第１問

解答解説のページへ

[1]　a を実数とする。

$9a^2-6a+1=(\boxed{\text{ア}}a-\boxed{\text{イ}})^2$ である。次に，$A=\sqrt{9a^2-6a+1}+|a+2|$ とおくと，$A=\sqrt{(\boxed{\text{ア}}a-\boxed{\text{イ}})^2}+|a+2|$ である。

次の 3 つの場合に分けて考える。

・$a>\dfrac{1}{3}$ のとき，$A=\boxed{\text{ウ}}a+\boxed{\text{エ}}$ である。

・$-2\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき，$A=\boxed{\text{オカ}}a+\boxed{\text{キ}}$ である。

・$a<-2$ のとき，$A=-\boxed{\text{ウ}}a-\boxed{\text{エ}}$ である。

$A=2a+13$ となる a の値は，$\boxed{\text{ク}}$，$\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

[2]　2 つの自然数 m, n に関する 3 つの条件 p, q, r を次のように定める。

p：m と n はともに奇数である　　　q：$3mn$ は奇数である

r：$m+5n$ は偶数である

また，条件 p の否定を $\overline{p}$ で表す。

(1)　次の $\boxed{\text{シ}}$，$\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものを，下の⓪～②のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

2 つの自然数 m, n が条件 $\overline{p}$ を満たすとする。このとき，m が奇数ならば n は $\boxed{\text{シ}}$。また，m が偶数ならば n は $\boxed{\text{ス}}$。

⓪ 偶数である　　① 奇数である　　② 偶数でも奇数でもよい

(2)　次の $\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{タ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

p は q であるための $\boxed{\text{セ}}$。　　p は r であるための $\boxed{\text{ソ}}$。

$\overline{p}$ は r であるための $\boxed{\text{タ}}$。

⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが，十分条件ではない

② 十分条件であるが，必要条件ではない

③ 必要条件でも十分条件でもない

[3]　a, b はともに正の実数とする。x の 2 次関数 $y=x^2+(2a-b)x+a^2+1$ のグラフを G とする。

(1)　グラフ G の頂点の座標は，$\left(\dfrac{b}{\boxed{チ}}-a,\ -\dfrac{b^2}{\boxed{ツ}}+ab+\boxed{テ}\right)$ である。

(2)　グラフ G が点 $(-1,\ 6)$ を通るとき，b のとり得る値の最大値は $\boxed{ト}$ であり，そのときの a の値は $\boxed{ナ}$ である。

$b=\boxed{ト}$，$a=\boxed{ナ}$ のとき，グラフ G は 2 次関数 $y=x^2$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$，$y$ 軸方向に $\dfrac{\boxed{ネノ}}{\boxed{ハ}}$ だけ平行移動したものである。

第２問

解答解説のページへ

[1] △ABC において，AB＝3，BC＝4，AC＝2 とする。

次の $\boxed{\text{エ}}$ には，下の⓪～②のうちから当てはまるものを 1 つ選べ。

$\cos\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ であり，∠BAC は $\boxed{\text{エ}}$ である。

また，$\sin\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

⓪ 鋭角　　① 直角　　② 鈍角

線分 AC の垂直二等分線と直線 AB の交点を D とする。

$\cos\angle\mathrm{CAD} = \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ であるから，AD＝$\boxed{\text{コ}}$ であり，△DBC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

[2] 全国各地の気象台が観測した「ソメイヨシノ(桜の種類)の開花日」や，「モンシロチョウの初見日(初めて観測した日)」，「ツバメの初見日」などの日付を気象庁が発表している。気象庁発表の日付は普通の月日形式であるが，この問題では該当する年の 1 月 1 日を「1」とし，12 月 31 日を「365」(うるう年の場合は「366」)とする「年間通し日」に変更している。例えば，2 月 3 日は，1 月 31 日の「31」に 2 月 3 日の 3 を加えた「34」となる。

(1) 図 1 は全国 48 地点で観測しているソメイヨシノの 2012 年から 2017 年までの 6 年間の開花日を，年ごとに箱ひげ図にして並べたものである。

図 2 はソメイヨシノの開花日の年ごとのヒストグラムである。ただし，順番は年の順に並んでいるとは限らない。なお，ヒストグラムの各階級の区間は，左側の数値を含み，右側の数値を含まない。

次の $\boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{タ}}$ に当てはまるものを，図 2 の⓪～⑤のうちから 1 つずつ選べ。

