第１問

問題のページへ

[1]　$9a^2-6a+1=(3a-1)^2$ より，$A=\sqrt{9a^2-6a+1}+|a+2|$ とおくと，

$$A=\sqrt{(3a-1)^2}+|a+2|=|3a-1|+|a+2|$$

(i)　$a>\frac{1}{3}$ のとき　$A=(3a-1)+(a+2)=4a+1$

(ii)　$-2\leqq a\leqq\frac{1}{3}$ のとき　$A=-(3a-1)+(a+2)=-2a+3$

(iii)　$a<-2$ のとき　$A=-(3a-1)-(a+2)=-4a-1$

ここで，$A=2a+13$ となるのは，

(i)　$a>\frac{1}{3}$ のとき　$4a+1=2a+13$ から $a=6$ となり適する。

(ii)　$-2\leqq a\leqq\frac{1}{3}$ のとき　$-2a+3=2a+13$ から $a=-\frac{5}{2}$ となり適さない。

(iii)　$a<-2$ のとき　$-4a-1=2a+13$ から $a=-\frac{7}{3}$ となり適する。

以上より，$a=6$，$-\frac{7}{3}$ である。

[2]　自然数 m, n に関する 3 つの条件 p, q, r について，

p : m と n はともに奇数

q : $3mn$ は奇数 ⇔ q : mn は奇数

r : $m+5n$ は偶数 ⇔ r : $m+n$ は偶数

(1)　条件 $\overline{p}$ は「m，n の少なくとも一方は偶数」であるので，自然数 m，n が条件 $\overline{p}$ を満たすとき，「m が奇数ならば n は偶数」，「m が偶数ならば n は偶数でも奇数でもよい」となる。

(2)　「m と n はともに奇数」⇒「mn は奇数」は真，「mn は奇数」⇒「m と n はともに奇数」は真より，p は q であるための必要十分条件である。

「m と n はともに奇数」⇒「$m+n$ は偶数」は真，「$m+n$ は偶数」⇒「m と n はともに奇数」は偽より，p は r であるための十分条件であるが，必要条件ではない。

「m，n の少なくとも一方は偶数」⇒「$m+n$ は偶数」は偽，「$m+n$ は偶数」⇒「m，n の少なくとも一方は偶数」は偽より，$\overline{p}$ は r であるための必要条件でも十分条件でもない。

[3]　(1)　$a>0$，$b>0$ のとき，グラフ $G: y=x^2+(2a-b)x+a^2+1$ に対して，

$$y=\left(x+\frac{2a-b}{2}\right)^2-\left(\frac{2a-b}{2}\right)^2+a^2+1=\left(x-\frac{b}{2}+a\right)^2-\frac{b^2}{4}+ab+1 \text{ である}$$

これより，グラフ G の頂点の座標は，$\left(\frac{b}{2}-a,\ -\frac{b^2}{4}+ab+1\right)$

(2)　グラフ G が点 $(-1,\ 6)$ を通るとき，$6=1-(2a-b)+a^2+1$ より，

$$b=-a^2+2a+4=-(a-1)^2+5$$

$a>0$, $b>0$から, bのとり得る値の最大値は5であり, このとき$a=1$である。

そして, $a=1$, $b=5$のとき, (1)より, グラフGの頂点の座標は$\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{4}\right)$となるので, Gは$y=x^2$のグラフをx軸方向に$\dfrac{3}{2}$, y軸方向に$-\dfrac{1}{4}$だけ平行移動したものである。

［解 説］

数と式, 命題, 2 次関数についての基本事項の確認問題です。計算は, 質・量ともに軽めです。

第２問

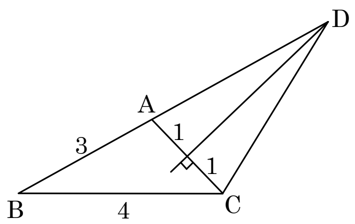
問題のページへ

[1]　AB＝3，BC＝4，AC＝2である△ABCにおいて，余弦定理より，

$$\cos\angle BAC=\frac{9+4-16}{2\cdot3\cdot2}=-\frac{1}{4}$$

これより，∠BACは鈍角であり，$\sin\angle BAC=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

さて，線分ACの垂直二等分線と直線ABの交点をDとすると，∠CAD＝180°−∠BACより，



$$\cos\angle CAD=-\cos\angle BAC=\frac{1}{4}$$

すると，$AD=\frac{1}{2}AC\cdot\frac{1}{\cos\angle BAC}=4$

さらに，sin∠CAD＝sin∠BACから，

$$\triangle DBC=\triangle ABC+\triangle ADC=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}+\frac{1}{2}\cdot4\cdot2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{7}{4}\sqrt{15}$$

