## 第１問

解答解説のページへ

[1]　関数 $f(\theta)=3\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta$ を考える。

(1)　$f(0)=\boxed{\text{アイ}}$, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\boxed{\text{ウ}}+\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(2)　2 倍角の公式を用いて計算すると，$\cos^2\theta=\dfrac{\cos 2\theta+\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ となる。さらに，$\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$ を用いて $f(\theta)$ を表すと

$$f(\theta)=\boxed{\text{キ}}\sin 2\theta-\boxed{\text{ク}}\cos 2\theta+\boxed{\text{ケ}}\quad\cdots\cdots\cdots①$$

となる。

(3)　$\theta$ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くとき，関数 $f(\theta)$ のとり得る最大の整数の値 $m$ とそのときの $\theta$ の値を求めよう。

三角関数の合成を用いると，①は

$$f(\theta)=\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{\boxed{\text{シ}}}\right)+\boxed{\text{ケ}}$$

と変形できる。したがって，$m=\boxed{\text{ス}}$ である。

また，$0\leqq\theta\leqq\pi$ において，$f(\theta)=\boxed{\text{ス}}$ となる $\theta$ の値は，小さい順に，$\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}$，$\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

[2]　連立方程式

$$\begin{cases}\log_2(x+2)-2\log_4(y+3)=-1\quad\cdots\cdots\cdots②\\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^y-11\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}+6=0\quad\cdots\cdots\cdots③\end{cases}$$

を満たす $x, y$ を求めよう。

真数の条件により，$x$, $y$ のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{タ}}$ である。$\boxed{\text{タ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから 1 つ選べ。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，$a$ を底，$b$ を真数という。

⓪　$x>0$，$y>0$　　①　$x>2$，$y>3$　　②　$x>-2$，$y>-3$

③　$x<0$，$y<0$　　④　$x<2$，$y<3$　　⑤　$x<-2$，$y<-3$

底の変換公式により，$\log_4(y+3)=\dfrac{\log_2(y+3)}{\boxed{\text{チ}}}$ である。よって，②から

$$y=\boxed{\text{ツ}}x+\boxed{\text{テ}}\quad\cdots\cdots\cdots④$$

が得られる。

次に，$t=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ とおき，④を用いて③を $t$ の方程式に書き直すと

$$t^2-\boxed{\text{トナ}}\,t+\boxed{\text{ニヌ}}=0 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

が得られる。また，$x$ が $\boxed{\text{タ}}$ における $x$ の範囲を動くとき，$t$ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{ネ}}<t<\boxed{\text{ノ}} \cdots\cdots\cdots ⑥$$

である。

⑥の範囲で方程式⑤を解くと，$t=\boxed{\text{ハ}}$ となる。したがって，連立方程式②，③を満たす実数 $x, y$ の値は

$$x=\log_3\frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}},\quad y=\log_3\frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}$$

であることがわかる。

## 第２問

解答解説のページへ

$p$, $q$ を実数とし，関数 $f(x)=x^3+px^2+qx$ は $x=-1$ で極値 2 をとるとする。また，座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を $C$，放物線 $y=-kx^2$ を $D$，放物線 $D$ 上の点 $(a,\ -ka^2)$ を A とする。ただし，$k>0$，$a>0$ である。

(1) 関数 $f(x)$ が $x=-1$ で極値をとるので，$f'(-1)=\boxed{\text{ア}}$ である。これと $f(-1)=2$ より，$p=\boxed{\text{イ}}$，$q=\boxed{\text{ウエ}}$ である。よって，$f(x)$ は $x=\boxed{\text{オ}}$ で極小値 $\boxed{\text{カキ}}$ をとる。

(2) 点 A における放物線 $D$ の接線を $l$ とする。$D$ と $l$ および $x$ 軸で囲まれた図形の面積 $S$ を $a$ と $k$ を用いて表そう。

$l$ の方程式は

$$y=\boxed{\text{クケ}}kax+ka^{\boxed{\text{コ}}}\ \cdots\cdots\cdots①$$

と表せる。$l$ と $x$ 軸の交点の $x$ 座標は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ であり，$D$ と $x$ 軸および直線 $x=a$ で囲まれた図形の面積は $\dfrac{k}{\boxed{\text{ス}}}a^{\boxed{\text{セ}}}$ である。よって，$S=\dfrac{k}{\boxed{\text{ソタ}}}a^{\boxed{\text{セ}}}$ である。

