第１問

[1] (1) 「1 のみを要素としてもつ集合が集合 A の部分集合」であることは，$C=\{1\}$ とおくと，$C\subset A$ と表される。

(2) 命題「$x\in B$，$y\in B$ ならば，$x+y\in B$ である」が偽であることを示すための反例は，「$x\in B$ かつ $y\in B$ かつ $x+y\notin B$」から探すと，$(x,\ y)=(3-\sqrt{3},\ \sqrt{3}-1)$，$(\sqrt{8},\ 1-2\sqrt{2})$ となる。

[2] (1) $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標が，方程式 $f(x)=0$ の解を表すので，図 1 から，方程式 $f(x)=0$ は異なる 2 つの負の解をもつ。

(2) $f(x)=a(x-p)^2+q$ に対し，「不等式 $f(x)>0$ の解がすべての実数となる条件」は，$y=f(x)$ のグラフが下に凸で，しかも頂点の y 座標が正の場合である。すなわち，図 1 の状態から q の値を変化させるのが必須となり，操作 A, P, Q から選ぶと，「a, p の値は変えず, q の値だけを変化させる」操作 Q だけとなる。

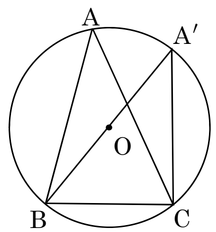
次に，「不等式 $f(x)>0$ の解がない条件」は，$y=f(x)$ のグラフが上に凸で，しかも頂点の y 座標が負の場合である。すなわち，図 1 の状態から a の値を変化させるのが必須となり，操作 A, P, Q から選ぶと，「p, q の値は変えず, a の値だけを変化させる」操作 A だけとなる。

[3] 傾斜が 33° のとき，26cm 以上の踏面 $x$cm に対し，18cm 以下の蹴上げは $x\tan 33°$ となることより，

$$x\geqq 26 \quad かつ \quad x\tan 33° \leqq 18$$

まとめると，$26\leqq x\leqq \dfrac{18}{\tan 33°}$ である。

[4] (1) 三角形 ABC が鋭角三角形のとき，直線 BO と円 O の交点のうち点 B と異なる点を A′ とすると，

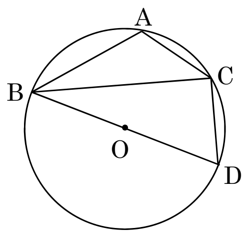


$$\mathrm{A'B}=2R,\ \angle \mathrm{A'CB}=90°$$

すると，$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin\angle \mathrm{CA'B}}=2R$ となり，$\angle\mathrm{CAB}=\angle\mathrm{CA'B}$ から，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{CAB}}=2R,\ \frac{a}{\sin A}=2R$$

(2) 三角形 ABC が鈍角三角形のとき，線分 BD が円 O の直径となるようにとると，$\mathrm{BD}=2R$，$\angle\mathrm{BCD}=90°$ となり，



$$\sin\angle\mathrm{BDC}=\frac{a}{2R}$$

ここで，四角形 ABDC は円 O に内接するので，

$$\angle\mathrm{CAB}=180°-\angle\mathrm{BDC}$$

これより，$\sin\angle\mathrm{CAB}=\sin(180°-\angle\mathrm{BDC})=\sin\angle\mathrm{BDC}$ となり，

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \frac{a}{\sin A}=2R$$

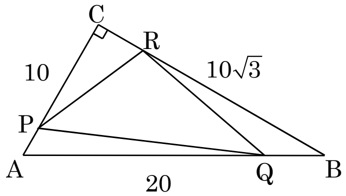
［コメント］

スタイルが昨年とは変わり，小問集合のような形になりました。[1]は集合と命題に関する設問。$A \cap B = \varnothing$ という記述が気になり，最初の設問を考え過ぎて……。[2]は 2 次関数のグラフと方程式・不等式の関係で，基本的です。[3]は三角比の定義が題材ですが，問題文の読解力が最大のポイント。内容を味わっていると……。[4]は正弦定理の証明で，教科書に掲載されているものです。

