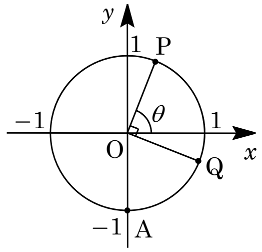
第１問

[1] (1) 右図のように，線分 OP と x 軸の正の部分とのなす角を $\theta\ (0<\theta<\pi)$ とすると，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ である。



また，$\angle\mathrm{POQ}=\dfrac{\pi}{2}$ なので，

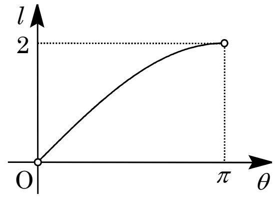
$$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\theta,\ \sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\theta$$

これより，$\mathrm{Q}(\sin\theta,\ -\cos\theta)$ である。

(2) $\mathrm{A}(0,\ -1)$ に対し，$\mathrm{AQ}^2=(-\sin\theta)^2+(-1+\cos\theta)^2=2-2\cos\theta$ より，

$$l=\mathrm{AQ}=\sqrt{2-2\cos\theta}=\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}=2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

$0<\theta<\pi$ から，$l=2\sin\dfrac{\theta}{2}$ となり，そのグラフは右図のようになる。



[2] (1) 3 次関数 $f(x)$ は，$x=-1$ で極小値，$x=3$ で極大値をとるので，その導関数 $f'(x)$ は $(x+1)(x-3)$ で割り切れる 2 次関数である。

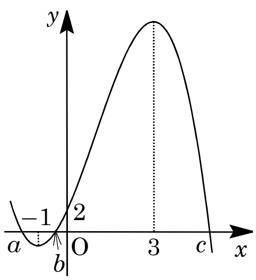
(2) (1)より，$a<0$ として，$f'(x)=a(x+1)(x-3)$ と表せるので，

$$f(x)=a\int(x+1)(x-3)\,dx=a\int(x^2-2x-3)\,dx=\frac{a}{3}x^3-ax^2-3ax+C$$

条件より，$f(-1)=-\dfrac{a}{3}-a+3a+C=-\dfrac{4}{3}$，$f(0)=C=2$

すると，$a=-2$ となり $a<0$ を満たすので，

$$f(x)=-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x+2$$



(3) 方程式 $f(x)=0$ は，$f(-1)<0$，$f(3)>f(0)>0$ より 3 つの実数解をもち，そのうち負の解は 2 個である。

そして，この解を $a,\ b,\ c\ (a<b<c)$ とし，曲線 $y=f(x)$ と x 軸に囲まれた図形のうち，$a\leqq x\leqq b$，$b\leqq x\leqq c$ の部分の面積をそれぞれ $S,\ T$ とおくと，

$$S=-\int_a^b f(x)\,dx,\ T=\int_b^c f(x)\,dx$$

すると，$\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=-S+T$ である。

[3] (1) $\log_{10}2=0.3010$ とすると，$10^{0.3010}=2$ となる。

また，$\log_2 10=\dfrac{1}{\log_{10}2}=\dfrac{1}{0.3010}$ より，$2^{\frac{1}{0.3010}}=10$ である。

(2) (i) 「対数ものさし A」において，3 と 4 の目盛りの間隔を $D_{3,\,4}$，1 と 2 の目盛りの間隔を $D_{1,\,2}$ とおくと，

$$D_{3,\,4}=\log_{10}4-\log_{10}3=\log_{10}\frac{4}{3},\ \ D_{1,\,2}=\log_{10}2$$

よって，$D_{3,\,4}<D_{1,\,2}$ である。

(ii) 「対数ものさし A」と「対数ものさし B」を組み合わせ，目盛り 2 と 1，a と b を対応させ，同様にすると，$D_{2,\,a}=D_{1,\,b}$ より，

$$\log_{10}a-\log_{10}2=\log_{10}b\ ,\ \ \log_{10}\frac{a}{2}=\log_{10}b$$

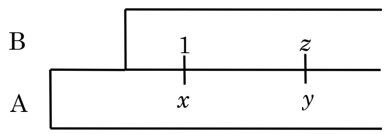
よって，$\dfrac{a}{2}=b$ すなわち $a=2b$ となる。

(iii) 「対数ものさし A」と「ものさし C」を組み合わせ，目盛り 1 と 0，d と c を対応させ，同様にすると，$D_{1,\,d}=D_{0,\,c}$ より，