・2013 年のヒストグラムは $\boxed{\text{ソ}}$ である。

・2017 年のヒストグラムは $\boxed{\text{タ}}$ である。

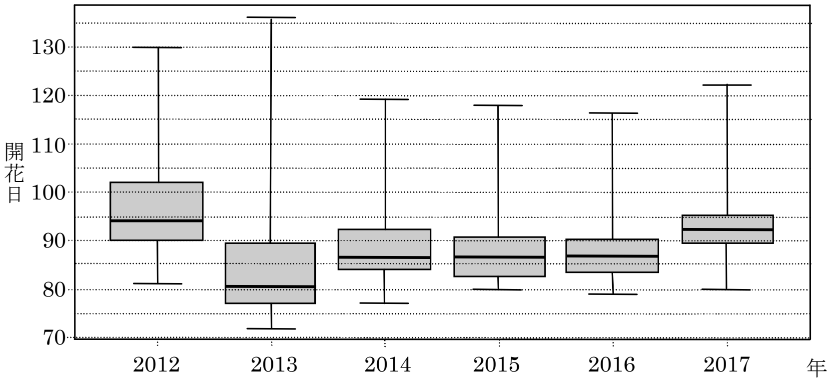


図1　ソメイヨシノの開花日の年別の箱ひげ図

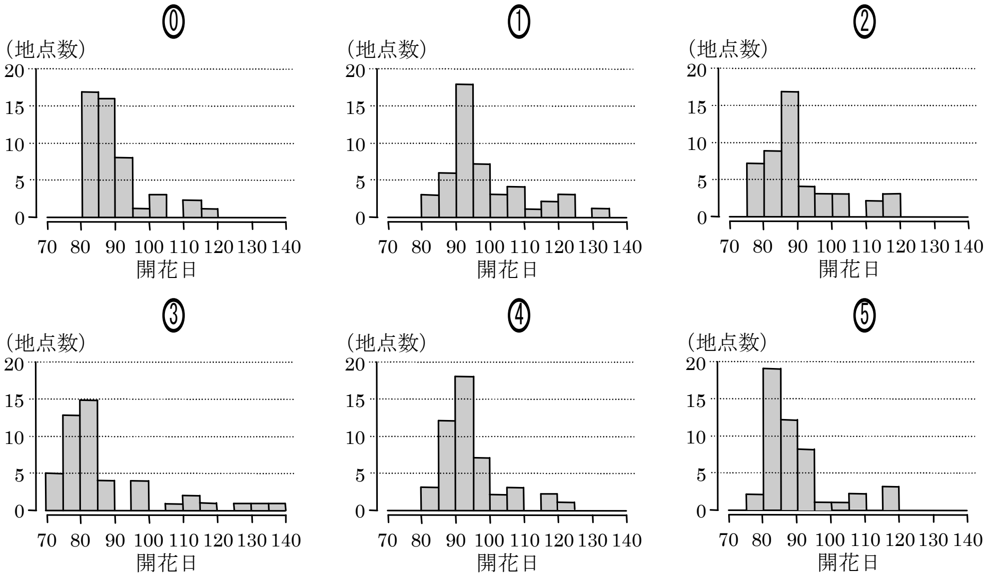


図2　ソメイヨシノの開花日の年別ヒストグラム

(出典：図1，図2 は気象庁「生物季節観測データ」Webページにより作成)

(2) 図 3 と図 4 は，モンシロチョウとツバメの両方を観測している 41 地点における，2017 年の初見日の箱ひげ図と散布図である。散布図の点には重なった点が 2 点ある。なお，散布図には原点を通り傾き 1 の直線(実線)，切片が -15 および 15 で傾きが 1 の 2 本の直線(破線)を付加している。

次の $\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを，下の⓪〜⑦のうちから 1 つずつ選べ。ただし，解答の順序は問わない。

図 3，図 4 から読み取れることとして**正しくないもの**は，$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$ である。