第２問

[1] (1) 右図の直角三角形 ABC において，

$AB=20$，$AC=10$，$BC=10\sqrt{3}$



条件より，点 P, Q, R は同時に移動を開始し，点 P は点 A から毎秒 1 の速さで AC 上，点 Q は点 B から毎秒 2 の速さで BA 上，点 R は点 C から毎秒 $\sqrt{3}$ の速さで CB 上を移動し，10 秒後に移動を終了する。

(i) 移動を開始して 2 秒後には，$AP=2$，$AQ=20-2\times2=16$ となり，

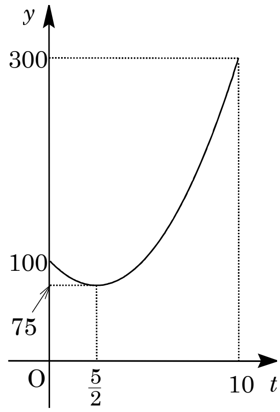
$$PQ^2=2^2+16^2-2\cdot2\cdot16\cos60^\circ=228,\ PQ=2\sqrt{57}$$

また，△APQ の面積 S は，$S=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot16\sin60^\circ=8\sqrt{3}$

(ii) 移動を開始して t 秒後 $(0\leqq t\leqq10)$ には，$CP=10-t$，$CR=\sqrt{3}t$ より，

$$PR^2=(10-t)^2+(\sqrt{3}t)^2=4t^2-20t+100$$
$$=4\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+75$$

$y=4\left(t-\dfrac{5}{2}\right)^2+75$ のグラフは右図のようになる。



すると，とり得ない y の範囲は $y<75$, $300<y$，1 回だけとり得る y の範囲は $y=75$, $100<y\leqq300$，2 回だけとり得る y の範囲は $75<y\leqq100$ である。

これより，PR のとり得ない値は $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$，1 回だけとり得る値は $\sqrt{75}=5\sqrt{3}$，$\sqrt{300}=10\sqrt{3}$，2 回だけとり得る値は $\sqrt{80}=4\sqrt{5}$，$\sqrt{100}=10$ となる。

(iii) △APQ, △BQR, △CRP の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とおき，△ABC の面積を T として，移動を開始して t 秒後 $(0\leqq t\leqq10)$ には，

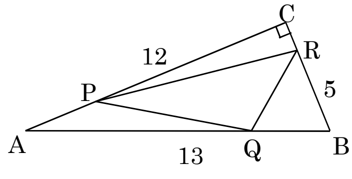
$$AP:PC=t:10-t,\ BQ:QA=t:10-t,\ CR:RB=t:10-t$$

これより，$\dfrac{S_1}{T}=\dfrac{S_2}{T}=\dfrac{S_3}{T}=\dfrac{t(10-t)}{100}$ となる。

よって，どんな時刻においても $S_1=S_2=S_3$ である。

(2) 右図の直角三角形 ABC において，

$AB=13$，$AC=12$，$BC=5$



移動を開始して t 秒後 $(0\leqq t\leqq12)$ には，S_1，S_2，S_3 は，(1)と同様に考えると，$T=30$ から，

$$S_1=S_2=S_3=\frac{t}{12}\cdot\frac{12-t}{12}T=\frac{5}{24}t(12-t)$$

すると，△PQR の面積 U は，$U=T-\dfrac{5}{24}t(12-t)\cdot3=30-\dfrac{5}{8}t(12-t)$

条件より，$U=12$ なので，$30-\dfrac{5}{8}t(12-t)=12$ となり，

$$5t(12-t)=144\ ,\ 5t^2-60t+144=0$$

よって，$t=\dfrac{30\pm6\sqrt{5}}{5}$ となり，この値はともに $0\leqq t\leqq12$ を満たしている。

[2] (1) x の平均値を $\overline{x}$，標準偏差を s_x とおくと，$\overline{x}=\dfrac{1}{2}(1+2)=1.5$

