第１問

問題のページへ

[1]　$f(\theta)=3\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta$ に対して，

(1)　$f(0)=-1$，$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=3\cdot\dfrac{3}{4}+4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=2+\sqrt{3}$

(2)　$\cos^2\theta=\dfrac{\cos 2\theta+1}{2}$，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{2}$ から，

$$f(\theta)=3(1-\cos^2\theta)+4\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta=-4\cos^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+3$$
$$=-2(\cos 2\theta+1)+2\sin 2\theta+3=2\sin 2\theta-2\cos 2\theta+1\cdots\cdots\cdots①$$

(3)　①より，$f(\theta)=2\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+1$ となる。

ここで，$0\leqq\theta\leqq\pi$ から，$-\dfrac{\pi}{4}\leqq 2\theta-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{7}{4}\pi$ なので，$f(\theta)\leqq 2\sqrt{2}+1$

すると，関数 $f(\theta)$ のとり得る最大の整数値 m は $m=3$ であり，$f(\theta)=3$ となる θ の値は，$\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から $2\theta-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi$ となり，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{2}$ である。

[2]　$\log_2(x+2)-2\log_4(y+3)=-1\cdots\cdots②$，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^y-11\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}+6=0\cdots\cdots③$ に対し，

まず，②より，$x+2>0$ かつ $y+3>0$ なので，$x>-2$，$y>-3$

また，$\log_4(y+3)=\dfrac{\log_2(y+3)}{\log_2 4}=\dfrac{\log_2(y+3)}{2}$ より，②は，

$$\log_2(x+2)-\log_2(y+3)=-1,\ \log_2\frac{x+2}{y+3}=-1$$

よって，$\dfrac{x+2}{y+3}=\dfrac{1}{2}$ から，$y=2x+1\cdots\cdots\cdots④$

次に，④を③に代入して $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x+1}-11\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}+6=0$ となり，$t=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ とおくと，

$$\frac{1}{3}t^2-\frac{11}{3}t+6=0,\ t^2-11t+18=0\cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで，$x>-2$ のとき $y=2x+1>-3$ を満たし，これより $0<t<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$ なので，

$$0<t<9\cdots\cdots\cdots⑥$$

すると，⑤から $(t-2)(t-9)=0$ なので，⑥から，$t=2$ となる。

したがって，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=2$ から $3^x=\dfrac{1}{2}$ となり，$x=\log_3\dfrac{1}{2}$

$$y=2\log_3\frac{1}{2}+1=\log_3\frac{1}{4}+\log_3 3=\log_3\frac{3}{4}$$

［解 説］

[1]は三角関数，[2]は指数・対数に関する計算問題です。ともに基本的な式変形の確認というレベルです。

第２問

問題のページへ

(1) $f(x)=x^3+px^2+qx$ に対し，$f'(x)=3x^2+2px+q$

$f(x)$ は $x=-1$ で極値 2 をとることより，$f'(-1)=0$，$f(-1)=2$ が必要となり，

$$3-2p+q=0,\quad -1+p-q=2$$

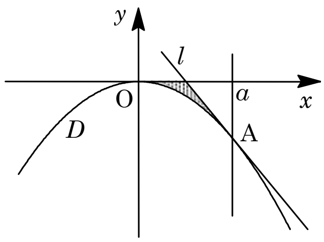
よって，$p=0$，$q=-3$ となり，$f(x)=x^3-3x$，$f'(x)=3x^2-3$

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$x=-1$ で極大値 2 をとり，$x=1$ で極小値 -2 をとる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

