第１問

解答解説のページへ

[1]　(1)　1 ラジアンとは，$\boxed{\text{ア}}$のことである。$\boxed{\text{ア}}$に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから 1 つ選べ。

⓪　半径が 1，面積が 1 の扇形の中心角の大きさ

①　半径が π，面積が 1 の扇形の中心角の大きさ

②　半径が 1，弧の長さが 1 の扇形の中心角の大きさ

③　半径が π，弧の長さが 1 の扇形の中心角の大きさ

(2)　144° を弧度で表すと $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$ ラジアンである。また，$\dfrac{23}{12}\pi$ ラジアンを度で表すと$\boxed{\text{エオカ}}$° である。

(3)　$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で，$2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{5}\right)-2\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{30}\right)=1$ ……①を満たす θ の値を求めよう。$x=\theta+\dfrac{\pi}{5}$ とおくと，①は

$$2\sin x-2\cos\left(x-\frac{\pi}{\boxed{\text{キ}}}\right)=1$$

と表せる。加法定理を用いると，この式は，$\sin x-\sqrt{\boxed{\text{ク}}}\cos x=1$ となる。さらに，三角関数の合成を用いると

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}\right)=\frac{1}{\boxed{\text{コ}}}$$

と変形できる。$x=\theta+\dfrac{\pi}{5}$，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ だから，$\theta=\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}\pi$ である。

[2]　c を正の定数として，不等式 $x^{\log_3 x} \geqq \left(\dfrac{x}{c}\right)^3$ ……②を考える。

3 を底とする②の両辺の対数をとり，$t=\log_3 x$ とおくと，

$$t^{\boxed{\text{ソ}}}-\boxed{\text{タ}}\,t+\boxed{\text{タ}}\log_3 c \geqq 0 \text{ ………③}$$

となる。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という。

$c=\sqrt[3]{9}$ のとき，②を満たす x の値の範囲を求めよう。③により，$t \leqq \boxed{\text{チ}}$，$t \geqq \boxed{\text{ツ}}$ である。さらに，真数の条件を考えて，$\boxed{\text{テ}} < x \leqq \boxed{\text{ト}}$，$x \geqq \boxed{\text{ナ}}$ となる。

次に，②が $x > \boxed{\text{テ}}$ の範囲でつねに成り立つような c の値の範囲を求めよう。x が $x > \boxed{\text{テ}}$ の範囲を動くとき，t のとり得る値の範囲は$\boxed{\text{ニ}}$である。$\boxed{\text{ニ}}$に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから 1 つ選べ。

⓪ 正の実数全体　　① 負の実数全体

② 実数全体　　③ 1以外の実数全体

この範囲の t に対して，③がつねに成り立つための必要十分条件は，$\log_3 c \geqq \dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である。すなわち，$c \geqq \sqrt[\boxed{\text{ノ}}]{\boxed{\text{ハヒ}}}$ である。

第２問

解答解説のページへ

[1]　$p>0$ とする。座標平面上の放物線 $y=px^2+qx+r$ を C とし，直線 $y=2x-1$ を l とする。C は点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$ において l と接しているとする。

(1)　q と r を，p を用いて表そう。放物線 C 上の点 A における接線 l の傾きは $\boxed{\text{ア}}$ であることから，$q=\boxed{\text{イウ}}\,p+\boxed{\text{エ}}$ がわかる。さらに，C は点 A を通ることから，$r=p-\boxed{\text{オ}}$ となる。

(2)　$v>1$ とする。放物線 C と直線 l および直線 $x=v$ で囲まれた図形の面積 S は $S=\dfrac{p}{\boxed{\text{カ}}}\left(v^3-\boxed{\text{キ}}\,v^2+\boxed{\text{ク}}\,v-\boxed{\text{ケ}}\right)$ である。また，x 軸と l および 2 直線 $x=1$，$x=v$ で囲まれた図形の面積 T は，$T=v^{\boxed{\text{コ}}}-v$ である。

