする。座標平面上の放物線 $y=px^2+qx+r$ を C とし，直線 $y=2x-1$ を l とする。C は点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$ において l と接しているとする。

(1)　q と r を，p を用いて表そう。放物線 C 上の点 A における接線 l の傾きは $\boxed{\text{ア}}$ であることから，$q=\boxed{\text{イウ}}\,p+\boxed{\text{エ}}$ がわかる。さらに，C は点 A を通ることから，$r=p-\boxed{\text{オ}}$ となる。

(2)　$v>1$ とする。放物線 C と直線 l および直線 $x=v$ で囲まれた図形の面積 S は $S=\dfrac{p}{\boxed{\text{カ}}}\left(v^3-\boxed{\text{キ}}\,v^2+\boxed{\text{ク}}\,v-\boxed{\text{ケ}}\right)$ である。また，x 軸と l および 2 直線 $x=1$，$x=v$ で囲まれた図形の面積 T は，$T=v^{\boxed{\text{コ}}}-v$ である。

$U=S-T$ は $v=2$ で極値をとるとする。このとき，$p=\boxed{\text{サ}}$ であり，$v>1$ の範囲で $U=0$ となる v の値を v_0 とすると，$v_0=\dfrac{\boxed{\text{シ}}+\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

$1<v<v_0$ の範囲で U は $\boxed{\text{ソ}}$。$\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから１つ選べ。

⓪　つねに増加する　　①　つねに減少する　　②　正の値のみをとる

③　負の値のみをとる　④　正と負のどちらの値もとる

$p=\boxed{\text{サ}}$ のとき，$v>1$ における U の最小値は $\boxed{\text{タチ}}$ である。

[2]　関数 $f(x)$ は $x\geqq 1$ の範囲でつねに $f(x)\leqq 0$ を満たすとする。$t>1$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=1$，$x=t$ で囲まれた図形の面積を W とする。t が $t>1$ の範囲を動くとき，W は，底辺の長さが $2t^2-2$，他の 2 辺の長さがそれぞれ t^2+1 の二等辺三角形の面積とつねに等しいとする。このとき，$x>1$ における $f(x)$ を求めよう。

$F(x)$ を $f(x)$ の不定積分とする。一般に，$F'(x)=\boxed{\text{ツ}}$，$W=\boxed{\text{テ}}$ が成り立つ。$\boxed{\text{ツ}}$，$\boxed{\text{テ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑧のうちから１つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪　$-F(t)$　　①　$F(t)$　　②　$F(t)-F(1)$

③　$F(t)+F(1)$　　④　$-F(t)+F(1)$　　⑤　$-F(t)-F(1)$

⑥　$-f(x)$　　⑦　$f(x)$　　⑧　$f(x)-f(1)$

したがって，$t>1$ において，$f(t)=\boxed{\text{トナ}}\,t^{\boxed{\text{ニ}}}+\boxed{\text{ヌ}}$ である。よって，$x>1$ における $f(x)$ がわかる。

第３問

解答解説のページへ

第 4 項が 30，初項から第 8 項までの和が 288 である等差数列を$\{a_n\}$とし，$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和をS_nとする。また，第 2 項が 36，初項から第 3 項までの和が 156 である等比数列で公比が 1 より大きいものを$\{b_n\}$とし，$\{b_n\}$の初項から第 n 項までの和をT_nとする。

(1)　$\{a_n\}$の初項は$\boxed{アイ}$，公差は$\boxed{ウエ}$であり，$S_n=\boxed{オ}n^2-\boxed{カキ}n$である。

(2)　$\{b_n\}$の初項は$\boxed{クケ}$，公比は$\boxed{コ}$であり，$T_n=\boxed{サ}\left(\boxed{シ}^{n}-\boxed{ス}\right)$である。

(3)　数列$\{c_n\}$を次のように定義する。

$$c_n=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(a_k-b_k)$$
$$=n(a_1-b_1)+(n-1)(a_2-b_2)+\cdots+2(a_{n-1}-b_{n-1})+(a_n-b_n)$$
$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