$$\log_{10}d=c\log_{10}2\ ,\ \ \log_{10}d=\log_{10}2^c$$

よって，$d=2^c$ となる。

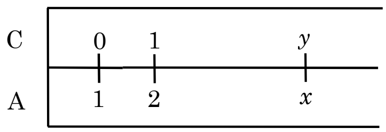
(iv) まず，右図のように「対数ものさし A」と「対数ものさし B」を組み合わせると，



$$\log_{10}\frac{y}{x}=\log_{10}z$$

$y=xz$ より $(x,\ z)=(13,\ 4)$ のとき $y=13\times4$ となり，また $\dfrac{y}{x}=z$ より $(x,\ y)=(9,\ 63)$ のとき $z=63\div9$ となる。

また，右図のように「対数ものさし A」と「ものさし C」を組み合わせると，



$$\log_{10}x=\log_{10}2^y$$

$x=2^y$ より $y=4$ のとき $x=2^4$ となり，また $y=\log_2 x$ より $x=64$ のとき $y=\log_2 64$ となる。

また, A と B, A と C の「ものさし」を組み合わせても，和と差は計算できないことより，実行できるものは②と③と④と⑤である。

［コメント］

小問集合の形式です。[1]は三角関数についての基本題。[2]は微積分の基本題で計算も軽め。[3]は計算尺を題材にした対数計算。いつか出題されると予想していたのですが。なお，最後の設問の和と差についてはアバウトな記述で……。

第２問

[1] 1袋100gの食品Aは袋あたり200kcalで脂質4g，1袋100gの食品Bは袋あたり300kcalで脂質2gである。食品Aをx袋，食品Bをy袋食べたとする。

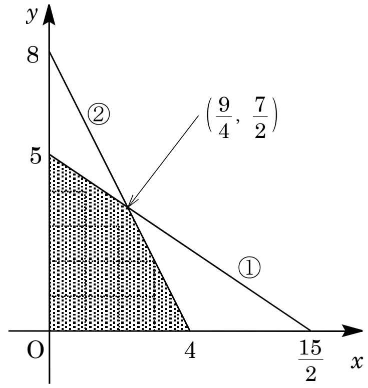
(1) (i) まず，エネルギーについては，条件より，

$200x+300y\leqq 1500$，$2x+3y\leqq 15$ ………①

また，脂質については，条件より，

$4x+2y\leqq 16$，$2x+y\leqq 8$ ………②

①②の境界線の交点は$(x,\ y)=\left(\dfrac{9}{4},\ \dfrac{7}{2}\right)$となり，①②の連立不等式の表す領域を図示すると，右図の網点部となる。境界は領域に含む。



(ii) 題意を満たすものは，①「$(x,\ y)=(5,\ 0)$は条件①を満たすが条件②を満たさない」，および③「$(x,\ y)=(3,\ 2)$は条件①と条件②をともに満たす」である。

(iii) 食品 A，B の食べる量の合計をkgとおくと，$100x+100y=k$ ……③となり，この直線③が右上図の領域と共有点をもつkの最大値を求める。

まず，小分けができる，すなわちとり得る値が実数の場合は，③が傾き-1であることに着目すると，$(x,\ y)=\left(\dfrac{9}{4},\ \dfrac{7}{2}\right)$を通るときである。そして$k$の最大値は$100\times\dfrac{9}{4}+100\times\dfrac{7}{2}=575$ g である。

また，小分けができない，すなわち$(x,\ y)$のとり得る値が整数の場合は，同様に考えると，③が$(x,\ y)=(3,\ 2)$，$(2,\ 3)$，$(1,\ 4)$，$(0,\ 5)$を通るときであり，4通りの場合がある。そしてkの最大値は$100\times 3+100\times 2=500$ g である。