　$U=S-T$ は $v=2$ で極値をとるとする。このとき，$p=\boxed{\text{サ}}$ であり，$v>1$ の範囲で $U=0$ となる v の値を v_0 とすると，$v_0=\dfrac{\boxed{\text{シ}}+\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

$1<v<v_0$ の範囲で U は $\boxed{\text{ソ}}$。$\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから 1 つ選べ。

⓪　つねに増加する　　①　つねに減少する　　②　正の値のみをとる

③　負の値のみをとる　④　正と負のどちらの値もとる

$p=\boxed{\text{サ}}$ のとき，$v>1$ における U の最小値は $\boxed{\text{タチ}}$ である。

[2]　関数 $f(x)$ は $x\geqq 1$ の範囲でつねに $f(x)\leqq 0$ を満たすとする。$t>1$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=1$，$x=t$ で囲まれた図形の面積を W とする。t が $t>1$ の範囲を動くとき，W は，底辺の長さが $2t^2-2$，他の 2 辺の長さがそれぞれ t^2+1 の二等辺三角形の面積とつねに等しいとする。このとき，$x>1$ における $f(x)$ を求めよう。

　$F(x)$ を $f(x)$ の不定積分とする。一般に，$F'(x)=\boxed{\text{ツ}}$，$W=\boxed{\text{テ}}$ が成り立つ。$\boxed{\text{ツ}}$，$\boxed{\text{テ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑧のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪　$-F(t)$　　①　$F(t)$　　②　$F(t)-F(1)$

③　$F(t)+F(1)$　　④　$-F(t)+F(1)$　　⑤　$-F(t)-F(1)$

⑥　$-f(x)$　　⑦　$f(x)$　　⑧　$f(x)-f(1)$

　したがって，$t>1$ において，$f(t)=\boxed{\text{トナ}}\,t^{\boxed{\text{ニ}}}+\boxed{\text{ヌ}}$ である。よって，$x>1$ における $f(x)$ がわかる。

第３問

解答解説のページへ

第 4 項が 30, 初項から第 8 項までの和が 288 である等差数列を$\{a_n\}$とし，$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和をS_nとする。また，第 2 項が 36, 初項から第 3 項までの和が 156 である等比数列で公比が 1 より大きいものを$\{b_n\}$とし，$\{b_n\}$の初項から第 n 項までの和をT_nとする。

(1) $\{a_n\}$の初項は$\boxed{\text{アイ}}$，公差は$\boxed{\text{ウエ}}$であり，$S_n = \boxed{\text{オ}}\,n^2 - \boxed{\text{カキ}}\,n$ である。

(2) $\{b_n\}$の初項は$\boxed{\text{クケ}}$，公比は$\boxed{\text{コ}}$であり，$T_n = \boxed{\text{サ}}\left(\boxed{\text{シ}}^{\,n} - \boxed{\text{ス}}\right)$である。

(3) 数列$\{c_n\}$を次のように定義する。

$$c_n = \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(a_k - b_k)$$
$$= n(a_1 - b_1) + (n-1)(a_2 - b_2) + \cdots + 2(a_{n-1} - b_{n-1}) + (a_n - b_n)$$
$$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

たとえば

$$c_1 = a_1 - b_1,\ c_2 = 2(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2),\ c_3 = 3(a_1 - b_1) + 2(a_2 - b_2) + (a_3 - b_3)$$

である。数列$\{c_n\}$の一般項を求めよう。

$\{c_n\}$の階差数列を$\{d_n\}$とする。$d_n = c_{n+1} - c_n$ であるから，$d_n = \boxed{\text{セ}}$を満たす。

$\boxed{\text{セ}}$に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから 1 つ選べ。

⓪ $S_n + T_n$	① $S_n - T_n$	② $-S_n + T_n$	③ $-S_n - T_n$
④ $S_{n+1} + T_{n+1}$	⑤ $S_{n+1} - T_{n+1}$	⑥ $-S_{n+1} + T_{n+1}$	⑦ $-S_{n+1} - T_{n+1}$