たとえば

$$c_1=a_1-b_1,\ c_2=2(a_1-b_1)+(a_2-b_2),\ c_3=3(a_1-b_1)+2(a_2-b_2)+(a_3-b_3)$$

である。数列$\{c_n\}$の一般項を求めよう。

$\{c_n\}$の階差数列を$\{d_n\}$とする。$d_n=c_{n+1}-c_n$であるから，$d_n=\boxed{セ}$を満たす。$\boxed{セ}$に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから 1 つ選べ。

⓪　S_n+T_n　①　S_n-T_n　②　$-S_n+T_n$　③　$-S_n-T_n$

④　$S_{n+1}+T_{n+1}$　⑤　$S_{n+1}-T_{n+1}$　⑥　$-S_{n+1}+T_{n+1}$　⑦　$-S_{n+1}-T_{n+1}$

したがって，(1)と(2)により，$d_n=\boxed{ソ}n^2-2\cdot\boxed{タ}^{n+\boxed{チ}}$である。

$c_1=\boxed{ツテト}$であるから，$\{c_n\}$の一般項は

$$c_n=\boxed{ナ}n^3-\boxed{ニ}n^2+n+\boxed{ヌ}-\boxed{タ}^{n+\boxed{ネ}}$$

である。

第４問

解答解説のページへ

a を$0<a<1$を満たす定数とする。三角形 ABC を考え，辺 AB を$1:3$に内分する点を D，辺 BC を$a:(1-a)$に内分する点を E，直線 AE と直線 CD の交点を F とする。$\overrightarrow{\mathrm{FA}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{FB}}=\vec{q}$，$\overrightarrow{\mathrm{FC}}=\vec{r}$ とおく。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boxed{\text{ア}}$であり，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{p}|^2-\boxed{\text{イ}}\,\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$ ……①である。ただし，$\boxed{\text{ア}}$については，当てはまるものを，次の⓪～③のうちから１つ選べ。

⓪ $\vec{p}+\vec{q}$　　① $\vec{p}-\vec{q}$　　② $\vec{q}-\vec{p}$　　③ $-\vec{p}-\vec{q}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{FD}}$を$\vec{p}$と$\vec{q}$を用いて表すと，$\overrightarrow{\mathrm{FD}}=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{p}+\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{q}$ ……②である。

(3) s，tをそれぞれ$\overrightarrow{\mathrm{FD}}=s\vec{r}$，$\overrightarrow{\mathrm{FE}}=t\vec{p}$となる実数とする。$s$と$t$を$a$を用いて表そう。

$\overrightarrow{\mathrm{FD}}=s\vec{r}$であるから，②により

$$\vec{q}=\boxed{\text{キク}}\,\vec{p}+\boxed{\text{ケ}}\,s\vec{r}\ \cdots\cdots\cdots③$$

である。また，$\overrightarrow{\mathrm{FE}}=t\vec{p}$であるから

$$\vec{q}=\frac{t}{\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{サ}}}\vec{p}-\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{サ}}}\vec{r}\ \cdots\cdots\cdots④$$

である。③と④により

$$s=\frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}\left(\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{サ}}\right)},\quad t=\boxed{\text{タチ}}\left(\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{サ}}\right)$$

である。

(4) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|$とする。$|\vec{p}|=1$のとき，$\vec{p}$と$\vec{q}$の内積を$a$を用いて表そう。

①により，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=1-\boxed{\text{イ}}\,\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$である。また

$$|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|^2=\boxed{\text{ツ}}\left(\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{サ}}\right)^2+\boxed{\text{テ}}\left(\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{サ}}\right)\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$$

である。したがって，$\vec{p}\cdot\vec{q}=\dfrac{\boxed{\text{トナ}}-\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

第１問

問題のページへ

[1]　(1)　1 ラジアンとは「半径が 1, 弧の長さが 1 の扇形の中心角の大きさ」である。

(2)　$144^\circ=\dfrac{144}{180}\pi=\dfrac{4}{5}\pi$，$\dfrac{23}{12}\pi=\dfrac{23}{12}\times180^\circ=345^\circ$

(3)　$2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{5}\right)-2\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{30}\right)=1\ \left(\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi\right)$……①に対し，$x=\theta+\dfrac{\pi}{5}$ とおく。