(3) さらに，点 A が曲線 $C$ 上にあり，かつ(2)の接線 $l$ が $C$ にも接するとする。このときの(2)の $S$ の値を求めよう。

A が $C$ 上にあるので，$k=\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}-\boxed{\text{テ}}$ である。

$l$ と $C$ の接点の $x$ 座標を $b$ とすると，$l$ の方程式は $b$ を用いて

$$y=\boxed{\text{ト}}(b^2-\boxed{\text{ナ}})x-\boxed{\text{ニ}}b^3\ \cdots\cdots\cdots②$$

と表される。②の右辺を $g(x)$ とおくと

$$f(x)-g(x)=(x-\boxed{\text{ヌ}})^2(x+\boxed{\text{ネ}}b)$$

と因数分解されるので，$a=-\boxed{\text{ネ}}b$ となる。①と②の表す直線の傾きを比較することにより，$a^2=\dfrac{\boxed{\text{ノハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ である。

したがって，求める $S$ の値は $\dfrac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘホ}}}$ である。

## 第３問

解答解説のページへ

初項が 3，公比が 4 の等比数列の初項から第 $n$ 項までの和を $S_n$ とする。また，数列 $\{T_n\}$ は，初項が $-1$ であり，$\{T_n\}$ の階差数列が数列 $\{S_n\}$ であるような数列とする。

(1)　$S_2 = \boxed{\text{アイ}}$，$T_2 = \boxed{\text{ウ}}$ である。

(2)　$\{S_n\}$ と $\{T_n\}$ の一般項はそれぞれ

$$S_n = \boxed{\text{エ}}^{\boxed{\text{オ}}} - \boxed{\text{カ}},\quad T_n = \frac{\boxed{\text{キ}}^{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}} - n - \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である。ただし，$\boxed{\text{オ}}$ と $\boxed{\text{ク}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから 1 つずつ選べ。同じものを選んでもよい。

⓪　$n-1$　　①　$n$　　②　$n+1$　　③　$n+2$　　④　$n+3$

(3)　数列 $\{a_n\}$ は，初項が $-3$ であり，漸化式

$$na_{n+1} = 4(n+1)a_n + 8T_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする。$\{a_n\}$ の一般項を求めよう。

そのために，$b_n = \dfrac{a_n + 2T_n}{n}$ により定められる数列 $\{b_n\}$ を考える。$\{b_n\}$ の初項は $\boxed{\text{シス}}$ である。

$\{T_n\}$ は漸化式

$$T_{n+1} = \boxed{\text{セ}}\,T_n + \boxed{\text{ソ}}\,n + \boxed{\text{タ}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすから，$\{b_n\}$ は漸化式

$$b_{n+1} = \boxed{\text{チ}}\,b_n + \boxed{\text{ツ}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすことがわかる。よって，$\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = \boxed{\text{テト}} \cdot \boxed{\text{チ}}^{\boxed{\text{ナ}}} - \boxed{\text{ニ}}$$

である。ただし，$\boxed{\text{ナ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから 1 つ選べ。

⓪　$n-1$　　①　$n$　　②　$n+1$　　③　$n+2$　　④　$n+3$

したがって，$\{T_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項から $\{a_n\}$ の一般項を求めると

$$a_n = \frac{\boxed{\text{ヌ}}\left(\boxed{\text{ネ}}\,n + \boxed{\text{ノ}}\right)\boxed{\text{チ}}^{\boxed{\text{ナ}}} + \boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$$

である。

## 第４問

解答解説のページへ

四角形 ABCD を底辺とする四角錐 OABCD を考える。四角形 ABCD は，辺 AD と辺 BC が平行で，AB＝CD，∠ABC＝∠BCD を満たすとする。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として

$$|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=\sqrt{3},\ |\vec{c}|=\sqrt{5},\ \vec{a}\cdot\vec{b}=1,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=3,\ \vec{a}\cdot\vec{c}=0$$

であるとする。

(1)　∠AOC＝$\boxed{\text{アイ}}$°により，三角形 OAC の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\boxed{\text{オカ}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ であるから，

∠ABC＝$\boxed{\text{ケコサ}}$°である。さらに，辺 AD と辺 BC が平行であるから，

∠BAD＝∠ADC＝$\boxed{\text{シス}}$°である。よって，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\boxed{\text{セ}}\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{a}-\boxed{\text{ソ}}\,\vec{b}+\boxed{\text{タ}}\,\vec{c}$$