したがって，(1)と(2)により，$d_n = \boxed{\text{ソ}}\,n^2 - 2\cdot\boxed{\text{タ}}^{\,n+\boxed{\text{チ}}}$ である。

$c_1 = \boxed{\text{ツテト}}$であるから，$\{c_n\}$の一般項は

$$c_n = \boxed{\text{ナ}}\,n^3 - \boxed{\text{ニ}}\,n^2 + n + \boxed{\text{ヌ}} - \boxed{\text{タ}}^{\,n+\boxed{\text{ネ}}}$$

である。

第４問

解答解説のページへ

a を $0<a<1$ を満たす定数とする。三角形 ABC を考え，辺 AB を $1:3$ に内分する点を D，辺 BC を $a:(1-a)$ に内分する点を E，直線 AE と直線 CD の交点を F とする。$\overrightarrow{\mathrm{FA}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{FB}}=\vec{q}$，$\overrightarrow{\mathrm{FC}}=\vec{r}$ とおく。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boxed{\text{ア}}$ であり，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{p}|^2-\boxed{\text{イ}}\,\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$ ……①である。ただし，$\boxed{\text{ア}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～③のうちから１つ選べ。

⓪ $\vec{p}+\vec{q}$　① $\vec{p}-\vec{q}$　② $\vec{q}-\vec{p}$　③ $-\vec{p}-\vec{q}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{FD}}$ を $\vec{p}$ と $\vec{q}$ を用いて表すと，$\overrightarrow{\mathrm{FD}}=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{p}+\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{q}$ ……②である。

(3) s，t をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{FD}}=s\vec{r}$，$\overrightarrow{\mathrm{FE}}=t\vec{p}$ となる実数とする。s と t を a を用いて表そう。

$\overrightarrow{\mathrm{FD}}=s\vec{r}$ であるから，②により

$$\vec{q}=\boxed{\text{キク}}\,\vec{p}+\boxed{\text{ケ}}\,s\vec{r}\ \cdots\cdots\cdots③$$

である。また，$\overrightarrow{\mathrm{FE}}=t\vec{p}$ であるから

$$\vec{q}=\frac{t}{\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{サ}}}\vec{p}-\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{サ}}}\vec{r}\ \cdots\cdots\cdots④$$

である。③と④により

$$s=\frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}\left(\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{サ}}\right)},\quad t=\boxed{\text{タチ}}\left(\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{サ}}\right)$$

である。

(4) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|$ とする。$|\vec{p}|=1$ のとき，$\vec{p}$ と $\vec{q}$ の内積を a を用いて表そう。

①により，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=1-\boxed{\text{イ}}\,\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$ である。また

$$|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|^2=\boxed{\text{ツ}}\left(\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{サ}}\right)^2+\boxed{\text{テ}}\left(\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{サ}}\right)\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$$

である。したがって，$\vec{p}\cdot\vec{q}=\dfrac{\boxed{\text{トナ}}-\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

第５問

解答解説のページへ

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 8 ページの正規分布表を用いてもよい。

(1) a を正の整数とする。2，4，6，…，$2a$ の数字がそれぞれ 1 つずつ書かれた a 枚のカードが箱に入っている。この箱から 1 枚のカードを無作為に取り出すとき，そこに書かれた数字を表す確率変数を X とする。このとき，$X=2a$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

$a=5$ とする。X の平均（期待値）は $\boxed{\text{ウ}}$，X の分散は $\boxed{\text{エ}}$ である。また，s，t は定数で $s>0$ のとき，$sX+t$ の平均が 20，分散が 32 となるように s，t を定めると，$s=\boxed{\text{オ}}$，$t=\boxed{\text{カ}}$ である。このとき，$sX+t$ が 20 以上である確率は $0.\boxed{\text{キ}}$ である。