⓪ モンシロチョウの初見日の最小値はツバメの初見日の最小値と同じである。

① モンシロチョウの初見日の最大値はツバメの初見日の最大値より大きい。

② モンシロチョウの初見日の中央値はツバメの初見日の中央値より大きい。

③ モンシロチョウの初見日の四分位範囲はツバメの初見日の四分位範囲の 3 倍より小さい。

④ モンシロチョウの初見日の四分位範囲は 15 日以下である。

⑤ ツバメの初見日の四分位範囲は 15 日以下である。

⑥ モンシロチョウとツバメの初見日が同じ所が少なくとも 4 地点ある。

⑦ 同一地点でのモンシロチョウの初見日とツバメの初見日の差は 15 日以下である。

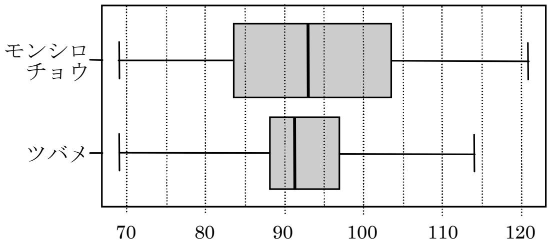


図3　モンシロチョウとツバメの初見日(2017年)の箱ひげ図

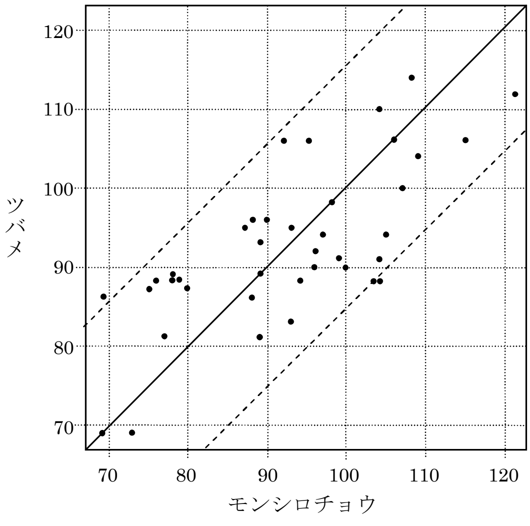


図4　モンシロチョウとツバメの初見日(2017年)の散布図

（出典：図3，図4 は気象庁「生物季節観測データ」Webページにより作成）

(3) 一般に n 個の数値 x_1, x_2, ⋯, x_n からなるデータ X の平均値を $\overline{x}$，分散を s^2，標準偏差を s とする。各 x_i に対して

$$x_i{}' = \frac{x_i - \overline{x}}{s} \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

と変換した $x_1{}'$, $x_2{}'$, ⋯, $x_n{}'$ をデータ X' とする。ただし，$n \geqq 2$，$s > 0$ とする。

次の $\boxed{\text{テ}}$，$\boxed{\text{ト}}$，$\boxed{\text{ナ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～⑧のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

・X の偏差 $x_1 - \overline{x}$，$x_2 - \overline{x}$，…，$x_n - \overline{x}$ の平均値は $\boxed{\text{テ}}$ である。

・X' の平均値は $\boxed{\text{ト}}$ である。

・X' の標準偏差は $\boxed{\text{ナ}}$ である。

⓪ 0　① 1　② -1　③ $\overline{x}$　④ s

⑤ $\dfrac{1}{s}$　⑥ s^2　⑦ $\dfrac{1}{s^2}$　⑧ $\dfrac{\overline{x}}{s}$

図 4 で示されたモンシロチョウの初見日のデータ M とツバメの初見日のデータ T について上の変換を行ったデータをそれぞれ M'，T' とする。

次の $\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまるものを，図 5 の⓪～③のうちから 1 つ選べ。

変換後のモンシロチョウの初見日のデータ M' と変換後のツバメの初見日のデータ T' の散布図は，M' と T' の標準偏差の値を考慮すると $\boxed{\text{ニ}}$ である。