[2]　(1)　2013年の箱ひげ図では，最大値が135以上と読み取れるので，ヒストグラムは③が対応する。また，2017年の箱ひげ図では，最大値が120以上125未満と読み取れるので，ヒストグラムは④が対応する。

(2)　図3から，モンシロチョウとツバメの初見日について，最小値は同じ，最大値と中央値はモンシロチョウの方が大きい。四分位範囲は，モンシロチョウでは20日程度，ツバメでは9日程度である。

また，図4から，初見日が同じ実線上には4点あり，重なりも考えると，初見日が同じ所は少なくとも4地点ある。さらに，2本の破線にはさまれた領域以外に点があることから，初見日の差が15日より大きい所もある。

以上より，正しくないものは，④と⑦である。

(3)　データXについて，平均値は$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，分散と標準偏差は次式のようになる。

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2-(\overline{x})^2,\ s=\sqrt{s^2}$$

すると，Xの偏差の平均値は，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{\overline{x}}{n}\cdot n=\overline{x}-\overline{x}=0$$

また，${x_i}'=\frac{x_i-\overline{x}}{s}$と変換したデータ$X'$について，平均値を$\overline{x'}$とおくと，

$$\overline{x'}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\overline{x}}{s}=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})=\frac{1}{s}\cdot0=0$$

さらに，X'の分散$(s')^2$は，$\overline{x'}=0$より，

$$(s')^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}({x_i}')^2-\left(\overline{x'}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\overline{x}}{s}\right)^2=\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{s^2}\cdot s^2=1$$

すると，X' の標準偏差 s' は，$s'=\sqrt{1}=1$ である。

同様に考えると，M'，T' の標準偏差は 1 から，M'，T' の散布図は②または③に絞られ，$s>0$ に注意して，この中で図 4 と点の配置の同じものを選べばよい。

すると，M'，T' の散布図は②となる。

[解　説]

三角比と図形，およびデータの分析の基本題です。論理的な飛躍の感じられる設問はありません。なお，[2](3)では，記述を簡単にするために，シグマ記号を利用しています。範囲外ですが。

第３問

問題のページへ

(1) 赤球 2 個と白球 1 個が入っている赤袋と，赤球 1 個と白球 1 個が入っている白袋がある。1 回目の操作では，赤袋を選ぶ確率が $\frac{2}{3}$，白袋を選ぶ確率が $\frac{1}{3}$ である。

すると，赤袋(赤球)の確率は $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$，白袋(赤球)の確率は $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ である。

(2) 1 回目の操作で，赤袋(白球)の確率は $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$，白袋(白球)の確率は $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ である。2 回目の操作では，直前回(1 回目)に取り出した球の色と同じ色の袋から球を 1 個取り出すので，この操作が白袋で行われる確率は，$\frac{2}{9}+\frac{1}{6}=\frac{7}{18}$ である。

(3) 1 回目の操作で白球を取り出す確率を p で表すと，2 回目の操作で白球が取り出されるのは，赤袋(白球)と白袋(白球)の 2 つの場合があり，その確率は，

$$(1-p)\cdot\frac{1}{3}+p\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}p+\frac{1}{3}$$

(2)より $p=\frac{7}{18}$ なので，この確率は $\frac{1}{6}\cdot\frac{7}{18}+\frac{1}{3}=\frac{43}{108}$ である。

また，3 回目の操作で白球が取り出されるのは，2 回目と同様なので，その確率は，

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{43}{108}+\frac{1}{3}=\frac{259}{648}$$

(4) 2 回目の操作で取り出した球について，白球の確率は(3)より $\frac{43}{108}$，白袋(白球)の確率は $\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{18}=\frac{7}{36}$ である。すると，取り出した球が白球であったとき，その球を取り出した袋の色が白である条件付き確率は，

$$\frac{7}{36}\div\frac{43}{108}=\frac{7}{36}\times\frac{108}{43}=\frac{21}{43}$$

また，3 回目の操作で取り出した球について，白球の確率は(3)より $\frac{259}{648}$ であり，3 回目ではじめて白球が取り出されるのは，赤袋(赤球)→赤袋(赤球)→赤袋(白球)と白袋(赤球)→赤袋(赤球)→赤袋(白球)の 2 つの場合があり，その確率は，

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{2}{9}=\frac{11}{81}$$

よって，3 回目の操作で取り出した球が白球であったとき，はじめて白球が取り出されたのが 3 回目の操作である条件付き確率は，

$$\frac{11}{81}\div\frac{259}{648}=\frac{11}{81}\times\frac{648}{259}=\frac{88}{259}$$