(2) (1)の箱のカードの枚数 a は 3 以上とする。この箱から 3 枚のカードを同時に取り出し，それらのカードを横 1 列に並べる。この試行において，カードの数字が左から小さい順に並んでいる事象を A とする。このとき，事象 A の起こる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

この試行を 180 回繰り返すとき，事象 A が起こる回数を表す確率変数を Y とすると，Y の平均 m は $\boxed{\text{コサ}}$，Y の分散 σ^2 は $\boxed{\text{シス}}$ である。ここで，事象 A が 18 回以上 36 回以下起こる確率の近似値を次のように求めよう。

試行回数 180 は大きいことから，Y は近似的に平均 $m=\boxed{\text{コサ}}$，標準偏差 $\sigma=\sqrt{\boxed{\text{シス}}}$ の正規分布に従うと考えられる。ここで，$Z=\dfrac{Y-m}{\sigma}$ とおくと，求める確率の近似値は次のようになる。

$$P(18 \leqq Y \leqq 36)=P\left(-\boxed{\text{セ}}.\boxed{\text{ソタ}} \leqq Z \leqq \boxed{\text{チ}}.\boxed{\text{ツテ}}\right)=0.\boxed{\text{トナ}}$$

(3) ある都市での世論調査において，無作為に 400 人の有権者を選び，ある政策に対する賛否を調べたところ，320 人が賛成であった。この都市の有権者全体のうち，この政策の賛成者の母比率 p に対する信頼度 95%の信頼区間を求めたい。

この調査での賛成者の比率（以下，これを標本比率という）は $0.\boxed{\text{ニ}}$ である。標本の大きさが 400 と大きいので，二項分布の正規分布による近似を用いると，p に対する信頼度 95%の信頼区間は，$0.\boxed{\text{ヌネ}} \leqq p \leqq 0.\boxed{\text{ノハ}}$ である。

母比率 p に対する信頼区間 $A \leqq p \leqq B$ において，$B-A$ をこの信頼区間の幅とよぶ。以下，R を標本比率とし，p に対する信頼度 95%の信頼区間を考える。

上で求めた信頼区間の幅を L_1

標本の大きさが 400 の場合に $R = 0.6$ が得られたときの信頼区間の幅を L_2

標本の大きさが 500 の場合に $R = 0.8$ が得られたときの信頼区間の幅を L_3

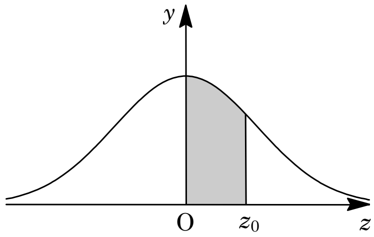
とする。このとき L_1 L_2 L_3 について $\boxed{\text{ヒ}}$ が成り立つ。$\boxed{\text{ヒ}}$ にあてはまるものを，次の⓪～⑤のうちから１つ選べ。

⓪ $L_1 < L_2 < L_3$　① $L_1 < L_3 < L_2$　② $L_2 < L_1 < L_3$

③ $L_2 < L_3 < L_1$　④ $L_3 < L_1 < L_2$　⑤ $L_3 < L_2 < L_1$

正 規 分 布 表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

第１問

問題のページへ

[1]　(1)　1 ラジアンとは「半径が 1, 弧の長さが 1 の扇形の中心角の大きさ」である。

(2)　$144^\circ=\dfrac{144}{180}\pi=\dfrac{4}{5}\pi$，$\dfrac{23}{12}\pi=\dfrac{23}{12}\times180^\circ=345^\circ$

(3)　$2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{5}\right)-2\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{30}\right)=1\ \left(\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi\right)$……①に対し，$x=\theta+\dfrac{\pi}{5}$ とおく。

すると，$\theta+\dfrac{\pi}{30}=x-\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{\pi}{30}=x-\dfrac{\pi}{6}$ より，①は，$2\sin x-2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=1$

加法定理から，$2\sin x-2\cos x\cos\dfrac{\pi}{6}-2\sin x\sin\dfrac{\pi}{6}=1$，$\sin x-\sqrt{3}\cos x=1$ となり，

$$2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1,\ \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