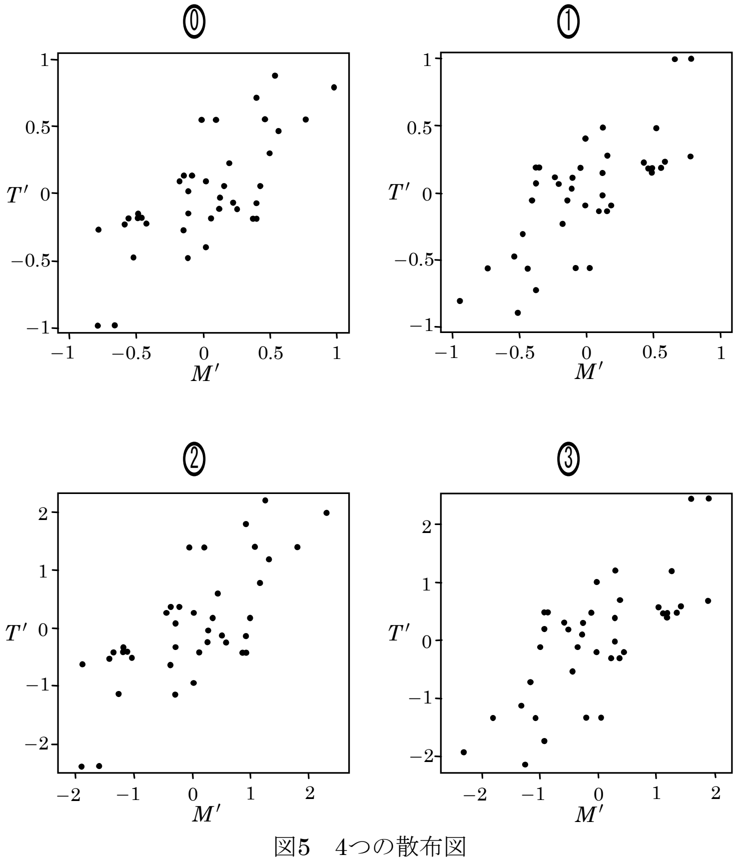


図5　4つの散布図

第３問

解答解説のページへ

赤い袋には赤球 2 個と白球 1 個が入っており，白い袋には赤球 1 個と白球 1 個が入っている。最初に，さいころ 1 個を投げて，3 の倍数の目が出たら白い袋を選び，それ以外の目が出たら赤い袋を選び，選んだ袋から球を 1 個取り出して，球の色を確認してその袋に戻す。ここまでの操作を 1 回目の操作とする。2 回目と 3 回目の操作では，直前に取り出した球の色と同じ色の袋から球を 1 個取り出して，球の色を確認してその袋に戻す。

(1)　1 回目の操作で，赤い袋が選ばれ赤球が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，白い袋が選ばれ赤球が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(2)　2 回目の操作が白い袋で行われる確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

(3)　1 回目の操作で白球を取り出す確率を p で表すと，2 回目の操作で白球が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}p+\dfrac{1}{3}$ と表される。よって，2 回目の操作で白球が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シスセ}}}$ である。

同様に考えると，3 回目の操作で白球が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{ソタチ}}}{\boxed{\text{ツテト}}}$ である。

(4)　2 回目の操作で取り出した球が白球であったとき，その球を取り出した袋の色が白である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ である。

また，3 回目の操作で取り出した球が白球であったとき，はじめて白球が取り出されたのが 3 回目の操作である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{ノハ}}}{\boxed{\text{ヒフヘ}}}$ である。

第４問

解答解説のページへ

(1) 不定方程式 $49x-23y=1$ の解となる自然数 x, y の中で, x の値が最小のものは, $x=\boxed{ア}$, $y=\boxed{イウ}$ であり, すべての整数解は, k を整数として,

$$x=\boxed{エオ}k+\boxed{ア},\quad y=\boxed{カキ}k+\boxed{イウ}$$

と表せる。

(2) 49 の倍数である自然数 A と 23 の倍数である自然数 B の組$(A,\ B)$を考える。A と B の差の絶対値が 1 となる組$(A,\ B)$の中で, A が最小になるのは

$$(A,\ B)=\left(49\times\boxed{ク},\ 23\times\boxed{ケコ}\right)$$

である。また, A と B の差の絶対値が 2 となる組$(A,\ B)$の中で, A が最小になるのは

$$(A,\ B)=\left(49\times\boxed{サ},\ 23\times\boxed{シス}\right)$$

である。

(3) 連続する 3 つの自然数 a, $a+1$, $a+2$ を考える。

a と $a+1$ の最大公約数は 1, $a+1$ と $a+2$ の最大公約数は 1, a と $a+2$ の最大公約数は 1 または $\boxed{セ}$ である。

また, 次の条件がすべての自然数 a で成り立つような自然数 m のうち, 最大のものは $m=\boxed{ソ}$ である。

条件：$a(a+1)(a+2)$ は m の倍数である。

(4) 6762 を素因数分解すると，$6762=2\times\boxed{タ}\times 7^{\boxed{チ}}\times\boxed{ツテ}$ である。

b を，$b(b+1)(b+2)$ が 6762 の倍数となる最小の自然数とする。このとき，b，$b+1$，$b+2$ のいずれかは $7^{\boxed{チ}}$ の倍数であり，また，b，$b+1$，$b+2$ のいずれかは $\boxed{ツテ}$ の倍数である。したがって，$b=\boxed{トナニ}$ である。

第５問

解答解説のページへ

△ABC において AB＝4，BC＝7，AC＝5 とする。このとき，$\cos\angle\mathrm{BAC}=-\dfrac{1}{5}$，$\sin\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ である。

△ABC の内接円の半径は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。この内接円と辺 AB との接点を D，辺 AC との接点を E とする。AD＝$\boxed{\text{ウ}}$，DE＝$\dfrac{\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