すると，$\theta+\dfrac{\pi}{30}=x-\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{\pi}{30}=x-\dfrac{\pi}{6}$ より，①は，$2\sin x-2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=1$

加法定理から，$2\sin x-2\cos x\cos\dfrac{\pi}{6}-2\sin x\sin\dfrac{\pi}{6}=1$，$\sin x-\sqrt{3}\cos x=1$ となり，

$$2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1,\ \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

これより，$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{5}-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$，$\sin\left(\theta-\dfrac{2}{15}\pi\right)=\dfrac{1}{2}$ なので，$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ から，

$$\theta-\frac{2}{15}\pi=\frac{5}{6}\pi,\ \theta=\frac{5}{6}\pi+\frac{2}{15}\pi=\frac{29}{30}\pi$$

[2]　不等式 $x^{\log_3 x}\geqq\left(\dfrac{x}{c}\right)^3\ (c>0)$……②に対し，$x>0$ のもとで，

$$\log_3 x^{\log_3 x}\geqq\log_3\left(\frac{x}{c}\right)^3,\ (\log_3 x)^2\geqq3(\log_3 x-\log_3 c)$$

$t=\log_3 x$ とおくと，$t^2\geqq3(t-\log_3 c)$ から，$t^2-3t+3\log_3 c\geqq0$………③

ここで，$c=\sqrt[3]{9}$ のとき，$\log_3 c=\log_3 3^{\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}$ から，③は，

$$t^2-3t+2\geqq0,\ (t-1)(t-2)\geqq0$$

よって，$t\leqq1$，$2\leqq t$ となり，$\log_3 x\leqq1$，$2\leqq\log_3 x$ から，$x>0$ に注意すると，

$$0<x\leqq3,\ 9\leqq x$$

次に, x が $x>0$ の範囲を動くとき, t のとり得る値の範囲は実数全体となるので, ②がつねに成り立つ条件は, ③がどんな実数 t についても成り立つことである。

すなわち，$t^2-3t+3\log_3 c=0$ の判別式 D が,

$$D=9-12\log_3 c\leqq0,\ \log_3 c\geqq\frac{3}{4}$$

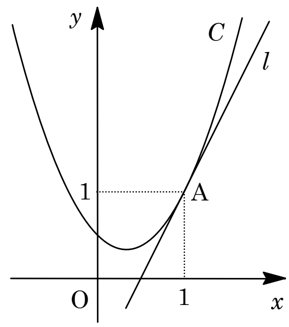
よって，$c\geqq3^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{27}$ である。

［解 説］

[1]は三角方程式, [2]は指数・対数不等式という基本的な小問の組合せです。両問とも，丁寧な誘導がついているため，方針に迷うことはないでしょう。

第２問

問題のページへ



[1]　(1)　$C: y = px^2 + qx + r\ (p > 0)$ に対して $y' = 2px + q$ となり，C と $l: y = 2x - 1$ が点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$ で接していることから，A における接線の傾きは 2 となり，

$$2p + q = 2,\ q = -2p + 2 \cdots\cdots\cdots ①,$$

また，C が A を通ることから，$p + q + r = 1 \cdots\cdots\cdots ②$

①②より，$r = 1 - p - (-2p + 2) = p - 1$

(2)　(1)から，$C: y = px^2 - (2p - 2)x + p - 1$ となり，$v > 1$ のとき，C と l および直線 $x = v$ で囲まれた図形の面積 S は，

$$S = \int_1^v \{px^2 - (2p-2)x + p - 1 - (2x - 1)\}dx = p\int_1^v (x-1)^2 dx$$

$$= \frac{p}{3}\Big[(x-1)^3\Big]_1^v = \frac{p}{3}(v-1)^3 = \frac{p}{3}(v^3 - 3v^2 + 3v - 1)$$