(2) 放物線 $D: y=-kx^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ -ka^2)$ における接線 l の方程式は，$y'=-2kx$ から，$y+ka^2=-2ka(x-a)$ となり，

$$y=-2kax+ka^2 \cdots\cdots\cdots ①$$



l と x 軸の交点の x 座標は $0=-2kax+ka^2$ より，

$$x=\frac{ka^2}{2ka}=\frac{a}{2}$$

D と x 軸および直線 $x=a$ で囲まれた図形の面積は，

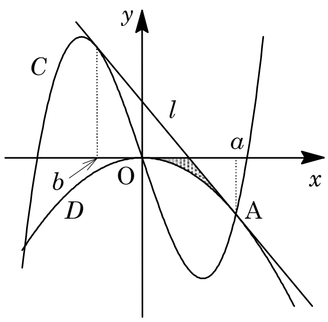
$$-\int_0^a -kx^2dx=k\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^a=\frac{k}{3}a^3$$

すると，D と l および x 軸で囲まれた図形の面積 S は，

$$S=\frac{k}{3}a^3-\frac{1}{2}\Big(a-\frac{a}{2}\Big)(0+ka^2)=\frac{k}{3}a^3-\frac{k}{4}a^3=\frac{k}{12}a^3$$

(3) 点 $\mathrm{A}(a,\ -ka^2)$ が $C: y=f(x)$ 上にあることより，

$$-ka^2=a^3-3a,\quad k=\frac{3}{a}-a$$



l と C の接点の x 座標を b とすると，l の方程式は，

$$y-(b^3-3b)=(3b^2-3)(x-b)$$

$$y=3(b^2-1)x-2b^3 \cdots\cdots\cdots ②$$

②の右辺を $g(x)$ とおくと，

$$f(x)-g(x)=x^3-3x-3(b^2-1)x+2b^3$$

$$=x^3-3b^2x+2b^3=(x-b)^2(x+2b)$$

すると，$f(x)=g(x)$ の $x\neq b$ の解が $x=a$ なので，$a=-2b$

さらに，①と②の表す直線の傾きを比較すると，$-2ka=3(b^2-1)$ となり，

$$-2\Big(\frac{3}{a}-a\Big)a=3\Big(-\frac{a}{2}\Big)^2-3,\quad -6+2a^2=\frac{3}{4}a^2-3$$

よって，$\frac{5}{4}a^2=3$ から $a^2=\frac{12}{5}$ であり，このとき，

$$S=\frac{1}{12}\Big(\frac{3}{a}-a\Big)a^3=\frac{1}{12}(3-a^2)a^2=\frac{1}{12}\Big(3-\frac{12}{5}\Big)\cdot\frac{12}{5}=\frac{3}{25}$$

［解　説］

微積分の総合問題です。(3)では文字が多く混乱しがちですが，誘導にのれば，その懸念は軽減されます。

第３問

問題のページへ

(1) 初項 3, 公比 4 の等比数列の初項から第 n 項までの和をS_n，また初項-1で階差数列が$\{S_n\}$の数列$\{T_n\}$に対して，まず$S_2=3+3\cdot 4=15$となる。

また，$T_2-T_1=S_1$より，$T_2=T_1+S_1=-1+3=2$

(2) $S_n=\dfrac{3(4^n-1)}{4-1}=4^n-1$であり，$T_{n+1}-T_n=S_n$より，$n\geqq 2$で,

$$T_n=-1+\sum_{k=1}^{n-1}(4^k-1)=-1+\frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}-(n-1)=\frac{4^n}{3}-n-\frac{4}{3}$$

なお, この式は$n=1$のときも成立している。

(3) 初項-3，$na_{n+1}=4(n+1)a_n+8T_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$……①を満たす数列$\{a_n\}$，および$b_n=\dfrac{a_n+2T_n}{n}$……②により定められる数列$\{b_n\}$に対して,

$$b_1=\frac{a_1+2T_1}{1}=-3+2\cdot(-1)=-5$$

さて, (2)から，$T_{n+1}=\dfrac{4^{n+1}}{3}-(n+1)-\dfrac{4}{3}$なので,

$$T_{n+1}=4\cdot\frac{4^n}{3}-n-\frac{7}{3}=4\left(\frac{4^n}{3}-n-\frac{4}{3}\right)+3n+3=4T_n+3n+3$$