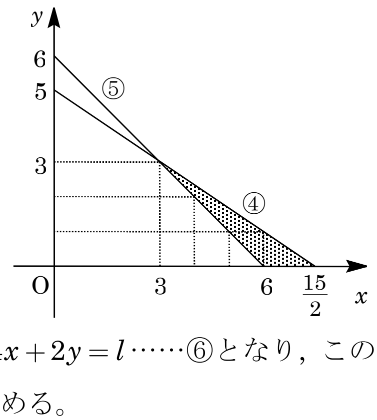
(2) まず，エネルギーについては，条件より，

$200x+300y\leqq 1500$，$2x+3y\leqq 15$ ………④

また，食べる量については，条件より，

$100x+100y\geqq 600$，$x+y\geqq 6$ ………⑤

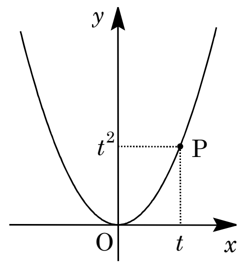
④⑤の境界線の交点は$(x,\ y)=(3,\ 3)$となり，④⑤の連立不等式の表す領域を図示すると，右図の網点部となる。境界は領域に含む。



ここで，食品 A，B の脂質の合計をlgとおくと，$4x+2y=l$ ……⑥となり，この直線⑥が右上図の領域と共有点をもつlの最小値を求める。

$(x,\ y)$のとり得る値が整数の場合 ⑥が傾き-2であることに着目すると，③が$(x,\ y)=(3,\ 3)$のときlは最小，そして最小値は$4\times 3+2\times 3=18$ g である。

[2] (1) 点 A と放物線上の点 $P(t,\ t^2)$，および線分 AP の中点 $M(x,\ y)$ に対し，点 M の軌跡を求める。



(i) $A(0,\ -2)$ のとき $x=\dfrac{t}{2}$，$y=\dfrac{t^2-2}{2}$ から，

$$y=\frac{4x^2-2}{2}=2x^2-1\cdots\cdots\cdots①$$

これより，点 M は放物線①を描く。

(ii) $A(p,\ -2)$ のとき $x=\dfrac{t+p}{2}$，$y=\dfrac{t^2-2}{2}$ から，

$$y=\frac{(2x-p)^2-2}{2}=2\Big(x-\frac{p}{2}\Big)^2-1$$

点 M の軌跡は，放物線①を x 軸方向に $\dfrac{1}{2}p$ だけ平行移動したものである。

(iii) $A(p,\ q)$ のとき $x=\dfrac{t+p}{2}$，$y=\dfrac{t^2+q}{2}$

$$y=\frac{(2x-p)^2+q}{2}=2\Big(x-\frac{p}{2}\Big)^2+\frac{q}{2}=2x^2-2px+\frac{p^2+q}{2}\cdots\cdots\cdots②$$

これより，点 M は放物線②を描き，放物線 $y=x^2$ ……③と連立すると，

$$2x^2-2px+\frac{p^2+q}{2}=x^2,\quad x^2-2px+\frac{p^2+q}{2}=0\cdots\cdots\cdots④$$

すると，④の判別式は，$D/4=p^2-\dfrac{p^2+q}{2}=\dfrac{p^2-q}{2}$ となる。

$q=0$ のとき，$D/4\geqq 0$ から，①「共有点が 1 個になるのは $p=0$ のときだけ」

$q=p^2$ のとき，$D/4=0$ から，④「共有点はつねに 1 個」

$q>p^2$ のとき，$D/4<0$ から，⑤「共有点はつねに 0 個」

(2) 円 C の中心を C，半径を r とする。

このとき，円 C 上を動く点 Q と，点 O または点 A_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ を結ぶ線分 OQ または A_iQ の中点の軌跡は，(1)と同様に考えると，線分 OC または A_iC の中点を中心とし，半径が $\dfrac{1}{2}r$ の円である。

与えられた中点の軌跡は，すべて半径 2 の円なので，円 C の半径は 4 であり，中心の位置を考え合わせると，円 C の方程式は $x^2+y^2=16$ である。

［コメント］

[1]は線形計画法の有名題。図を正確に書くのに時間がかかります。[2]は軌跡の問題。(2)では円 C をパラメータ表示し，$(x,\ y)=(a+r\cos\theta,\ b+r\sin\theta)$ として考えても OK です。

第３問

(1) P 大学生のうち全く読書をしない学生の母比率 p を $p=0.5$ とする。

標本 $n=400$ のうち全く読書をしない学生数の平均は,

$$np=400\times0.5=200$$

また, 全く読書をしない学生の比率 R の分布を正規分布で近似すると,

$$E(R)=0.5,\ \sigma(R)=\sqrt{\frac{0.5\times(1-0.5)}{400}}=\frac{0.5}{20}=0.025$$