［解 説］

確率計算の標準的な問題です。平易な内容ですが，設定がややこしく，数値計算もやや難なので，時間制限が気になってしまい……。

第４問

問題のページへ

(1) 不定方程式 $49x-23y=1$ ……①に対し，①を満たす特殊解を求めるために，49 と 23 に互除法を適用すると，右のようになる。ここで，$a=49$，$b=23$ とおき，互除法のプロセスと対比させて，余りの 1 に着目すると，

$$\begin{array}{rrrr}
 & 1 & 7 & 2\\
2\,) & 3 &)\,23 &)\,49\\
 & 2 & 21 & 46\\ \hline
 & 1 & 2 & 3
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr}
 & 1 & 7 & 2\\
-7a+15b\,) & a-2b &)\,b &)\,a\\
 & -7a+15b & 7a-14b & 2b\\ \hline
 & 8a-17b & -7a+15b & a-2b
\end{array}$$

$8a-17b=1$，$8\times49-17\times23=1$

よって，$49\times8-23\times17=1$ ………②

①②より，$49(x-8)-23(y-17)=0$

$49(x-8)=23(y-17)$

ここで，49 と 23 は互いに素なので，k' を整数として，

$x-8=23k'$，$y-17=49k'$

すなわち，$x=23k'+8$，$y=49k'+17$ と表せ，x, y は自然数から $k'\geqq0$ となる。そして，x が最小となるのは $k'=0$ のときで，このとき $x=8$，$y=17$ である。

すると，①のすべての整数解は $k'=k$ とおき，

$x=23k+8$，$y=49k+17$

(2) x, y を自然数として，49 の倍数である自然数 A，23 の倍数である自然数 B は，

$A=49x$，$B=23y$

ここで，$|A-B|=1$，すなわち $|49x-23y|=1$ のとき，

(i) $49x-23y=1$ のとき (1)より，x が最小となるのは，$x=8$，$y=17$

(ii) $49x-23y=-1$ のとき ②より，特殊解を $(x,\ y)=(-8,\ -17)$ とし，

$x=23k-8$，$y=49k-17$ （k は整数）

x が最小となるのは $k=1$ のときで，このとき $x=15$，$y=32$ である。

(i)(ii)より，A が最小になるのは $(A,\ B)=(49\times8,\ 23\times17)$ である。

また，$|A-B|=2$，すなわち $|49x-23y|=2$ のとき，

(iii) $49x-23y=2$ のとき ②より，特殊解を $(x,\ y)=2(8,\ 17)=(16,\ 34)$ とし，

$x=23k+16$，$y=49k+34$ （k は整数）

x が最小となるのは $k=0$ のときで，このとき $x=16$，$y=34$ である。

(iv) $49x-23y=-2$ のとき ②より，特殊解を $(x,\ y)=(-16,\ -34)$ とすると，

$x=23k-16$，$y=49k-34$ （k は整数）

x が最小となるのは $k=1$ のときで，このとき $x=7$，$y=15$ である。

(iii)(iv)より，A が最小になるのは $(A,\ B)=(49\times7,\ 23\times15)$ である。

(3) 連続する 3 つの自然数 a，$a+1$，$a+2$ に対し，a と $a+1$ の最大公約数は 1，$a+1$ と $a+2$ の最大公約数は 1，a と $a+2$ の最大公約数は，$(a+2)-a=2$ の約数で 1 または 2 である。

次に，どんな a に対しても $a(a+1)(a+2)$ が m の倍数となるとき，まず $a=1$ では $a(a+1)(a+2)=6$ なので，m の最大数は 6 以下である。

また，どんな a に対しても，3 つの自然数 a，$a+1$，$a+2$ には 2 の倍数と 3 の倍数を含み，2 と 3 は互いに素から，$a(a+1)(a+2)$ はつねに 6 の倍数となる。

これより，m の最大数は 6 である。

(4) まず，$6762=2\times3\times7^2\times23$ である。

さて，自然数 b に対して，$b(b+1)(b+2)$ が $6762=2\times3\times7^2\times23$ の倍数とする。

そこで，(3)の結果を用いると，$b(b+1)(b+2)$ は $7^2\times23$ の倍数になり，さらに 3 つの自然数 b，$b+1$，$b+2$ から 2 数を選んだとき，その最大公約数は 1 または 2 であるので，その 2 数がともに 7 の倍数という場合はない。