$$s_x{}^2=\frac{1}{2}\{(1-1.5)^2+(2-1.5)^2\}=0.25\ ,\ \ s_x=\sqrt{0.25}=0.5$$

同様にして，$\overline{y}=1.5$，$s_y=0.5$ となり，x と y の共分散 s_{xy} は，

$$s_{xy}=\frac{1}{2}\{(1-1.5)(2-1.5)+(2-1.5)(1-1.5)\}=-0.25$$

これより，相関係数 r は，$r=\dfrac{-0.25}{0.5\times0.5}=-1$ となる。

(2) $(x,\ y)=(1,\ 2),\ (2,\ 2)$ のとき，$\overline{y}=2$，$s_y=0$ となるため，r は計算できない。

(3) 値の組を散布図に表して考えると，次のように判断できる。

⓪ 値の組の個数が 2 のとき，$s_x\neq0$ かつ $s_y\neq0$ であれば $r=1$ または $r=-1$ となるので，$r=0$ になることはない。

① 値の組 3 個が $(x,\ y)=(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$ のとき $r=-1$ となる。

② 値の組 4 個が $(x,\ y)=(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4)$ のとき $r=1$ となる。

③ 値の組 $(x,\ y)=(1,\ 1)$ が 1 個で $(x,\ y)=(2,\ 0)$ が 49 個のとき $r=-1$ となる。

④ 値の組 $(x,\ y)=(1,\ 1)$ が 50 個で $(x,\ y)=(2,\ 2)$ が 50 個のとき $r=1$ となる。

したがって，誤っているものは②である。

(4) 相関係数 r の値 $(-1\leqq r\leqq1)$ は散布図の点が「直線に沿って分布する」程度を表す。

そのため，値の組の個数が 2 のときは，「平面上の異なる 2 点は必ずある直線上にある」ため，(3)の⓪のように r の値は 1 または -1 または値なしのいずれかになる。

［コメント］

[1]は 2 次関数に関する応用問題。ときどき見かける内容ですが，同時に頂点を出発し，同時に隣りの頂点に到着することから，速さを決定する点がポイントです。面積については，解答例では内分比に注目して処理していますが，実際に求めても構いません。[2]はデータの分析に関する問題で，ほとんどが定性的な内容です。ただ，(3)では設問の後の会話文に誘導が与えられているのは要注意です。

第３問

(1) 100 本ずつのくじが入っている 2 つの箱 A, B があり，2 人の人が順に，どちらかの箱を選んで，もとに戻さずに引く。1 番目の人がくじを引いた箱が A, B である事象をそれぞれ A, B とし，1 番目の人が当たりくじを引く事象を W とおく。なお，$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$ とする。

まず，箱 A には 10 本，箱 B には 5 本の当たりくじが入っている場合を考えると，$P_A(W)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$，$P_B(W)=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$ となり，

$$P(A\cap W)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{20},\ P(B\cap W)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{20}=\frac{1}{40}$$

これより，$P(W)=\frac{1}{20}+\frac{1}{40}=\frac{3}{40}$ である。

すると，1 番目が当たりくじを引いたという条件の下で，その箱が A, B である条件付き確率は，それぞれ $P_W(A)=\frac{1}{20}\cdot\frac{40}{3}=\frac{2}{3}$，$P_W(B)=\frac{1}{40}\cdot\frac{40}{3}=\frac{1}{3}$ となる。

(i) 1 番目が当たりくじを引いた後，2 番目が同じ箱を選び当たりくじを引く確率

$$P_W(A)\times\frac{9}{99}+P_W(B)\times\frac{4}{99}=\frac{2}{3}\times\frac{9}{99}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{99}=\frac{2}{27}$$