と表される。また，四角形 ABCD の面積は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

(3)　三角形 OAC を底面とする三角錐 BOAC の体積 $V$ を求めよう。

3 点 O, A, C の定める平面 $\alpha$ 上に，点 H を $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\vec{a}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\vec{c}$ が成り立つようにとる。$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|$ は三角錐 BOAC の高さである。H は $\alpha$ 上の点であるから，実数 $s$, $t$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{c}$ の形に表される。

$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\vec{a}=\boxed{\text{ト}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\vec{c}=\boxed{\text{ト}}$ により，$s=\boxed{\text{ナ}}$，$t=\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。よって，$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ が得られる。したがって，(1)により，$V=\dfrac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ であることがわかる。

(4)　(3)の $V$ を用いると，四角錐 OABCD の体積は $\boxed{\text{フ}}\,V$ と表せる。さらに，四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD の高さは $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}}{\boxed{\text{ホ}}}$ である。

## 第５問

解答解説のページへ

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 8 ページの正規分布表を用いてもよい。

(1) ある食品を摂取したときに，血液中の物質 A の量がどのように変化するか調べたい。食品摂取前と摂取してから 3 時間後に，それぞれ一定量の血液に含まれる物質 A の量（単位は mg）を測定し，その変化量，すなわち摂取後の量から摂取前の量を引いた値を表す確率変数を $X$ とする。$X$ の期待値（平均）は $E(X)=-7$，標準偏差は $\sigma(X)=5$ とする。

このとき，$X^2$ の期待値は $E(X^2)=\boxed{\text{アイ}}$ である。

また，測定単位を変更して $W=1000X$ とすると，その期待値は $E(W)=-7\times10^{\boxed{\text{ウ}}}$，分散は $V(W)=5^{\boxed{\text{エ}}}\times10^{\boxed{\text{オ}}}$ となる。

(2) (1)の $X$ が正規分布に従うとするとき，物質 A の量が減少しない確率 $P(X\geqq0)$ を求めよう。この確率は

$$P(X\geqq0)=P\left(\frac{X+7}{5}\geqq\boxed{\text{カ}}.\boxed{\text{キ}}\right)$$

であるので，標準正規分布に従う確率変数を $Z$ とすると，正規分布表から，次のように求められる。

$$P(Z\geqq\boxed{\text{カ}}.\boxed{\text{キ}})=0.\boxed{\text{クケ}}\quad\cdots\cdots\cdots①$$

無作為に抽出された 50 人がこの食品を摂取したときに，物質 A の量が減少するか，減少しないかを考え，物質 A の量が減少しない人数を表す確率変数を $M$ とする。$M$ は二項分布 $B(50,\ 0.\boxed{\text{クケ}})$ に従うので，期待値は $E(M)=\boxed{\text{コ}}.\boxed{\text{サ}}$，標準偏差は $\sigma(M)=\sqrt{\boxed{\text{シ}}.\boxed{\text{ス}}}$ となる。ただし，$0.\boxed{\text{クケ}}$ は①で求めた小数第 2 位までの値とする。

(3) (1)の食品摂取前と摂取してから 3 時間後に，それぞれ一定量の血液に含まれる別の物質 B の量（単位は mg）を測定し，その変化量，すなわち摂取後の量から摂取前の量を引いた値を表す確率変数を $Y$ とする。$Y$ の母集団分布は母平均 $m$，母標準偏差 6 をもつとする。$m$ を推定するため，母集団から無作為に抽出された 100 人に対して物質 B の変化量を測定したところ，標本平均 $\overline{Y}$ の値は $-10.2$ であった。

このとき，$\overline{Y}$ の期待値は $E(\overline{Y})=m$，標準偏差は $\sigma(\overline{Y})=\boxed{\text{セ}}.\boxed{\text{ソ}}$ である。$\overline{Y}$ の分布が正規分布で近似できるとすれば，$Z=\dfrac{\overline{Y}-m}{\boxed{\text{セ}}.\boxed{\text{ソ}}}$ は近似的に標準正規分布に従うとみなすことができる。

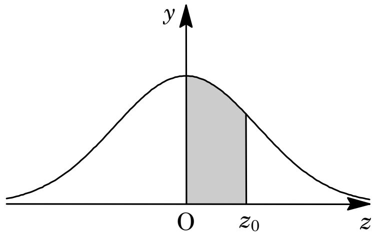
正規分布表を用いて$|z| \leqq 1.64$となる確率を求めると$0.$ $\boxed{\text{タチ}}$ となる。このことを利用して，母平均 $m$ に対する信頼度 $\boxed{\text{タチ}}$ %の信頼区間，すなわち，$\boxed{\text{タチ}}$ %の確率で $m$ を含む信頼区間を求めると，$\boxed{\text{ツ}}$ となる。$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまる最も適当なものを，次の⓪〜③のうちから1つ選べ。