ここで, ①より，$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{4a_n}{n}+\dfrac{8T_n}{n(n+1)}$と変形すると,

$$\begin{aligned}b_{n+1}&=\frac{a_{n+1}+2T_{n+1}}{n+1}=\frac{4a_n}{n}+\frac{8T_n}{n(n+1)}+\frac{2T_{n+1}}{n+1}\\&=\frac{4a_n}{n}+\frac{8T_n}{n(n+1)}+\frac{8T_n+6(n+1)}{n+1}=\frac{4a_n}{n}+\frac{8T_n}{n+1}\left(\frac{1}{n}+1\right)+6\\&=\frac{4a_n}{n}+\frac{8T_n(1+n)}{n(n+1)}+6=\frac{4a_n}{n}+\frac{8T_n}{n}+6=4b_n+6\end{aligned}$$

この式を，$b_{n+1}+2=4(b_n+2)$と変形すると,

$$b_n+2=(b_1+2)\cdot 4^{n-1}=(-5+2)\cdot 4^{n-1}=-3\cdot 4^{n-1}$$

よって，$b_n=-3\cdot 4^{n-1}-2$となり, ②から,

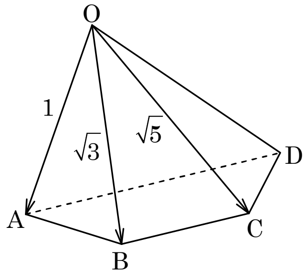
$$\begin{aligned}a_n&=nb_n-2T_n=-3n\cdot 4^{n-1}-2n-2\left(\frac{4^n}{3}-n-\frac{4}{3}\right)\\&=\left(-3n-\frac{8}{3}\right)4^{n-1}+\frac{8}{3}=\frac{-(9n+8)4^{n-1}+8}{3}\end{aligned}$$

［解 説］

漸化式を解く問題です。誘導は細かく付いていますが, (3)の$\{T_n\}$の漸化式をつくる設問で, 少し手が止まりました。なお, ①は代入計算がしやすいように, あらかじめ変形をしています。

第４問

問題のページへ



四角形 ABCD を底辺とする四角錐 OABCD に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{c}|=\sqrt{5}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=3$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ である。

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ から，$\angle\mathrm{AOC}=90^\circ$ なので，

$$\triangle\mathrm{OAC}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{5}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

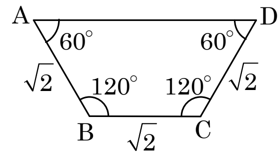
(2)　四角形 ABCD は，辺 AD と辺 BC が平行，AB＝CD，$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{BCD}$ を満たすことより，等脚台形であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2=0-1-3+3=-1$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=\sqrt{|\vec{a}-\vec{b}|^2}=\sqrt{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\sqrt{1-2\cdot1+3}=\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{|\vec{c}-\vec{b}|^2}=\sqrt{|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\sqrt{5-2\cdot3+3}=\sqrt{2}$$

これより，$\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$ となり，$\angle\mathrm{ABC}=120^\circ$ である。



また，$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{ADC}=180^\circ-120^\circ=60^\circ$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\sqrt{2}\cos60^\circ+\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos60^\circ=2\sqrt{2}$$

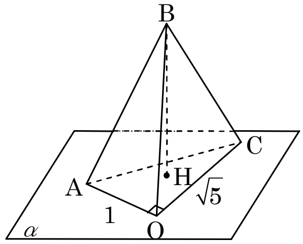
よって，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{a}+2(\vec{c}-\vec{b})=\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}$$

また，四角形 ABCD の面積は，

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+2\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}\sin60^\circ=\frac{1}{2}\cdot6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(3)　まず，3 点 O, A, C の定める平面 α 上に，点 H を $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\vec{a}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\vec{c}$ が成り立つようにとり，



$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{c}$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=s\vec{a}-\vec{b}+t\vec{c}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\vec{a}=0$ から，

$$s|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+t\vec{a}\cdot\vec{c}=0,\quad s-1=0$$