これより，$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{5}-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$，$\sin\left(\theta-\dfrac{2}{15}\pi\right)=\dfrac{1}{2}$ なので，$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ から，

$$\theta-\frac{2}{15}\pi=\frac{5}{6}\pi,\ \theta=\frac{5}{6}\pi+\frac{2}{15}\pi=\frac{29}{30}\pi$$

[2]　不等式 $x^{\log_3 x}\geqq\left(\dfrac{x}{c}\right)^3\ (c>0)$……②に対し，$x>0$ のもとで，

$$\log_3 x^{\log_3 x}\geqq\log_3\left(\frac{x}{c}\right)^3,\ (\log_3 x)^2\geqq3(\log_3 x-\log_3 c)$$

$t=\log_3 x$ とおくと，$t^2\geqq3(t-\log_3 c)$ から，$t^2-3t+3\log_3 c\geqq0$………③

ここで，$c=\sqrt[3]{9}$ のとき，$\log_3 c=\log_3 3^{\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}$ から，③は，

$$t^2-3t+2\geqq0,\ (t-1)(t-2)\geqq0$$

よって，$t\leqq1$，$2\leqq t$ となり，$\log_3 x\leqq1$，$2\leqq\log_3 x$ から，$x>0$ に注意すると，

$$0<x\leqq3,\ 9\leqq x$$

次に，x が $x>0$ の範囲を動くとき，t のとり得る値の範囲は実数全体となるので，②がつねに成り立つ条件は，③がどんな実数 t についても成り立つことである。

すなわち，$t^2-3t+3\log_3 c=0$ の判別式 D が，

$$D=9-12\log_3 c\leqq0,\ \log_3 c\geqq\frac{3}{4}$$

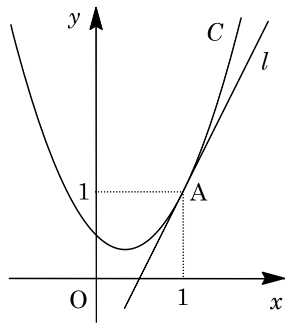
よって，$c\geqq3^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{27}$ である。

［解 説］

[1]は三角方程式, [2]は指数・対数不等式という基本的な小問の組合せです。両問とも，丁寧な誘導がついているため，方針に迷うことはないでしょう。

第２問

問題のページへ



[1]　(1)　$C: y = px^2 + qx + r\ (p > 0)$ に対して $y' = 2px + q$ となり，C と $l: y = 2x - 1$ が点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$ で接していることから，A における接線の傾きは 2 となり，

$2p + q = 2$，$q = -2p + 2$ ………①,

また，C が A を通ることから，$p + q + r = 1$ ………②

①②より，$r = 1 - p - (-2p + 2) = p - 1$

(2)　(1)から，$C: y = px^2 - (2p - 2)x + p - 1$ となり，$v > 1$ のとき，C と l および直線 $x = v$ で囲まれた図形の面積 S は，

$$S = \int_1^v \{px^2 - (2p - 2)x + p - 1 - (2x - 1)\}dx = p\int_1^v (x-1)^2 dx$$

$$= \frac{p}{3}\Big[(x-1)^3\Big]_1^v = \frac{p}{3}(v-1)^3 = \frac{p}{3}(v^3 - 3v^2 + 3v - 1)$$

また，x 軸と l および 2 直線 $x = 1$，$x = v$ で囲まれた図形の面積 T は,

$$T = \frac{1}{2}(1 + 2v - 1)(v - 1) = v(v - 1) = v^2 - v$$

ここで，$U = S - T = \frac{p}{3}(v^3 - 3v^2 + 3v - 1) - v^2 + v$ より，

$$U' = \frac{p}{3}(3v^2 - 6v + 3) - 2v + 1 = p(v^2 - 2v + 1) - 2v + 1$$

さて，$v = 2$ のとき U は極値をとることから，このとき $U' = 0$ が必要となり，

$p(4 - 4 + 1) - 4 + 1 = 0$，$p = 3$

これから，$U' = 3(v^2 - 2v + 1) - 2v + 1 = 3v^2 - 8v + 4 = (v - 2)(3v - 2)$ となるので，$v = 2$ の前後で U' に符号変化がある。すなわち，$v = 2$ のとき U は極値をとる。