(ii) 1 番目が当たりくじを引いた後, 2 番目が異なる箱を選び当たりくじを引く確率

$$P_W(A)\times\frac{5}{100}+P_W(B)\times\frac{10}{100}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{20}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{20}=\frac{1}{15}$$

(2) 次に，箱 A には 10 本，箱 B には 7 本の当たりくじが入っている場合を考えると，$P_A(W)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$，$P_B(W)=\frac{7}{100}$ となり，

$$P(A\cap W)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{20},\ P(B\cap W)=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{100}=\frac{7}{200}$$

これより，$P(W)=\frac{1}{20}+\frac{7}{200}=\frac{17}{200}$ であり，

$$P_W(A)=\frac{1}{20}\cdot\frac{200}{17}=\frac{10}{17},\ P_W(B)=\frac{7}{200}\cdot\frac{200}{17}=\frac{7}{17}$$

(i) 1 番目が当たりくじを引いた後，2 番目が同じ箱を選び当たりくじを引く確率

$$P_W(A)\times\frac{9}{99}+P_W(B)\times\frac{6}{99}=\frac{10}{17}\times\frac{9}{99}+\frac{7}{17}\times\frac{6}{99}=\frac{4}{51}$$

(ii) 1 番目が当たりくじを引いた後, 2 番目が異なる箱を選び当たりくじを引く確率

$$P_W(A)\times\frac{7}{100}+P_W(B)\times\frac{10}{100}=\frac{10}{17}\times\frac{7}{100}+\frac{7}{17}\times\frac{10}{100}=\frac{7}{85}$$

(3) さらに，箱 A には 10 本，箱 B には 6 本の当たりくじが入っている場合を考えると，$P_A(W)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$，$P_B(W)=\frac{6}{100}=\frac{3}{50}$ となり，

$$P(A\cap W)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{20},\ P(B\cap W)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{50}=\frac{3}{100}$$

これより，$P(W)=\frac{1}{20}+\frac{3}{100}=\frac{2}{25}$ であり，

$$P_W(A)=\frac{1}{20}\cdot\frac{25}{2}=\frac{5}{8},\ \ P_W(B)=\frac{3}{100}\cdot\frac{25}{2}=\frac{3}{8}$$

(i) 1 番目が当たりくじを引いた後, 2 番目が同じ箱を選び当たりくじを引く確率

$$P_W(A)\times\frac{9}{99}+P_W(B)\times\frac{5}{99}=\frac{5}{8}\times\frac{9}{99}+\frac{3}{8}\times\frac{5}{99}=\frac{5}{66}$$

(ii) 1 番目が当たりくじを引いた後, 2 番目が異なる箱を選び当たりくじを引く確率

$$P_W(A)\times\frac{6}{100}+P_W(B)\times\frac{10}{100}=\frac{5}{8}\times\frac{6}{100}+\frac{3}{8}\times\frac{10}{100}=\frac{3}{40}$$

まとめると, 2 番目が当たりの確率を大きくするには, 箱 B に入っている当たりくじの本数が 5 本のときは同じ箱, 6 本のときも同じ箱, 7 本のときは異なる箱を選べばよい。すると, 正しい組合せは1である。

［コメント］

興味深い確率の問題ですが, ボリュームがかなりのものとなっています。この点も考えると, この問題では, 会話文は読み飛ばすというのが肝要でしょう。なお, (3)に関しては選択肢をみて, 一般的にではなく, 具体的に当たりが 6 本の場合を計算しています。

第４問

(1) 天秤ばかりの皿 A に M g の物体 X と 8g の分銅 1 個をのせ，皿 B に 3g の分銅 5 個をのせると釣り合ったことより，，

$$M+8\times1=3\times5,\ M=7$$

(2) $M=1$ のとき，皿 B に 3g の分銅 3 個をのせ，皿 A に 1g の物体 X と 8g の分銅 1 個のせると，$1+8\times1=3\times3$ ……①となり，天秤ばかりは釣り合う。