よって，b，$b+1$，$b+2$ のいずれかは $7^2=49$ の倍数，しかも b，$b+1$，$b+2$ のいずれかは 23 の倍数となる。

これより，3 数 b，$b+1$，$b+2$ の条件について，次の 2 つの場合がある。

(i)　b，$b+1$，$b+2$ のいずれかが 49×23 の倍数のとき

b が最小になるのは，$b+2=49\times23$ すなわち $b=1125$ である。

(ii)　b，$b+1$，$b+2$ のいずれかが 49 の倍数，他のいずれかが 23 の倍数のとき

49 の倍数と 23 の倍数の組合せについて，$\{b,\ b+1\}$ または $\{b+1,\ b+2\}$ の場合はその差の絶対値が 1，$\{b,\ b+2\}$ の場合はその差の絶対値が 2 である。

そこで，(2)の結果を用いると，

・$|A-B|=1$ のとき　$(A,\ B)$ が最小になるのは，

$$(A,\ B)=(49\times8,\ 23\times17)=(392,\ 391)$$

・$|A-B|=2$ のとき　$(A,\ B)$ が最小になるのは，

$$(A,\ B)=(49\times7,\ 23\times15)=(343,\ 345)$$

これより，b が最小になるのは，$(b,\ b+2)=(343,\ 345)$ すなわち $b=343$ である。

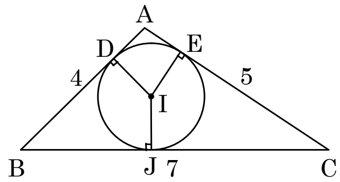
(i)(ii)より，求める最小値 b は，$b=343$ である。

［解 説］

例年のように出題されている不定方程式を端緒とした整数問題です。(4)の結論がスムーズに導けるように，(1)～(3)の設問が工夫された誘導となっています。ただ，2 次試験として出題されても遜色ない内容ですので，センター試験としては，かなり難の部類に属します。

第５問

問題のページへ



$\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{BC}=7$，$\mathrm{AC}=5$ である△ABC において，

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=-\frac{1}{5}，\ \sin\angle\mathrm{BAC}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

内接円の中心を I, 半径を r とおくと,

$$\frac{1}{2}(4+7+5)r=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

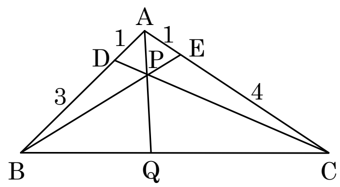
すると，$8r=4\sqrt{6}$ から，$r=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ である。

ここで, 内接円と辺 AB, 辺 AC, 辺 BC との接点をそれぞれ D, E, J とする。そして，$\mathrm{AD}=\mathrm{AE}=x$ とおくと，$\mathrm{BD}=\mathrm{BJ}=4-x$，$\mathrm{CE}=\mathrm{CJ}=5-x$ となり,

$$(4-x)+(5-x)=7，\ x=1$$

また, △ADE に余弦定理を適用すると，$\mathrm{DE}^2=1^2+1^2-2\cdot 1\cdot 1\cdot\left(-\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{12}{5}$ となり,

$$\mathrm{DE}=\sqrt{\frac{12}{5}}=\frac{2\sqrt{15}}{5}$$

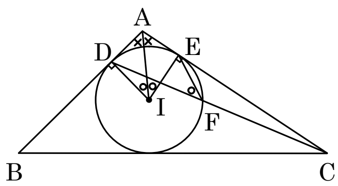


さて, 線分 BE と線分 CD の交点を P, 直線 AP と辺 BC の交点を Q とし, △ABC にチェバの定理を用いると,

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1，\ \frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{4}{1}=1$$

すると，$\dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{CQ}}=\dfrac{3}{4}$ となり，$\mathrm{BQ}=\dfrac{3}{7}\mathrm{BC}=3$

一方，$\mathrm{BJ}=4-1=3$ であるので, これより $\mathrm{Q}=\mathrm{J}$ となり，$\mathrm{IQ}=\mathrm{IJ}=r=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$



また, 直線 CP と△ABC の内接円との交点で D とは異なる点を F とすると,

$$\angle\mathrm{DFE}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{DIE}=\angle\mathrm{AIE}$$

すると，$\mathrm{AI}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+1^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ より,

$$\cos\angle\mathrm{DFE}=\cos\angle\mathrm{AIE}=\frac{\mathrm{IE}}{\mathrm{AI}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$$

［解 説］

三角比の応用と平面図形の融合問題です。最後の設問はいろいろな解法が考えられますが, 上の解答例は内接円の中心角と円周角の関係を利用した方法です。