これより $s=1$ となり，また $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\vec{c}=0$ から，

$$s\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}+t|\vec{c}|^2=0,\quad -3+5t=0$$

これより $t=\dfrac{3}{5}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\vec{a}-\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$ と表されるので，

$$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+\frac{9}{25}|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{6}{5}\vec{a}\cdot\vec{c}-\frac{6}{5}\vec{b}\cdot\vec{c}=1+3+\frac{9}{5}-2-\frac{18}{5}=\frac{1}{5}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|=\sqrt{\dfrac{1}{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ となり，三角錐 BOAC の体積 V は，(1)から，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{1}{6}$$

(4)　(2)より，$\mathrm{AD}=2\mathrm{BC}$ となるので，$\triangle\mathrm{ADC}=2\triangle\mathrm{ABC}$ であり，四角錐 OABCD の体積は，$V+2V=3V$ と表せる。

すると，四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD の高さ h は，(2)より，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}h=3V，\ \frac{\sqrt{3}}{2}h=\frac{1}{2}$$

したがって，$h=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ である。

［解 説］

等脚台形は，過去にときどき題材になっていますが，これを底面とした四角錐が対象となった空間ベクトルの応用問題です。誘導は丁寧で，複雑な数値計算もありませんが，ボリュームはかなりのものです。

第５問

問題のページへ

(1)　物質Aの変化量Xに対し，$E(X)=-7$，$\sigma(X)=5$から$V(X)=5^2=25$となり，

$$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=25+(-7)^2=74$$

ここで，$W=1000X=10^3X$とすると，

$$E(W)=10^3E(X)=-7\times10^3,\ V(W)=(10^3)^2V(X)=5^2\times10^6$$

(2)　$X\geqq0$のとき，$\dfrac{X+7}{5}\geqq\dfrac{7}{5}=1.4$から，

$$P(X\geqq0)=P\left(\frac{X+7}{5}\geqq1.4\right)$$

そして，Xが正規分布に従うとするとき，$Z=\dfrac{X+7}{5}$は標準正規分布に従う。

さて，標準正規分布に従う確率変数をZとすると，正規分布表から，

$$P(Z\geqq1.4)=0.5-0.4192\fallingdotseq0.08$$

ここで，無作為に抽出された50人に対し，$X\geqq0$の人数をMとすると，Mは二項分布$B(50,\ 0.08)$に従うことから，

$$E(M)=50\times0.08=4.0$$

$$\sigma(M)=\sqrt{50\times0.08\times(1-0.08)}=\sqrt{4\times0.92}\fallingdotseq\sqrt{3.7}$$

(3)まず，物質Bの変化量Yの母集団分布は，母平均m，母標準偏差6をもつとする。

ここで，mを推定するために，無作為に抽出された100人に対し，物質Bの変化量Yを測定したところ，$\overline{Y}=-10.2$であったので，

$$E(\overline{Y})=m,\ \sigma(\overline{Y})=\frac{6}{\sqrt{100}}=0.6$$

$\overline{Y}$の分布が正規分布で近似できるとすれば，$Z=\dfrac{\overline{Y}-m}{0.6}$は近似的に標準正規分布に従うとみなすことができる。

そこで，正規分布表から，$P(|z|\leqq1.64)=0.4495\times2\fallingdotseq0.90$なので，母平均$m$に対する信頼度90%の信頼区間を求めると，

$$\overline{Y}-1.64\times\sigma(\overline{Y})\leqq m\leqq\overline{Y}+1.64\times\sigma(\overline{Y})$$

すると，$\overline{Y}-1.64\times\sigma(\overline{Y})=-10.2-1.64\times0.6\fallingdotseq-11.2$

$$\overline{Y}+1.64\times\sigma(\overline{Y})=-10.2+1.64\times0.6\fallingdotseq-9.2$$

以上より，$-11.2\leqq m\leqq-9.2$となる。

［解 説］

統計的な推測に関する基本題です。信頼度 90%という見慣れない信頼区間が現れますが，考え方は，教科書にある95%と変わりはありません。