線分 BE と線分 CD の交点を P，直線 AP と辺 BC の交点を Q とする。

$\dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{CQ}}=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ であるから，BQ＝$\boxed{\text{コ}}$ であり，△ABC の内心を I とすると，IQ＝$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。また，直線 CP と△ABC の内接円との交点で D とは異なる点を F とすると，$\cos\angle\mathrm{DFE}=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

第１問

問題のページへ

[1] $9a^2-6a+1=(3a-1)^2$ より，$A=\sqrt{9a^2-6a+1}+|a+2|$ とおくと，

$$A=\sqrt{(3a-1)^2}+|a+2|=|3a-1|+|a+2|$$

(i) $a>\dfrac{1}{3}$ のとき　$A=(3a-1)+(a+2)=4a+1$

(ii) $-2\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき　$A=-(3a-1)+(a+2)=-2a+3$

(iii) $a<-2$ のとき　$A=-(3a-1)-(a+2)=-4a-1$

ここで，$A=2a+13$ となるのは，

(i) $a>\dfrac{1}{3}$ のとき　$4a+1=2a+13$ から $a=6$ となり適する。

(ii) $-2\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき　$-2a+3=2a+13$ から $a=-\dfrac{5}{2}$ となり適さない。

(iii) $a<-2$ のとき　$-4a-1=2a+13$ から $a=-\dfrac{7}{3}$ となり適する。

以上より，$a=6$，$-\dfrac{7}{3}$ である。

[2] 自然数 m, n に関する 3 つの条件 p, q, r について，

p : m と n はともに奇数

q : $3mn$ は奇数 ⇔ q : mn は奇数

r : $m+5n$ は偶数 ⇔ r : $m+n$ は偶数

(1) 条件 $\overline{p}$ は「m，n の少なくとも一方は偶数」であるので，自然数 m，n が条件 $\overline{p}$ を満たすとき，「m が奇数ならば n は偶数」，「m が偶数ならば n は偶数でも奇数でもよい」となる。

(2) 「m と n はともに奇数」⇒「mn は奇数」は真，「mn は奇数」⇒「m と n はともに奇数」は真より，p は q であるための必要十分条件である。

「m と n はともに奇数」⇒「$m+n$ は偶数」は真，「$m+n$ は偶数」⇒「m と n はともに奇数」は偽より，p は r であるための十分条件であるが，必要条件ではない。

「m，n の少なくとも一方は偶数」⇒「$m+n$ は偶数」は偽，「$m+n$ は偶数」⇒「m，n の少なくとも一方は偶数」は偽より，$\overline{p}$ は r であるための必要条件でも十分条件でもない。

[3] (1) $a>0$，$b>0$ のとき，グラフ $G: y=x^2+(2a-b)x+a^2+1$ に対して，

$$y=\left(x+\frac{2a-b}{2}\right)^2-\left(\frac{2a-b}{2}\right)^2+a^2+1=\left(x-\frac{b}{2}+a\right)^2-\frac{b^2}{4}+ab+1 \text{ である}$$

これより，グラフ G の頂点の座標は，$\left(\dfrac{b}{2}-a,\ -\dfrac{b^2}{4}+ab+1\right)$

(2) グラフ G が点 $(-1,\ 6)$ を通るとき，$6=1-(2a-b)+a^2+1$ より，

$$b=-a^2+2a+4=-(a-1)^2+5$$

$a>0$，$b>0$ から，b のとり得る値の最大値は 5 であり，このとき $a=1$ である。

そして，$a=1$，$b=5$ のとき，(1)より，グラフ G の頂点の座標は $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{4}\right)$ となるので，G は $y=x^2$ のグラフを x 軸方向に $\frac{3}{2}$，y 軸方向に $-\frac{1}{4}$ だけ平行移動したものである。

［解 説］

数と式，命題，2 次関数についての基本事項の確認問題です。計算は，質・量ともに軽めです。

第２問

問題のページへ

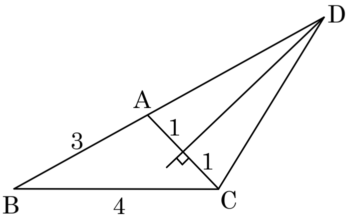
[1] AB$=3$，BC$=4$，AC$=2$である△ABCにおいて，余弦定理より，

$$\cos\angle \mathrm{BAC}=\frac{9+4-16}{2\cdot 3\cdot 2}=-\frac{1}{4}$$

これより，∠BACは鈍角であり，$\sin\angle \mathrm{BAC}=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

さて，線分ACの垂直二等分線と直線ABの交点をDとすると，$\angle \mathrm{CAD}=180°-\angle \mathrm{BAC}$より，

$$\cos\angle \mathrm{CAD}=-\cos\angle \mathrm{BAC}=\frac{1}{4}$$



すると，$\mathrm{AD}=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\frac{1}{\cos\angle \mathrm{BAC}}=4$