⓪ $-11.7 \leqq m \leqq -8.7$　　① $-11.4 \leqq m \leqq -9.0$

② $-11.2 \leqq m \leqq -9.2$　　③ $-10.8 \leqq m \leqq -9.6$

# 正 規 分 布 表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。




| $z_0$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0000 | 0.0040 | 0.0080 | 0.0120 | 0.0160 | 0.0199 | 0.0239 | 0.0279 | 0.0319 | 0.0359 |
| 0.1 | 0.0398 | 0.0438 | 0.0478 | 0.0517 | 0.0557 | 0.0596 | 0.0636 | 0.0675 | 0.0714 | 0.0753 |
| 0.2 | 0.0793 | 0.0832 | 0.0871 | 0.0910 | 0.0948 | 0.0987 | 0.1026 | 0.1064 | 0.1103 | 0.1141 |
| 0.3 | 0.1179 | 0.1217 | 0.1255 | 0.1293 | 0.1331 | 0.1368 | 0.1406 | 0.1443 | 0.1480 | 0.1517 |
| 0.4 | 0.1554 | 0.1591 | 0.1628 | 0.1664 | 0.1700 | 0.1736 | 0.1772 | 0.1808 | 0.1844 | 0.1879 |
| 0.5 | 0.1915 | 0.1950 | 0.1985 | 0.2019 | 0.2054 | 0.2088 | 0.2123 | 0.2157 | 0.2190 | 0.2224 |
| 0.6 | 0.2257 | 0.2291 | 0.2324 | 0.2357 | 0.2389 | 0.2422 | 0.2454 | 0.2486 | 0.2517 | 0.2549 |
| 0.7 | 0.2580 | 0.2611 | 0.2642 | 0.2673 | 0.2704 | 0.2734 | 0.2764 | 0.2794 | 0.2823 | 0.2852 |
| 0.8 | 0.2881 | 0.2910 | 0.2939 | 0.2967 | 0.2995 | 0.3023 | 0.3051 | 0.3078 | 0.3106 | 0.3133 |
| 0.9 | 0.3159 | 0.3186 | 0.3212 | 0.3238 | 0.3264 | 0.3289 | 0.3315 | 0.3340 | 0.3365 | 0.3389 |
| 1.0 | 0.3413 | 0.3438 | 0.3461 | 0.3485 | 0.3508 | 0.3531 | 0.3554 | 0.3577 | 0.3599 | 0.3621 |
| 1.1 | 0.3643 | 0.3665 | 0.3686 | 0.3708 | 0.3729 | 0.3749 | 0.3770 | 0.3790 | 0.3810 | 0.3830 |
| 1.2 | 0.3849 | 0.3869 | 0.3888 | 0.3907 | 0.3925 | 0.3944 | 0.3962 | 0.3980 | 0.3997 | 0.4015 |
| 1.3 | 0.4032 | 0.4049 | 0.4066 | 0.4082 | 0.4099 | 0.4115 | 0.4131 | 0.4147 | 0.4162 | 0.4177 |
| 1.4 | 0.4192 | 0.4207 | 0.4222 | 0.4236 | 0.4251 | 0.4265 | 0.4279 | 0.4292 | 0.4306 | 0.4319 |
| 1.5 | 0.4332 | 0.4345 | 0.4357 | 0.4370 | 0.4382 | 0.4394 | 0.4406 | 0.4418 | 0.4429 | 0.4441 |
| 1.6 | 0.4452 | 0.4463 | 0.4474 | 0.4484 | 0.4495 | 0.4505 | 0.4515 | 0.4525 | 0.4535 | 0.4545 |
| 1.7 | 0.4554 | 0.4564 | 0.4573 | 0.4582 | 0.4591 | 0.4599 | 0.4608 | 0.4616 | 0.4625 | 0.4633 |
| 1.8 | 0.4641 | 0.4649 | 0.4656 | 0.4664 | 0.4671 | 0.4678 | 0.4686 | 0.4693 | 0.4699 | 0.4706 |
| 1.9 | 0.4713 | 0.4719 | 0.4726 | 0.4732 | 0.4738 | 0.4744 | 0.4750 | 0.4756 | 0.4761 | 0.4767 |
| 2.0 | 0.4772 | 0.4778 | 0.4783 | 0.4788 | 0.4793 | 0.4798 | 0.4803 | 0.4808 | 0.4812 | 0.4817 |
| 2.1 | 0.4821 | 0.4826 | 0.4830 | 0.4834 | 0.4838 | 0.4842 | 0.4846 | 0.4850 | 0.4854 | 0.4857 |
| 2.2 | 0.4861 | 0.4864 | 0.4868 | 0.4871 | 0.4875 | 0.4878 | 0.4881 | 0.4884 | 0.4887 | 0.4890 |
| 2.3 | 0.4893 | 0.4896 | 0.4898 | 0.4901 | 0.4904 | 0.4906 | 0.4909 | 0.4911 | 0.4913 | 0.4916 |
| 2.4 | 0.4918 | 0.4920 | 0.4922 | 0.4925 | 0.4927 | 0.4929 | 0.4931 | 0.4932 | 0.4934 | 0.4936 |
| 2.5 | 0.4938 | 0.4940 | 0.4941 | 0.4943 | 0.4945 | 0.4946 | 0.4948 | 0.4949 | 0.4951 | 0.4952 |
| 2.6 | 0.4953 | 0.4955 | 0.4956 | 0.4957 | 0.4959 | 0.4960 | 0.4961 | 0.4962 | 0.4963 | 0.4964 |
| 2.7 | 0.4965 | 0.4966 | 0.4967 | 0.4968 | 0.4969 | 0.4970 | 0.4971 | 0.4972 | 0.4973 | 0.4974 |
| 2.8 | 0.4974 | 0.4975 | 0.4976 | 0.4977 | 0.4977 | 0.4978 | 0.4979 | 0.4979 | 0.4980 | 0.4981 |
| 2.9 | 0.4981 | 0.4982 | 0.4982 | 0.4983 | 0.4984 | 0.4984 | 0.4985 | 0.4985 | 0.4986 | 0.4986 |
| 3.0 | 0.4987 | 0.4987 | 0.4987 | 0.4988 | 0.4988 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4990 | 0.4990 |