よって, R は $N(0.5,\ 0.025^2)$ に従う。

(2) P 大学生の読書時間の母平均 m を $m=24$ 分, 母標準偏差を σ 分とする。

(i) 標本 $n=400$ に対し, 読書時間の標本平均 $\overline{X}$ の分布を正規分布で近似すると,

$$E(\overline{X})=24,\ \sigma(\overline{X})=\sqrt{\frac{\sigma^2}{400}}=\frac{\sigma}{20}$$

よって, $\overline{X}$ は $N\left(24,\ \dfrac{\sigma^2}{400}\right)$ に従う。

(ii) $\sigma=40$ のとき, $\overline{X}$ は $N(24,\ 2^2)$ に従うので, $Z=\dfrac{\overline{X}-24}{2}$ とおくと, Z は $N(0,\ 1)$ に従う。

ここで, $\overline{X}\geqq30$ は $Z\geqq3$ に対応するので, その確率は, 正規分布表から,

$$0.5-0.4987=0.0013$$

また, 確率が 0.1587 となるのは, $0.5-0.1587=0.3413$ から,

$$Z=\frac{\overline{X}-24}{2}\geqq1 \text{ または } Z=\frac{\overline{X}-24}{2}\leqq-1$$

これより, $\overline{X}\geqq26$ または $\overline{X}\leqq22$ のいずれかとなり, ⓪～⑤より選ぶと,

④「標本 400 人の読書時間の平均が 26 分以上」

(3) (i) P 大学生の読書時間の標本平均 $\overline{X}$ と母標準偏差 σ を用いて, 母平均 m を推定するとき, 信頼度 95％の信頼区間は, (2)(i)より,

$$\overline{X}-1.96\times\frac{\sigma}{20}\leqq m\leqq\overline{X}+1.96\times\frac{\sigma}{20}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

(ii) 母平均 m に対する(*)の意味とは, ④「大きさ 400 の標本を 100 回無作為抽出すれば, そのうち 95 回程度は信頼区間が m を含んでいる」ことである。

［コメント］

推測統計の基本題です。ただ, この分野が選択題の最初に設定されたことについては, あまり記憶がありません。

第４問

(1) $a_1=6$，$a_{n+1}=3a_n-8$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$………①

①を $a_{n+1}-k=3(a_n-k)$ と変形すると，$a_{n+1}=3a_n-2k$ となり，

$2k=8$，$k=4$

すると，$a_{n+1}-4=3(a_n-4)$ より，$a_n-4=(a_1-4)\cdot 3^{n-1}=2\cdot 3^{n-1}$

よって，$a_n=2\cdot 3^{n-1}+4$ ………②

(2) $b_1=4$，$b_{n+1}=3b_n-8n+6$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$………③

$p_n=b_{n+1}-b_n$ とおくと，$p_1=b_2-b_1=(3\cdot4-8\cdot1+6)-4=6$ となり，

$$p_{n+1}=b_{n+2}-b_{n+1}=3b_{n+1}-8(n+1)+6-(3b_n-8n+6)$$
$$=3(b_{n+1}-b_n)-8=3p_n-8$$

①②より，$p_n=2\cdot 3^{n-1}+4$ となる。

(3) ③を $b_{n+1}+s(n+1)+t=3(b_n+sn+t)$ と変形すると，$b_{n+1}=3b_n+2sn-s+2t$

$2s=-8$，$-s+2t=6$

これより，$(s,\ t)=(-4,\ 1)$ である。

(4) (3)から，$b_{n+1}-4(n+1)+1=3(b_n-4n+1)$ となり，

$b_n-4n+1=(b_1-4\cdot1+1)\cdot 3^{n-1}=3^{n-1}$

よって，$b_n=3^{n-1}+4n-1$ である。

(5) $c_1=16$，$c_{n+1}=3c_n-4n^2-4n-10$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$………④