さらに，$\sin\angle \mathrm{CAD}=\sin\angle \mathrm{BAC}$から，

$$\triangle \mathrm{DBC}=\triangle \mathrm{ABC}+\triangle \mathrm{ADC}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{7}{4}\sqrt{15}$$

[2] (1) 2013 年の箱ひげ図では，最大値が 135 以上と読み取れるので，ヒストグラムは③が対応する。また，2017 年の箱ひげ図では，最大値が 120 以上 125 未満と読み取れるので，ヒストグラムは④が対応する。

(2) 図 3 から，モンシロチョウとツバメの初見日について，最小値は同じ，最大値と中央値はモンシロチョウの方が大きい。四分位範囲は，モンシロチョウでは 20 日程度，ツバメでは 9 日程度である。

また，図 4 から，初見日が同じ実線上には 4 点あり，重なりも考えると，初見日が同じ所は少なくとも 4 地点ある。さらに，2 本の破線にはさまれた領域以外に点があることから，初見日の差が 15 日より大きい所もある。

以上より，正しくないものは，④と⑦である。

(3) データXについて，平均値は$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，分散と標準偏差は次式のようになる。

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2-\left(\overline{x}\right)^2,\ s=\sqrt{s^2}$$

すると，Xの偏差の平均値は，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{\overline{x}}{n}\cdot n=\overline{x}-\overline{x}=0$$

また，${x_i}'=\frac{x_i-\overline{x}}{s}$と変換したデータ$X'$について，平均値を$\overline{x'}$とおくと，

$$\overline{x'}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\overline{x}}{s}=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})=\frac{1}{s}\cdot 0=0$$

さらに，X'の分散$(s')^2$は，$\overline{x'}=0$より，

$$(s')^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i{}')^2-\left(\overline{x'}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\overline{x}}{s}\right)^2=\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{s^2}\cdot s^2=1$$

すると，X' の標準偏差 s' は，$s'=\sqrt{1}=1$ である。

同様に考えると，M'，T' の標準偏差は 1 から，M'，T' の散布図は②または③に絞られ，$s>0$ に注意して，この中で図 4 と点の配置の同じものを選べばよい。

すると，M'，T' の散布図は②となる。

［解 説］

三角比と図形，およびデータの分析の基本題です。論理的な飛躍の感じられる設問はありません。なお，[2](3)では，記述を簡単にするために，シグマ記号を利用しています。範囲外ですが。

第３問

問題のページへ

(1) 赤球 2 個と白球 1 個が入っている赤袋と，赤球 1 個と白球 1 個が入っている白袋がある。1 回目の操作では，赤袋を選ぶ確率が $\frac{2}{3}$，白袋を選ぶ確率が $\frac{1}{3}$ である。

すると，赤袋(赤球)の確率は $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$，白袋(赤球)の確率は $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ である。

(2) 1 回目の操作で，赤袋(白球)の確率は $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$，白袋(白球)の確率は $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ である。2 回目の操作では，直前回(1 回目)に取り出した球の色と同じ色の袋から球を 1 個取り出すので，この操作が白袋で行われる確率は，$\frac{2}{9}+\frac{1}{6}=\frac{7}{18}$ である。

(3) 1 回目の操作で白球を取り出す確率を p で表すと, 2 回目の操作で白球が取り出されるのは，赤袋(白球)と白袋(白球)の 2 つの場合があり，その確率は,

$$(1-p)\cdot\frac{1}{3}+p\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}p+\frac{1}{3}$$

(2)より $p=\frac{7}{18}$ なので，この確率は $\frac{1}{6}\cdot\frac{7}{18}+\frac{1}{3}=\frac{43}{108}$ である。

また, 3 回目の操作で白球が取り出されるのは，2 回目と同様なので，その確率は,

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{43}{108}+\frac{1}{3}=\frac{259}{648}$$

(4) 2 回目の操作で取り出した球について，白球の確率は(3)より $\frac{43}{108}$，白袋(白球)の確率は $\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{18}=\frac{7}{36}$ である。すると，取り出した球が白球であったとき，その球を取り出した袋の色が白である条件付き確率は,

$$\frac{7}{36}\div\frac{43}{108}=\frac{7}{36}\times\frac{108}{43}=\frac{21}{43}$$

また，3 回目の操作で取り出した球について，白球の確率は(3)より $\frac{259}{648}$ であり，3 回目ではじめて白球が取り出されるのは，赤袋(赤球)→赤袋(赤球)→赤袋(白球)と白袋(赤球)→赤袋(赤球)→赤袋(白球)の 2 つの場合があり，その確率は,