## 第１問

問題のページへ

[1]　$f(\theta)=3\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta$ に対して,

(1)　$f(0)=-1$, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=3\cdot\dfrac{3}{4}+4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=2+\sqrt{3}$

(2)　$\cos^2\theta=\dfrac{\cos 2\theta+1}{2}$, $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{2}$ から,

$$f(\theta)=3(1-\cos^2\theta)+4\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta=-4\cos^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+3$$
$$=-2(\cos 2\theta+1)+2\sin 2\theta+3=2\sin 2\theta-2\cos 2\theta+1\cdots\cdots\cdots①$$

(3)　①より, $f(\theta)=2\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+1$ となる。

ここで, $0\leqq\theta\leqq\pi$ から, $-\dfrac{\pi}{4}\leqq 2\theta-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{7}{4}\pi$ なので, $f(\theta)\leqq 2\sqrt{2}+1$

すると, 関数 $f(\theta)$ のとり得る最大の整数値 $m$ は $m=3$ であり, $f(\theta)=3$ となる $\theta$ の値は, $\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から $2\theta-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3}{4}\pi$ となり, $\theta=\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{2}$ である。

[2]　$\log_2(x+2)-2\log_4(y+3)=-1\cdots\cdots②$, $\left(\dfrac{1}{3}\right)^y-11\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}+6=0\cdots\cdots③$に対し,

まず, ②より, $x+2>0$ かつ $y+3>0$ なので, $x>-2$, $y>-3$

また, $\log_4(y+3)=\dfrac{\log_2(y+3)}{\log_2 4}=\dfrac{\log_2(y+3)}{2}$ より, ②は,

$$\log_2(x+2)-\log_2(y+3)=-1,\ \log_2\frac{x+2}{y+3}=-1$$

よって, $\dfrac{x+2}{y+3}=\dfrac{1}{2}$ から, $y=2x+1\cdots\cdots\cdots④$

次に, ④を③に代入して $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x+1}-11\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}+6=0$ となり, $t=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ とおくと,

$$\frac{1}{3}t^2-\frac{11}{3}t+6=0,\ t^2-11t+18=0\cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで, $x>-2$ のとき $y=2x+1>-3$ を満たし, これより $0<t<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$ なので,

$$0<t<9\cdots\cdots\cdots⑥$$

すると, ⑤から $(t-2)(t-9)=0$ なので, ⑥から, $t=2$ となる。

したがって, $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=2$ から $3^x=\dfrac{1}{2}$ となり, $x=\log_3\dfrac{1}{2}$

$$y=2\log_3\frac{1}{2}+1=\log_3\frac{1}{4}+\log_3 3=\log_3\frac{3}{4}$$

### ［解　説］

[1]は三角関数, [2]は指数・対数に関する計算問題です。ともに基本的な式変形の確認というレベルです。

## 第２問

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3+px^2+qx$ に対し，$f'(x)=3x^2+2px+q$