すると，$U = (v^3 - 3v^2 + 3v - 1) - v^2 + v = v^3 - 4v^2 + 4v - 1$

ここで，$U = 0$ とすると，$v^3 - 4v^2 + 4v - 1 = 0$ となり，$(v - 1)(v^2 - 3v + 1) = 0$

$$v = 1,\ v = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

この v の値のなかで，$v > 1$ のものを $v = v_0$ とおくと，$v_0 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$ である。

さらに，$v_0 > 2$ から，$v > 1$ において U の増減は右表のようになるので，$1 < v < v_0$ において，$U < 0$ である。

v	1	$\cdots$	2	$\cdots$	v_0	$\cdots$
U'		$-$	0	$+$		$+$
U	0	↘	-1	↗	0	↗

さらに，$v > 1$ における U の最小値は，右表から -1 である。

[2]　$x \geqq 1$ のとき $f(x) \leqq 0$ である関数 $f(x)$ に対し，曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = 1$，$x = t\ (t > 1)$ で囲まれた図形の面積 W は,

$$W = -\int_1^t f(x)\,dx$$

ここで，$F(x)$ を $f(x)$ の不定積分とすると，$F'(x) = f(x)$ となり，

$$W = -\left[\,F(x)\,\right]_1^t = -F(t) + F(1) \cdots\cdots\cdots ③$$

また，W は，底辺の長さが $2t^2-2$，他の 2 辺の長さがそれぞれ t^2+1 の二等辺三角形の面積と等しいことから，

$$W = \frac{1}{2}(2t^2-2)\sqrt{(t^2+1)^2 - \left(\frac{2t^2-2}{2}\right)^2} = (t^2-1)\sqrt{(t^2+1)^2-(t^2-1)^2}$$
$$= 2t(t^2-1) = 2t^3-2t \cdots\cdots\cdots ④$$

③④より，$-F(t)+F(1) = 2t^3-2t$ となり，両辺を t で微分すると，

$$-f(t) = 6t^2-2,\quad f(t) = -6t^2+2$$

［解 説］

2 題構成の微積分の総合問題です。難しい計算はありませんが，問題量はやや多めです。なお，[1]の T については，台形の面積公式を利用しています。

第３問

問題のページへ

(1)　等差数列$\{a_n\}$の公差をdとおくと，$a_4=30$から，$a_1+3d=30$ ………①

$S_8=288$から，$\dfrac{8}{2}(a_1+a_1+7d)=288$となり，$2a_1+7d=72$ ………②

①②より，$a_1=-6$，$d=12$となり，$a_n=-6+12(n-1)=12n-18$

$$S_n=\frac{n}{2}(-6+12n-18)=6n^2-12n \text{ ………③}$$

(2)　等比数列$\{b_n\}$の公比を$r\,(r>1)$とおくと，$b_2=36$から，$b_1r=36$ ………④

$T_3=156$から，$b_1+b_1r+b_1r^2=156$ ………⑤

④⑤より，$\dfrac{36}{r}+36+36r=156$，$3r+\dfrac{3}{r}=10$となり，

$$3r^2-10r+3=0,\ (3r-1)(r-3)=0$$

$r>1$から$r=3$，$b_1=12$となり，$b_n=12\cdot 3^{n-1}=4\cdot 3^n$

$$T_n=\frac{12(3^n-1)}{3-1}=6(3^n-1) \text{ ………⑥}$$

(3)　$c_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(a_k-b_k)=n\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)+\sum_{k=1}^{n}(-k+1)(a_k-b_k)$に対し，階差数列$d_n=c_{n+1}-c_n$とすると，