また，x 軸と l および 2 直線 $x = 1$，$x = v$ で囲まれた図形の面積 T は，

$$T = \frac{1}{2}(1 + 2v - 1)(v - 1) = v(v-1) = v^2 - v$$

ここで，$U = S - T = \frac{p}{3}(v^3 - 3v^2 + 3v - 1) - v^2 + v$ より，

$$U' = \frac{p}{3}(3v^2 - 6v + 3) - 2v + 1 = p(v^2 - 2v + 1) - 2v + 1$$

さて，$v = 2$ のとき U は極値をとることから，このとき $U' = 0$ が必要となり，

$$p(4 - 4 + 1) - 4 + 1 = 0,\ p = 3$$

これから，$U' = 3(v^2 - 2v + 1) - 2v + 1 = 3v^2 - 8v + 4 = (v-2)(3v-2)$ となるので，$v = 2$ の前後で U' に符号変化がある。すなわち，$v = 2$ のとき U は極値をとる。

すると，$U = (v^3 - 3v^2 + 3v - 1) - v^2 + v = v^3 - 4v^2 + 4v - 1$

ここで，$U = 0$ とすると，$v^3 - 4v^2 + 4v - 1 = 0$ となり，$(v-1)(v^2 - 3v + 1) = 0$

$$v = 1,\ v = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

この v の値のなかで，$v > 1$ のものを $v = v_0$ とおくと，$v_0 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$ である。

さらに，$v_0 > 2$ から，$v > 1$ において U の増減は右表のようになるので，$1 < v < v_0$ において，$U < 0$ である。

v	1	$\cdots$	2	$\cdots$	v_0	$\cdots$
U'		$-$	0	$+$		$+$
U	0	↘	-1	↗	0	↗

さらに，$v > 1$ における U の最小値は，右表から -1 である。

[2]　$x \geqq 1$ のとき $f(x) \leqq 0$ である関数 $f(x)$ に対し，曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = 1$，$x = t\ (t > 1)$ で囲まれた図形の面積 W は，

$$W=-\int_1^t f(x)\,dx$$

ここで，$F(x)$ を $f(x)$ の不定積分とすると，$F'(x)=f(x)$ となり，

$$W=-\big[\,F(x)\,\big]_1^t=-F(t)+F(1)\cdots\cdots\cdots③$$

また, W は, 底辺の長さが $2t^2-2$，他の 2 辺の長さがそれぞれ t^2+1 の二等辺三角形の面積と等しいことから,

$$W=\frac{1}{2}(2t^2-2)\sqrt{(t^2+1)^2-\left(\frac{2t^2-2}{2}\right)^2}=(t^2-1)\sqrt{(t^2+1)^2-(t^2-1)^2}$$

$$=2t(t^2-1)=2t^3-2t\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$-F(t)+F(1)=2t^3-2t$ となり，両辺を t で微分すると,

$$-f(t)=6t^2-2,\quad f(t)=-6t^2+2$$

［解 説］

2 題構成の微積分の総合問題です。難しい計算はありませんが, 問題量はやや多めです。なお, [1]の T については, 台形の面積公式を利用しています。

第３問

問題のページへ

(1) 等差数列$\{a_n\}$の公差をdとおくと，$a_4=30$から，$a_1+3d=30$ ………①

$S_8=288$から，$\dfrac{8}{2}(a_1+a_1+7d)=288$となり，$2a_1+7d=72$ ………②

①②より，$a_1=-6$，$d=12$となり，$a_n=-6+12(n-1)=12n-18$

$$S_n=\frac{n}{2}(-6+12n-18)=6n^2-12n \text{ ………③}$$

(2) 等比数列$\{b_n\}$の公比を$r\,(r>1)$とおくと，$b_2=36$から，$b_1r=36$ ………④

$T_3=156$から，$b_1+b_1r+b_1r^2=156$ ………⑤

④⑤より，$\dfrac{36}{r}+36+36r=156$，$3r+\dfrac{3}{r}=10$となり，

$$3r^2-10r+3=0,\ (3r-1)(r-3)=0$$

$r>1$から$r=3$，$b_1=12$となり，$b_n=12\cdot3^{n-1}=4\cdot3^n$

$$T_n=\frac{12(3^n-1)}{3-1}=6(3^n-1) \text{ ………⑥}$$

(3) $c_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(a_k-b_k)=n\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)+\sum_{k=1}^{n}(-k+1)(a_k-b_k)$に対し，階差数列$d_n=c_{n+1}-c_n$とすると，