$f(x)$ は $x=-1$ で極値 2 をとることより，$f'(-1)=0$，$f(-1)=2$ が必要となり，

$$3-2p+q=0,\ -1+p-q=2$$

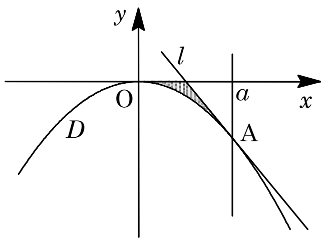
よって，$p=0$，$q=-3$ となり，$f(x)=x^3-3x$，$f'(x)=3x^2-3$

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$x=-1$ で極大値 2 をとり，$x=1$ で極小値 $-2$ をとる。

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-2$ | ↗ |

(2)　放物線 $D: y=-kx^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ -ka^2)$ における接線 $l$ の方程式は，$y'=-2kx$ から，$y+ka^2=-2ka(x-a)$ となり，

$$y=-2kax+ka^2\ \cdots\cdots\cdots①$$




$l$ と $x$ 軸の交点の $x$ 座標は $0=-2kax+ka^2$ より，

$$x=\frac{ka^2}{2ka}=\frac{a}{2}$$

$D$ と $x$ 軸および直線 $x=a$ で囲まれた図形の面積は，

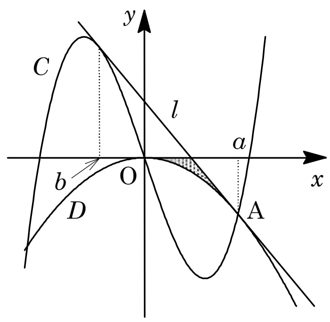
$$-\int_0^a -kx^2dx=k\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^a=\frac{k}{3}a^3$$

すると，$D$ と $l$ および $x$ 軸で囲まれた図形の面積 $S$ は，

$$S=\frac{k}{3}a^3-\frac{1}{2}\Big(a-\frac{a}{2}\Big)(0+ka^2)=\frac{k}{3}a^3-\frac{k}{4}a^3=\frac{k}{12}a^3$$

(3)　点 $\mathrm{A}(a,\ -ka^2)$ が $C: y=f(x)$ 上にあることより，

$$-ka^2=a^3-3a,\ k=\frac{3}{a}-a$$




$l$ と $C$ の接点の $x$ 座標を $b$ とすると，$l$ の方程式は，

$$y-(b^3-3b)=(3b^2-3)(x-b)$$

$$y=3(b^2-1)x-2b^3\ \cdots\cdots\cdots②$$

②の右辺を $g(x)$ とおくと，

$$f(x)-g(x)=x^3-3x-3(b^2-1)x+2b^3$$

$$=x^3-3b^2x+2b^3=(x-b)^2(x+2b)$$

すると，$f(x)=g(x)$ の $x\neq b$ の解が $x=a$ なので，$a=-2b$

さらに，①と②の表す直線の傾きを比較すると，$-2ka=3(b^2-1)$ となり，

$$-2\Big(\frac{3}{a}-a\Big)a=3\Big(-\frac{a}{2}\Big)^2-3,\ -6+2a^2=\frac{3}{4}a^2-3$$

よって，$\frac{5}{4}a^2=3$ から $a^2=\frac{12}{5}$ であり，このとき，

$$S=\frac{1}{12}\Big(\frac{3}{a}-a\Big)a^3=\frac{1}{12}(3-a^2)a^2=\frac{1}{12}\Big(3-\frac{12}{5}\Big)\cdot\frac{12}{5}=\frac{3}{25}$$

［解 説］

微積分の総合問題です。(3)では文字が多く混乱しがちですが，誘導にのれば，その懸念は軽減されます。

## 第３問

問題のページへ

(1)　初項 3, 公比 4 の等比数列の初項から第 $n$ 項までの和を $S_n$, また初項 $-1$ で階差数列が $\{S_n\}$ の数列 $\{T_n\}$ に対して，まず $S_2=3+3\cdot4=15$ となる。

また，$T_2-T_1=S_1$ より，$T_2=T_1+S_1=-1+3=2$

(2)　$S_n=\dfrac{3(4^n-1)}{4-1}=4^n-1$ であり，$T_{n+1}-T_n=S_n$ より，$n\geqq2$ で，

$$T_n=-1+\sum_{k=1}^{n-1}(4^k-1)=-1+\frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}-(n-1)=\frac{4^n}{3}-n-\frac{4}{3}$$