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{2}{9}=\frac{11}{81}$$

よって, 3 回目の操作で取り出した球が白球であったとき，はじめて白球が取り出されたのが 3 回目の操作である条件付き確率は,

$$\frac{11}{81}\div\frac{259}{648}=\frac{11}{81}\times\frac{648}{259}=\frac{88}{259}$$

［解 説］

確率計算の標準的な問題です。平易な内容ですが，設定がややこしく，数値計算もやや難なので，時間制限が気になってしまい……。

第４問

問題のページへ

(1)　不定方程式　$49x-23y=1$ ……①に対し，①を満たす特殊解を求めるために，49 と 23 に互除法を適用すると，右のようになる。ここで，$a=49$，$b=23$ とおき，互除法のプロセスと対比させて，余りの 1 に着目すると，

$$
\begin{array}{r|r|r}
1 & 7 & 2 \\
2\,)\,3 &)\,23 &)\,49 \\
2 & 21 & 46 \\ \hline
1 & 2 & 3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|r|r}
1 & 7 & 2 \\
-7a+15b\,)\,a-2b &)\,b &)\,a \\
-7a+15b & 7a-14b & 2b \\ \hline
8a-17b & -7a+15b & a-2b
\end{array}
$$

$8a-17b=1$，$8\times49-17\times23=1$

よって，$49\times8-23\times17=1$ ………②

①②より，$49(x-8)-23(y-17)=0$

$49(x-8)=23(y-17)$

ここで，49 と 23 は互いに素なので，k' を整数として，

$x-8=23k'$，$y-17=49k'$

すなわち，$x=23k'+8$，$y=49k'+17$ と表せ，x, y は自然数から $k'\geqq0$ となる。そして，x が最小となるのは $k'=0$ のときで，このとき $x=8$，$y=17$ である。

すると，①のすべての整数解は $k'=k$ とおき，

$x=23k+8$，$y=49k+17$

(2)　x, y を自然数として，49 の倍数である自然数 A，23 の倍数である自然数 B は，

$A=49x$，$B=23y$

ここで，$|A-B|=1$，すなわち $|49x-23y|=1$ のとき，

(i)　$49x-23y=1$ のとき　(1)より，x が最小となるのは，$x=8$，$y=17$

(ii)　$49x-23y=-1$ のとき　②より，特殊解を $(x,\ y)=(-8,\ -17)$ とし，

$x=23k-8$，$y=49k-17$　（k は整数）

x が最小となるのは $k=1$ のときで，このとき $x=15$，$y=32$ である。

(i)(ii)より，A が最小になるのは $(A,\ B)=(49\times8,\ 23\times17)$ である。

また，$|A-B|=2$，すなわち $|49x-23y|=2$ のとき，

(iii)　$49x-23y=2$ のとき　②より，特殊解を $(x,\ y)=2(8,\ 17)=(16,\ 34)$ とし，

$x=23k+16$，$y=49k+34$　（k は整数）

x が最小となるのは $k=0$ のときで，このとき $x=16$，$y=34$ である。

(iv)　$49x-23y=-2$ のとき　②より，特殊解を $(x,\ y)=(-16,\ -34)$ とすると，

$x=23k-16$，$y=49k-34$　（k は整数）

x が最小となるのは $k=1$ のときで，このとき $x=7$，$y=15$ である。

(iii)(iv)より，A が最小になるのは $(A,\ B)=(49\times7,\ 23\times15)$ である。

(3)　連続する 3 つの自然数 a，$a+1$，$a+2$ に対し，a と $a+1$ の最大公約数は 1，$a+1$ と $a+2$ の最大公約数は 1，a と $a+2$ の最大公約数は，$(a+2)-a=2$ の約数で 1 または 2 である。

次に，どんな a に対しても $a(a+1)(a+2)$ が m の倍数となるとき，まず $a=1$ では $a(a+1)(a+2)=6$ なので，m の最大数は 6 以下である。

また，どんな a に対しても，3 つの自然数 a，$a+1$，$a+2$ には 2 の倍数と 3 の倍数を含み，2 と 3 は互いに素から，$a(a+1)(a+2)$ はつねに 6 の倍数となる。

これより，m の最大数は 6 である。

(4) まず，$6762=2\times3\times7^2\times23$ である。

さて，自然数 b に対して，$b(b+1)(b+2)$ が $6762=2\times3\times7^2\times23$ の倍数とする。

そこで，(3)の結果を用いると，$b(b+1)(b+2)$ は $7^2\times23$ の倍数になり，さらに 3 つの自然数 b，$b+1$，$b+2$ から 2 数を選んだとき，その最大公約数は 1 または 2 であるので，その 2 数がともに 7 の倍数という場合はない。