④を $c_{n+1}+r(n+1)^2+s(n+1)+t=3(c_n+rn^2+sn+t)$ と変形すると，

$c_{n+1}=3c_n+2rn^2+(-2r+2s)n-r-s+2t$

$2r=-4$，$-2r+2s=-4$，$-r-s+2t=-10$ から，$(r,\ s,\ t)=(-2,\ -4,\ -8)$

すると，$c_{n+1}-2(n+1)^2-4(n+1)-8=3(c_n-2n^2-4n-8)$ より，

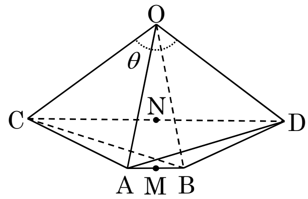
$c_n-2n^2-4n-8=(c_1-2\cdot1^2-4\cdot1-8)\cdot 3^{n-1}=2\cdot 3^{n-1}$

よって，$c_n=2\cdot 3^{n-1}+2n^2+4n+8$ である。

［コメント］

漸化式の解法についての問題です。(5)は(3)の方法を利用しています。なお，本問と同様な内容になっている「ピンポイント レクチャー」も参考にしてください。

第５問



(1) $\triangle$OAC, $\triangle$OBC, $\triangle$OAD, $\triangle$OBD, $\triangle$ABC, $\triangle$ABD は 1 辺の長さが 1 の正三角形であり，このとき $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおく。そして，線分 AB, CD の中点をそれぞれ M, N とする。

(i) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$, $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})$ となり，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}=1^2\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CN}}=\vec{a}\cdot\dfrac{1}{2}(\vec{d}-\vec{c})=\dfrac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{d}-\dfrac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=k\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CN}}=\vec{a}\cdot(k\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\vec{c})=\frac{1}{2}k|\vec{a}|^2+\frac{1}{2}k\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}k-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}k-\frac{1}{2}$$

すると，$\dfrac{3}{4}k-\dfrac{1}{2}=0$ から $k=\dfrac{2}{3}$ である。

(iii) $\angle\mathrm{COD}=\theta$ とおき，(ii)より，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ に注目すると，

$$\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),\ 3(\vec{c}+\vec{d})=2(\vec{a}+\vec{b})$$

これより，$\vec{d}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}-\vec{c}$ となる。

また，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})$ で，$\vec{c}\cdot\vec{d}=1^2\cdot\cos\theta=\cos\theta$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{ON}}|^2=\frac{1}{4}|\vec{c}+\vec{d}|^2=\frac{1}{4}|\vec{c}|^2+\frac{1}{2}\vec{c}\cdot\vec{d}+\frac{1}{4}|\vec{d}|^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta$$

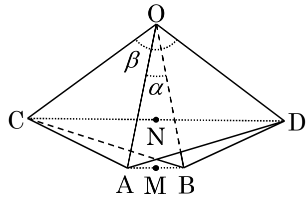
(iv) (iii)から，$|\overrightarrow{\mathrm{ON}}|=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\theta}$, $|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\theta}$ となり，一方，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

そこで，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ のなす角が 0° から，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}}=|\overrightarrow{\mathrm{OM}}||\overrightarrow{\mathrm{ON}}|$ を利用すると，

$$\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta},\ 1=3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta\right)$$

よって，$\dfrac{3}{2}\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ から，$\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$ である。



(2) $\triangle$OAC, $\triangle$OBC, $\triangle$OAD, $\triangle$OBD は 1 辺の長さが 1 の正三角形とし，$\angle\mathrm{AOB}=\alpha$, $\angle\mathrm{COD}=\beta$ とおく。

(i) (1)(iv)と同様にすると，

$$|\overrightarrow{\mathrm{ON}}|=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\beta},\ |\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{1}{2}$ で，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}}=|\overrightarrow{\mathrm{OM}}||\overrightarrow{\mathrm{ON}}|$ から，

$$\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\beta},\ (1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)=1$$

(ii) $\alpha=\beta$ のとき，$(1+\cos\alpha)^2=1$ より $\cos\alpha=0$ となり，$\alpha=90°$ である。

このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=|\overrightarrow{\mathrm{ON}}|$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ となるので，

$$\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}),\ \vec{d}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ から，点 D は平面 ABC 上にある。

［コメント］

ベクトルの空間図形への応用問題です。(1)(ii)については，誘導通り計算しましたが，点 N が正三角形 OAB の重心ということに着目しても構いません。また, (1)(iv)については，方針 2 によって処理しています。というのも，(2)で方針 2 が指定されていますので。