なお，この式は $n=1$ のときも成立している。

(3)　初項 $-3$，$na_{n+1}=4(n+1)a_n+8T_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ ……①を満たす数列 $\{a_n\}$，および $b_n=\dfrac{a_n+2T_n}{n}$ ……②により定められる数列 $\{b_n\}$ に対して，

$$b_1=\frac{a_1+2T_1}{1}=-3+2\cdot(-1)=-5$$

さて，(2)から，$T_{n+1}=\dfrac{4^{n+1}}{3}-(n+1)-\dfrac{4}{3}$ なので，

$$T_{n+1}=4\cdot\frac{4^n}{3}-n-\frac{7}{3}=4\left(\frac{4^n}{3}-n-\frac{4}{3}\right)+3n+3=4T_n+3n+3$$

ここで，①より，$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{4a_n}{n}+\dfrac{8T_n}{n(n+1)}$ と変形すると，

$$\begin{aligned}b_{n+1}&=\frac{a_{n+1}+2T_{n+1}}{n+1}=\frac{4a_n}{n}+\frac{8T_n}{n(n+1)}+\frac{2T_{n+1}}{n+1}\\&=\frac{4a_n}{n}+\frac{8T_n}{n(n+1)}+\frac{8T_n+6(n+1)}{n+1}=\frac{4a_n}{n}+\frac{8T_n}{n+1}\left(\frac{1}{n}+1\right)+6\\&=\frac{4a_n}{n}+\frac{8T_n(1+n)}{n(n+1)}+6=\frac{4a_n}{n}+\frac{8T_n}{n}+6=4b_n+6\end{aligned}$$

この式を，$b_{n+1}+2=4(b_n+2)$ と変形すると，

$$b_n+2=(b_1+2)\cdot4^{n-1}=(-5+2)\cdot4^{n-1}=-3\cdot4^{n-1}$$

よって，$b_n=-3\cdot4^{n-1}-2$ となり，②から，

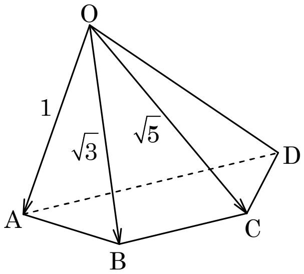
$$\begin{aligned}a_n&=nb_n-2T_n=-3n\cdot4^{n-1}-2n-2\left(\frac{4^n}{3}-n-\frac{4}{3}\right)\\&=\left(-3n-\frac{8}{3}\right)4^{n-1}+\frac{8}{3}=\frac{-(9n+8)4^{n-1}+8}{3}\end{aligned}$$

### ［解 説］

漸化式を解く問題です。誘導は細かく付いていますが，(3)の $\{T_n\}$ の漸化式をつくる設問で，少し手が止まりました。なお，①は代入計算がしやすいように，あらかじめ変形をしています。

## 第４問

問題のページへ




四角形 ABCD を底辺とする四角錐 OABCD に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{c}|=\sqrt{5}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=3$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ である。

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ から，$\angle\mathrm{AOC}=90^\circ$ なので，

$$\triangle\mathrm{OAC}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{5}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

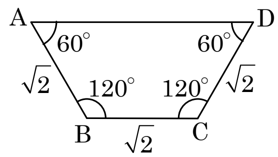
(2)　四角形 ABCD は，辺 AD と辺 BC が平行，AB＝CD，$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{BCD}$ を満たすことより，等脚台形であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2=0-1-3+3=-1$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=\sqrt{|\vec{a}-\vec{b}|^2}=\sqrt{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\sqrt{1-2\cdot1+3}=\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{|\vec{c}-\vec{b}|^2}=\sqrt{|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\sqrt{5-2\cdot3+3}=\sqrt{2}$$

これより，$\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$ となり，$\angle\mathrm{ABC}=120^\circ$ である。




また，$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{ADC}=180^\circ-120^\circ=60^\circ$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\sqrt{2}\cos60^\circ+\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos60^\circ=2\sqrt{2}$$

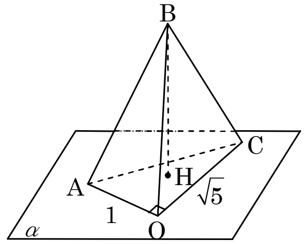
よって，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{a}+2(\vec{c}-\vec{b})=\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}$$