ここで，①の両辺を M 倍すると，$M+8\times M=3\times3M$ となり，M がどのような自然数であっても，皿 A に M g の物体 X と 8g の分銅 M 個をのせ，皿 B に 3g の分銅 $3M$ 個をのせると釣り合う。

(3) $M=20$ のとき，皿 A に 20g の物体 X と 8g の分銅 p 個をのせ，皿 B に 3g の分銅 q 個をのせると釣り合ったことより，$20+3p=8q$ ……②が成り立つ。

②を満たす自然数 $(p,\ q)$ の組で p の値が最小のものは $(p,\ q)=(4,\ 4)$ であり，

$$20+3\times4=8\times4,\ 3\times(-4)+8\times4=20\ \cdots\cdots\cdots③$$

すると，方程式 $3x+8y=20$ ……④を満たすすべての整数解は，③から，

$$3(x+4)+8(y-4)=0,\ 3(x+4)=-8(y-4)$$

3 と 8 は互いに素なので，④の解は整数 n を用いて，

$$(x+4,\ y-4)=(8n,\ -3n),\ (x,\ y)=(-4+8n,\ 4-3n)$$

(4) $M=7$ のとき，皿 A，皿 B に 7g の物体 X と 2 種類の分銅をのせて釣り合ったとすると，x，y を整数として以下の方程式が成り立つ。

⓪ 3g と 14g ： $3x+14y=7$　　① 3g と 21g ： $3x+21y=7$

② 8g と 14g ： $8x+14y=7$　　③ 8g と 21g ： $8x+21y=7$

すると，$3x+14y=7$ は $(x,\ y)=(7,\ -1)$，$8x+21y=7$ は $(x,\ y)=(-7,\ 3)$ で満たされる。ところが，$3x+21y=7$ の左辺は 3 の倍数，$8x+21y=7$ の左辺は 2 の倍数なので，方程式を満たす $(x,\ y)$ は存在しない。

これより，天秤ばかりが釣り合わないのは①と②である。

(5) 皿 A に M g の物体 X，皿 B に 3g の分銅 x 個，8g の分銅 y 個をのせると釣り合ったとする。ただし，x，y は 0 以上の整数である。このとき，

$$M=3x+8y\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

(i) $y=0$ のとき　$M=3x$ となり，M は 0 以上の 3 の倍数すべてを表す。

(ii) $y=1$ のとき　$M=3x+8=3(x+2)+2$ となり，M は 8 以上で 3 で割ると 2 余るすべての数を表す。

(iii) $y=2$ のとき　$M=3x+16=3(x+5)+1$ となり，M は 16 以上で 3 で割ると 1 余るすべての数を表す。

(i)(ii)(iii)より，⑤を満たす M は 16 以上のすべての自然数を表すことができる。

よって，15 以下の自然数で⑤を満たさない M は，$M=1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 10,\ 13$ となり，その個数は 7，また最大数は 13 である。

同様に考えると，0 以上の整数 x, y に対し，$N=3x+2018y$ ……⑥については，

(iv) $y=0$ のとき　$N=3x$ となり，N は 0 以上の 3 の倍数すべてを表す。

(v) $y=1$ のとき　$N=3x+2018=3(x+672)+2$ となり，N は 2018 以上で 3 で割ると 2 余るすべての数を表す。

(vi) $y=2$ のとき　$N=3x+4036=3(x+1345)+1$ となり，N は 4036 以上で 3 で割ると 1 余るすべての数を表す。

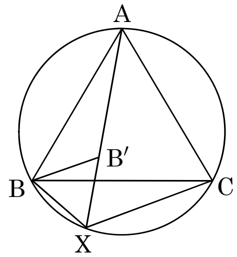
(iv)(v)(vi)より，⑥を満たす N は 4036 以上のすべての自然数を表すことができる。