$$\begin{aligned}
d_n&=(n+1)\sum_{k=1}^{n+1}(a_k-b_k)+\sum_{k=1}^{n+1}(-k+1)(a_k-b_k)\\
&\quad-n\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)-\sum_{k=1}^{n}(-k+1)(a_k-b_k)\\
&=n(a_{n+1}-b_{n+1})+\sum_{k=1}^{n+1}(a_k-b_k)+(-n-1+1)(a_{n+1}-b_{n+1})\\
&=\sum_{k=1}^{n+1}(a_k-b_k)=S_{n+1}-T_{n+1}
\end{aligned}$$

③⑥より，$d_n=6(n+1)^2-12(n+1)-6(3^{n+1}-1)=6n^2-2\cdot 3^{n+2}$

ここで，$c_1=a_1-b_1=-18$であるので，$n\geqq 2$において，

$$\begin{aligned}
c_n&=-18+\sum_{k=1}^{n-1}(6k^2-2\cdot 3^{k+2})=-18+6\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-\frac{2\cdot 3^3(3^{n-1}-1)}{3-1}\\
&=2n^3-3n^2+n+9-3^{n+2}
\end{aligned}$$

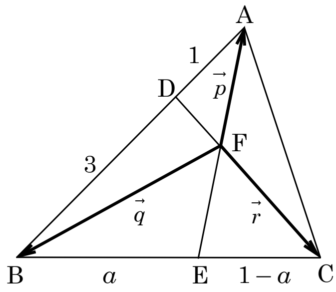
なお，上式は$n=1$のときも成立している。

［解　説］

数列の和についての問題です。数列$\{d_n\}$の一般項を求める箇所がポイントになります。解答例では，nをいったんシグマの前に出し，見通しをよくした後に計算を進めています。

第４問

問題のページへ



(1)　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FB}-\overrightarrow{FA}=\vec{q}-\vec{p}$ となり，

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　$AD:DB=1:3$ より，$\overrightarrow{FD}=\dfrac{3}{4}\vec{p}+\dfrac{1}{4}\vec{q}\cdots\cdots\cdots②$

(3)　$\overrightarrow{FD}=s\vec{r}$ とすると，②より，$s\vec{r}=\dfrac{3}{4}\vec{p}+\dfrac{1}{4}\vec{q}$ となり，

$$\vec{q}=-3\vec{p}+4s\vec{r}\cdots\cdots\cdots③$$

$\overrightarrow{FE}=t\vec{p}$ とすると，$BE:EC=a:1-a$ から，

$$t\vec{p}=(1-a)\vec{q}+a\vec{r},\ \vec{q}=\frac{t}{1-a}\vec{p}-\frac{a}{1-a}\vec{r}\cdots\cdots\cdots④$$

$\vec{p}$，$\vec{r}$ は１次独立なので，③④より，$\dfrac{t}{1-a}=-3$，$-\dfrac{a}{1-a}=4s$ となり，

$$s=\frac{-a}{4(1-a)},\ t=-3(1-a)\cdots\cdots\cdots⑤$$

(4)　$|\vec{p}|=1$ のとき，①より，$|\overrightarrow{AB}|^2=1-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2\cdots\cdots\cdots⑥$

また，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{FE}-\overrightarrow{FB}=t\vec{p}-\vec{q}$ なので，

$$|\overrightarrow{BE}|^2=t^2|\vec{p}|^2-2t\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2=t^2-2t\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$$

⑤を代入すると，$|\overrightarrow{BE}|^2=9(1-a)^2+6(1-a)\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2\cdots\cdots\cdots⑦$

ここで，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BE}|$ から，⑥⑦より，

$$1-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2=9(1-a)^2+6(1-a)\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$$

$$(6a-8)\vec{p}\cdot\vec{q}=9a^2-18a+8,\ 2(3a-4)\vec{p}\cdot\vec{q}=(3a-4)(3a-2)$$