また，四角形 ABCD の面積は，

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+2\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}\sin60^\circ=\frac{1}{2}\cdot6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(3)　まず，3 点 O, A, C の定める平面 $\alpha$ 上に，点 H を $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\vec{a}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\vec{c}$ が成り立つようにとり，




$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{c}$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=s\vec{a}-\vec{b}+t\vec{c}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\vec{a}=0$ から，

$$s|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+t\vec{a}\cdot\vec{c}=0,\quad s-1=0$$

これより $s=1$ となり，また $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\vec{c}=0$ から，

$$s\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}+t|\vec{c}|^2=0,\quad -3+5t=0$$

これより $t=\dfrac{3}{5}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\vec{a}-\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$ と表されるので，

$$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+\frac{9}{25}|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{6}{5}\vec{a}\cdot\vec{c}-\frac{6}{5}\vec{b}\cdot\vec{c}=1+3+\frac{9}{5}-2-\frac{18}{5}=\frac{1}{5}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|=\sqrt{\dfrac{1}{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ となり，三角錐 BOAC の体積 $V$ は，(1)から，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{1}{6}$$

(4) (2)より，$\mathrm{AD}=2\mathrm{BC}$ となるので，$\triangle\mathrm{ADC}=2\triangle\mathrm{ABC}$ であり，四角錐 OABCD の体積は，$V+2V=3V$ と表せる。

すると，四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD の高さ $h$ は，(2)より，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}h=3V,\ \ \frac{\sqrt{3}}{2}h=\frac{1}{2}$$

したがって，$h=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ である。

［解 説］

等脚台形は，過去にときどき題材になっていますが，これを底面とした四角錐が対象となった空間ベクトルの応用問題です。誘導は丁寧で，複雑な数値計算もありませんが，ボリュームはかなりのものです。

## 第５問

問題のページへ

(1)　物質Aの変化量$X$に対し，$E(X)=-7$，$\sigma(X)=5$から$V(X)=5^2=25$となり，

$$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=25+(-7)^2=74$$

ここで，$W=1000X=10^3X$とすると，

$$E(W)=10^3E(X)=-7\times10^3,\ V(W)=(10^3)^2V(X)=5^2\times10^6$$

(2)　$X\geqq 0$のとき，$\dfrac{X+7}{5}\geqq\dfrac{7}{5}=1.4$から，

$$P(X\geqq 0)=P\left(\frac{X+7}{5}\geqq 1.4\right)$$

そして，$X$が正規分布に従うとするとき，$Z=\dfrac{X+7}{5}$は標準正規分布に従う。

さて，標準正規分布に従う確率変数を$Z$とすると，正規分布表から，

$$P(Z\geqq 1.4)=0.5-0.4192\fallingdotseq 0.08$$

ここで，無作為に抽出された50人に対し，$X\geqq 0$の人数を$M$とすると，$M$は二項分布$B(50,\ 0.08)$に従うことから，

$$E(M)=50\times0.08=4.0$$

$$\sigma(M)=\sqrt{50\times0.08\times(1-0.08)}=\sqrt{4\times0.92}\fallingdotseq\sqrt{3.7}$$

(3)まず，物質Bの変化量$Y$の母集団分布は，母平均$m$，母標準偏差6をもつとする。

ここで，$m$を推定するために，無作為に抽出された100人に対し，物質Bの変化量$Y$を測定したところ，$\overline{Y}=-10.2$であったので，

$$E(\overline{Y})=m,\ \sigma(\overline{Y})=\frac{6}{\sqrt{100}}=0.6$$

$\overline{Y}$の分布が正規分布で近似できるとすれば，$Z=\dfrac{\overline{Y}-m}{0.6}$は近似的に標準正規分布に従うとみなすことができる。

そこで，正規分布表から，$P(|z|\leqq 1.64)=0.4495\times2\fallingdotseq 0.90$なので，母平均$m$に対する信頼度90%の信頼区間を求めると，

$$\overline{Y}-1.64\times\sigma(\overline{Y})\leqq m\leqq\overline{Y}+1.64\times\sigma(\overline{Y})$$

すると，$\overline{Y}-1.64\times\sigma(\overline{Y})=-10.2-1.64\times0.6\fallingdotseq-11.2$

$$\overline{Y}+1.64\times\sigma(\overline{Y})=-10.2+1.64\times0.6\fallingdotseq-9.2$$

以上より，$-11.2\leqq m\leqq-9.2$となる。

### ［解 説］

統計的な推測に関する基本題です。信頼度 90%という見慣れない信頼区間が現れますが，考え方は，教科書にある 95%と変わりはありません。