よって，b，$b+1$，$b+2$ のいずれかは $7^2=49$ の倍数，しかも b，$b+1$，$b+2$ のいずれかは 23 の倍数となる。

これより，3 数 b，$b+1$，$b+2$ の条件について，次の 2 つの場合がある。

(i) b，$b+1$，$b+2$ のいずれかが 49×23 の倍数のとき

b が最小になるのは，$b+2=49\times23$ すなわち $b=1125$ である。

(ii) b，$b+1$，$b+2$ のいずれかが 49 の倍数，他のいずれかが 23 の倍数のとき

49 の倍数と 23 の倍数の組合せについて，$\{b,\ b+1\}$ または $\{b+1,\ b+2\}$ の場合はその差の絶対値が 1，$\{b,\ b+2\}$ の場合はその差の絶対値が 2 である。

そこで，(2)の結果を用いると，

・$|A-B|=1$ のとき　$(A,\ B)$ が最小になるのは，

$$(A,\ B)=(49\times8,\ 23\times17)=(392,\ 391)$$

・$|A-B|=2$ のとき　$(A,\ B)$ が最小になるのは，

$$(A,\ B)=(49\times7,\ 23\times15)=(343,\ 345)$$

これより，b が最小になるのは，$(b,\ b+2)=(343,\ 345)$ すなわち $b=343$ である。

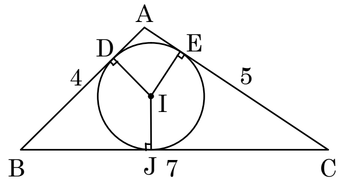
(i)(ii)より，求める最小値 b は，$b=343$ である。

［解 説］

例年のように出題されている不定方程式を端緒とした整数問題です。(4)の結論がスムーズに導けるように，(1)～(3)の設問が工夫された誘導となっています。ただ，2 次試験として出題されても遜色ない内容ですので，センター試験としては，かなり難の部類に属します。

第５問

問題のページへ



$AB=4$，$BC=7$，$AC=5$ である△ABC において，

$$\cos\angle BAC=-\frac{1}{5},\ \sin\angle BAC=\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

内接円の中心を I, 半径を r とおくと，

$$\frac{1}{2}(4+7+5)r=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

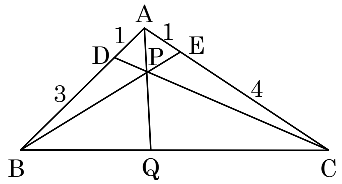
すると，$8r=4\sqrt{6}$ から，$r=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ である。

ここで, 内接円と辺 AB, 辺 AC, 辺 BC との接点をそれぞれ D, E, J とする。そして，$AD=AE=x$ とおくと，$BD=BJ=4-x$，$CE=CJ=5-x$ となり，

$$(4-x)+(5-x)=7,\ x=1$$

また，△ADE に余弦定理を適用すると，$DE^2=1^2+1^2-2\cdot 1\cdot 1\cdot\left(-\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{12}{5}$ となり，

$$DE=\sqrt{\frac{12}{5}}=\frac{2\sqrt{15}}{5}$$

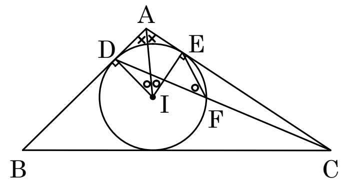


さて, 線分 BE と線分 CD の交点を P, 直線 AP と辺 BC の交点を Q とし, △ABC にチェバの定理を用いると,

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CE}{EA}=1,\ \frac{1}{3}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{4}{1}=1$$

すると，$\dfrac{BQ}{CQ}=\dfrac{3}{4}$ となり，$BQ=\dfrac{3}{7}BC=3$

一方，$BJ=4-1=3$ であるので，これより $Q=J$ となり，$IQ=IJ=r=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$



また, 直線 CP と△ABC の内接円との交点で D とは異なる点を F とすると,

$$\angle DFE=\frac{1}{2}\angle DIE=\angle AIE$$

すると，$AI=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+1^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ より，

$$\cos\angle DFE=\cos\angle AIE=\frac{IE}{AI}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$$

［解 説］

三角比の応用と平面図形の融合問題です。最後の設問はいろいろな解法が考えられますが, 上の解答例は内接円の中心角と円周角の関係を利用した方法です。