すると，$0<a<1$ から，$\vec{p}\cdot\vec{q}=\dfrac{3a-2}{2}$ となる。

［解　説］

ベクトルの平面図形への応用問題です。本問も誘導が丁寧なので，それに従うと最後の設問まで流れていきます。

第５問

問題のページへ

(1) 2, 4, 6, …, $2a$ の数字が書かれた a 枚のカードの入っている箱から，1 枚のカードを無作為に取り出し，書かれた数字を表す確率変数を X とすると，

$$P(X=2a)=\frac{1}{a}$$

ここで，$a=5$ のとき，X の平均 $E(X)$，X の分散 $V(X)$ は，

$$E(X)=(2+4+6+8+10)\times\frac{1}{5}=6$$

$$V(X)=(2^2+4^2+6^2+8^2+10^2)\times\frac{1}{5}-6^2=44-36=8$$

また，s, t は定数で $s>0$ のとき，$E(sX+t)=20$，$V(sX+t)=32$ より，

$6s+t=20$ ………①，$8s^2=32$ ………②

①②から，$s=2$，$t=8$ となる。

さらに，$sX+t\geqq 20$ すなわち $2X+8\geqq 20$ であるのは，$X\geqq 6$ から，

$$P(2X+8\geqq 20)=P(X\geqq 6)=\frac{3}{5}=0.6$$

(2) $a\geqq 3$ のとき，(1)の箱から同時に取り出した 3 枚のカードを横 1 列に並べ，カードの数字が左から小さい順に並んでいる事象を A とすると，

$$P(A)=\frac{{}_a\mathrm{C}_3}{{}_a\mathrm{P}_3}=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$$

そして，この試行を 180 回繰り返し，事象 A が起こる回数を表す確率変数を Y とすると，Y は $B\left(180,\ \frac{1}{6}\right)$ に従い，Y の平均 m，Y の分散 σ^2 は，

$$m=180\times\frac{1}{6}=30,\quad \sigma^2=180\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=25$$

そして，試行回数 180 は大きいことから，Y は近似的に $N(30,\ 5^2)$ に従うと考えられ，$Z=\dfrac{Y-30}{5}$ とおくと，Z は $N(0,\ 1)$ に従い，正規分布表から，

$$P(18\leqq Y\leqq 36)=P(-2.40\leqq Z\leqq 1.20)=0.4918+0.3849\fallingdotseq 0.88$$

(3) ある都市で，無作為に選んだ 400 人の有権者について，320 人が賛成であったとき，賛成者の標本比率 R は，

$$R=\frac{320}{400}=0.8$$

そして，標本の大きさ n が 400 と大きいので，二項分布の正規分布による近似を用いると，R は $N\left(p,\ \dfrac{p(1-p)}{400}\right)$ に従う。

ここで，母比率 p に対する信頼度 95%の信頼区間は，

$$R-1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{400}}\leqq p\leqq R+1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{400}}$$

そこで，$p=R$ として，$\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{400}}=\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{400}}=\sqrt{\dfrac{0.8\times0.2}{400}}=0.02$ より，

$$0.8-1.96\times0.02 \leqq p \leqq 0.8+1.96\times0.02$$

$0.8-1.96\times0.02 \fallingdotseq 0.76$，$0.8+1.96\times0.02 \fallingdotseq 0.84$ から，$0.76 \leqq p \leqq 0.84$ となる。

このとき信頼区間の幅 L_1 は，$L_1=2\times1.96\times0.02$

また，$n=400$，$R=0.6$ のとき，$L_2=2\times1.96\times\sqrt{\dfrac{0.6\times0.4}{400}}>L_1$

さらに，$n=500$，$R=0.8$ のとき，$L_3=2\times1.96\times\sqrt{\dfrac{0.8\times0.2}{500}}<L_1$

以上より，$L_3<L_1<L_2$ である。

［解 説］

確率分布と母比率の推定についての基本事項の確認問題です。既習であれば，3 題の選択題のうち，最も取り組みやすいでしょう。