よって，⑥を満たさない N の最大値は，4035 以下の自然数で，3 で割ると 1 余る最大な数より，$4036-3=4033$ となる。

［コメント］

整数の応用問題です。同じような設問が続くので，ミスをしないように粘り強く取り組む必要があります。(4)では，丁寧に記すと長くなるので，立式説明は簡略にしました。また，(5)については，ここでも誘導が設問の後に与えられている点に要注意です。なお，この設問はそれなりに有名で，たとえば 2000 年の阪大・理系で類題が出題されています。誘導はなしですが。

第５問



(1) 正三角形 ABC の外接円の弧 BC 上に点 X があるとき，線分 AX 上に $BX=B'X$ となる点 B' をとると，

$AX=AB'+B'X=AB'+BX$ ………①

ここで，$\triangle ABB'$ と $\triangle CBX$ において，

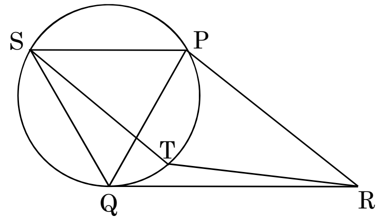
$\angle BAB'=\angle BCX$，$AB=CB$

また，$\triangle XB'B$ は正三角形より，$\angle XBB'=60^\circ$ となり，

$\angle ABC-\angle B'BC=\angle XBB'-\angle B'BC$，$\angle ABB'=\angle CBX$

よって，$\triangle ABB'$ と $\triangle CBX$ は合同になり，$AB'=CX$ ………②

①②より，$AX=BX+CX$ ………③



(2) 辺 QR を最大辺とする△PQR について，右図のように辺 PQ を 1 辺とする正三角形 PQS, およびその外接円を描く。

ここで，弧 PQ 上に点 T をとると，③から，

$PT+QT=ST$，$PT+QT+RT=ST+RT$

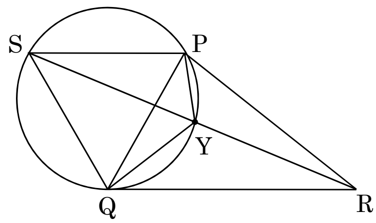
これより，点 Y が弧 PQ 上にあるとき，

$PY+QY+RY=SY+RY$ ………④

また，点 Y が弧 PQ 上にないときには，与えられた定理より，

$PY+QY+RY>SY+RY$ ………⑤

④⑤から，$PY+QY+RY\geqq SY+RY$ となり，等号が成立するのは，点 Y が弧 PQ 上にあるときである。

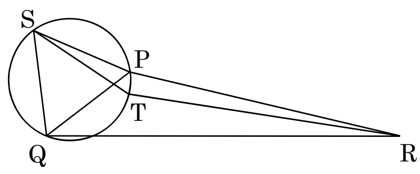


このとき，$SY+RY\geqq SR$ から $PY+QY+RY$ が最小になる点 Y の位置は，右図のように，点 R と点 S を通る直線と弧 PQ の交点となる。

ここで，$\angle SYP=\angle SYQ=60^\circ$ に着目すると，この点 Y の位置について，次式が成り立つ。

$\angle PYR=\angle QYP=\angle RYQ=120^\circ$

なお，$\angle QPR>180^\circ-60^\circ=120^\circ$ のときは，直線 RS と弧 PQ は交わらないので，上記の点 Y の位置は $\angle QPR\leqq 120^\circ$ の場合に対応する。



さて，右図のような $\angle QPR>120^\circ$ の場合について，同様に考えると，$PY+QY+RY$ が最小となる点 Y は点 P に一致することがわかる。

すなわち，点 Y は，△PQR の 3 つの辺のうち，最も長い辺を除く 2 つの辺の交点である。

［コメント］

平面図形の計量問題です。有名な題材ですので，経験があれば，最後の設問も含めて完答は可能です。なお，(1)の証明は問題文ではスキップされていましたが，解答例では記述しておきました。