$$\begin{aligned}d_n&=(n+1)\sum_{k=1}^{n+1}(a_k-b_k)+\sum_{k=1}^{n+1}(-k+1)(a_k-b_k)\\&\quad-n\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)-\sum_{k=1}^{n}(-k+1)(a_k-b_k)\\&=n(a_{n+1}-b_{n+1})+\sum_{k=1}^{n+1}(a_k-b_k)+(-n-1+1)(a_{n+1}-b_{n+1})\\&=\sum_{k=1}^{n+1}(a_k-b_k)=S_{n+1}-T_{n+1}\end{aligned}$$

③⑥より，$d_n=6(n+1)^2-12(n+1)-6(3^{n+1}-1)=6n^2-2\cdot3^{n+2}$

ここで，$c_1=a_1-b_1=-18$であるので，$n\geqq2$において，

$$\begin{aligned}c_n&=-18+\sum_{k=1}^{n-1}(6k^2-2\cdot3^{k+2})=-18+6\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-\frac{2\cdot3^3(3^{n-1}-1)}{3-1}\\&=2n^3-3n^2+n+9-3^{n+2}\end{aligned}$$

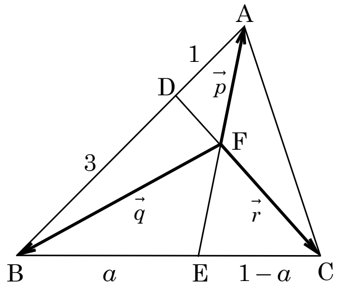
なお, 上式は$n=1$のときも成立している。

［解 説］

数列の和についての問題です。数列$\{d_n\}$の一般項を求める箇所がポイントになります。解答例では, nをいったんシグマの前に出し，見通しをよくした後に計算を進めています。

第４問

問題のページへ



(1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FB}-\overrightarrow{FA}=\vec{q}-\vec{p}$ となり，

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$ ………①

(2) $AD:DB=1:3$ より，$\overrightarrow{FD}=\frac{3}{4}\vec{p}+\frac{1}{4}\vec{q}$ ………②

(3) $\overrightarrow{FD}=s\vec{r}$ とすると，②より，$s\vec{r}=\frac{3}{4}\vec{p}+\frac{1}{4}\vec{q}$ となり，

$\vec{q}=-3\vec{p}+4s\vec{r}$ ………③

$\overrightarrow{FE}=t\vec{p}$ とすると，$BE:EC=a:1-a$ から，

$t\vec{p}=(1-a)\vec{q}+a\vec{r}$，$\vec{q}=\frac{t}{1-a}\vec{p}-\frac{a}{1-a}\vec{r}$ ………④

$\vec{p}$，$\vec{r}$ は１次独立なので，③④より，$\frac{t}{1-a}=-3$，$-\frac{a}{1-a}=4s$ となり，

$s=\frac{-a}{4(1-a)}$，$t=-3(1-a)$ ………⑤

(4) $|\vec{p}|=1$ のとき，①より，$|\overrightarrow{AB}|^2=1-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$ ………⑥

また，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{FE}-\overrightarrow{FB}=t\vec{p}-\vec{q}$ なので，

$|\overrightarrow{BE}|^2=t^2|\vec{p}|^2-2t\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2=t^2-2t\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$

⑤を代入すると，$|\overrightarrow{BE}|^2=9(1-a)^2+6(1-a)\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$ ………⑦

ここで，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BE}|$ から，⑥⑦より，

$1-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2=9(1-a)^2+6(1-a)\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$

$(6a-8)\vec{p}\cdot\vec{q}=9a^2-18a+8$，$2(3a-4)\vec{p}\cdot\vec{q}=(3a-4)(3a-2)$

すると，$0<a<1$ から，$\vec{p}\cdot\vec{q}=\frac{3a-2}{2}$ となる。

［解 説］

ベクトルの平面図形への応用問題です。本問も誘導が丁寧なので，それに従うと最後の設問まで流れていきます。