第１問

解答解説のページへ

[1]　a を定数とする。

(1)　直線 $l : y=(a^2-2a-8)x+a$ の傾きが負となるのは，a の値の範囲が

$\boxed{\text{アイ}}<a<\boxed{\text{ウ}}$ のときである。

(2)　$a^2-2a-8\neq 0$ とし，(1)の直線 l と x 軸との交点の x 座標を b とする。

$a>0$ の場合，$b>0$ となるのは $\boxed{\text{エ}}<a<\boxed{\text{オ}}$ のときである。

$a\leqq 0$ の場合，$b>0$ となるのは $a<\boxed{\text{カキ}}$ のときである。

また，$a=\sqrt{3}$ のとき，$b=\dfrac{\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}-\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である。

[2]　自然数 n に関する 3 つの条件 p, q, r を次のように定める。

$p : n$ は 4 の倍数である　　　　$q : n$ は 6 の倍数である

$r : n$ は 24 の倍数である

条件 p, q, r の否定をそれぞれ $\overline{p}$，$\overline{q}$，$\overline{r}$ で表す。

条件 p を満たす自然数全体の集合を P とし，条件 q を満たす自然数全体の集合を Q とし，条件 r を満たす自然数全体の集合を R とする。自然数全体の集合を全体集合とし，集合 P, Q, R の補集合をそれぞれ $\overline{P}$，$\overline{Q}$，$\overline{R}$ で表す。

(1)　次の $\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものを，下の ⓪～⑤のうちから 1 つ選べ。

$32\in\boxed{\text{ス}}$ である。

⓪　$P\cap Q\cap R$　　①　$P\cap Q\cap\overline{R}$　　②　$P\cap\overline{Q}$

③　$\overline{P}\cap Q$　　④　$\overline{P}\cap\overline{Q}\cap R$　　⑤　$\overline{P}\cap\overline{Q}\cap\overline{R}$

(2)　次の $\boxed{\text{タ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪～④のうちから 1 つ選べ。

$P\cap Q$ に属する自然数のうち最小のものは $\boxed{\text{セソ}}$ である。

また，$\boxed{\text{セソ}}\ \boxed{\text{タ}}\ R$ である。

⓪　$=$　　①　$\subset$　　②　$\supset$　　③　$\in$　　④　$\notin$

(3)　次の $\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪～③のうちから 1 つ選べ。

自然数 $\boxed{\text{セソ}}$ は，命題 $\boxed{\text{チ}}$ の反例である。

⓪　「(p かつ q) $\Longrightarrow$ $\overline{r}$」　　①　「(p または q) $\Longrightarrow$ $\overline{r}$」

②　「r $\Longrightarrow$ (p かつ q)」　　③　「(p かつ q) $\Longrightarrow$ r」

[3]　c を定数とする。2 次関数 $y=x^2$ のグラフを，2 点 $(c,\ 0)$，$(c+4,\ 0)$ を通るように平行移動して得られるグラフを G とする。

(1)　G をグラフにもつ 2 次関数は，c を用いて

$$y = x^2 - 2(c + \boxed{\text{ツ}})x + c(c + \boxed{\text{テ}})$$

と表せる。

2 点 $(3,\ 0)$，$(3,\ -3)$ を両端とする線分と G が共有点をもつような c の値の範囲は，$-\boxed{\text{ト}} \leqq c \leqq \boxed{\text{ナ}}$，$\boxed{\text{ニ}} \leqq c \leqq \boxed{\text{ヌ}}$ である。

(2)　$\boxed{\text{ニ}} \leqq c \leqq \boxed{\text{ヌ}}$ の場合を考える。G が点 $(3,\ -1)$ を通るとき，G は 2 次関数 $y = x^2$ のグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{ネ}} + \sqrt{\boxed{\text{ノ}}}$，$y$ 軸方向に $\boxed{\text{ハヒ}}$ だけ平行移動したものである。

また，このとき G と y 軸との交点の y 座標は $\boxed{\text{フ}} + \boxed{\text{ヘ}}\sqrt{\boxed{\text{ホ}}}$ である。

第２問

解答解説のページへ

[1] △ABC において，$BC = 2\sqrt{2}$ とする。∠ACB の二等分線と辺 AB の交点を D とし，$CD = \sqrt{2}$，$\cos\angle BCD = \dfrac{3}{4}$ とする。このとき，$BD = \boxed{\text{ア}}$ であり，

$\sin\angle ADC = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。$\dfrac{AC}{AD} = \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ であるから，$AD = \boxed{\text{カ}}$ である。

また，△ABC の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

[2] (1) 次の $\boxed{\text{コ}}$，$\boxed{\text{サ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪～⑤ のうちから 1 つずつ選べ。ただし，解答の順序は問わない。

99 個の観測値からなるデータがある。四分位数について述べた記述で，どのようなデータでも成り立つものは $\boxed{\text{コ}}$ と $\boxed{\text{サ}}$ である。

⓪ 平均値は第 1 四分位数と第 3 四分位数の間にある。

① 四分位範囲は標準偏差より大きい。

② 中央値より小さい観測値の個数は 49 個である。

③ 最大値に等しい観測値を 1 個削除しても第 1 四分位数は変わらない。

④ 第 1 四分位数より小さい観測値と，第 3 四分位数より大きい観測値とをすべて削除すると，残りの観測値の個数は 51 個である。

⑤ 第 1 四分位数より小さい観測値と，第 3 四分位数より大きい観測値とをすべて削除すると，残りの観測値からなるデータの範囲はもとのデータの四分位範囲に等しい。

(2) 図 1 は，平成 27 年の男の市区町村別平均寿命のデータを 47 都道府県 P1，P2，…，P47 ごとに箱ひげ図にして，並べたものである。

次の(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)は図 1 に関する記述である。

(Ⅰ) 四分位範囲はどの都道府県においても 1 以下である。

(Ⅱ) 箱ひげ図は中央値が小さい値から大きい値の順に上から下へ並んでいる。

(Ⅲ) P1 のデータのどの値と P47 のデータのどの値とを比較しても 1.5 以上の差がある。

次の $\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，右の ⓪～⑦ のうちから 1 つ選べ。

(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)の正誤の組合せとして正しいものは $\boxed{\text{シ}}$ である。

	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(Ⅰ)	正	正	正	誤	正	誤	誤	誤
(Ⅱ)	正	正	誤	正	誤	正	誤	誤
(Ⅲ)	正	誤	正	正	誤	誤	正	誤

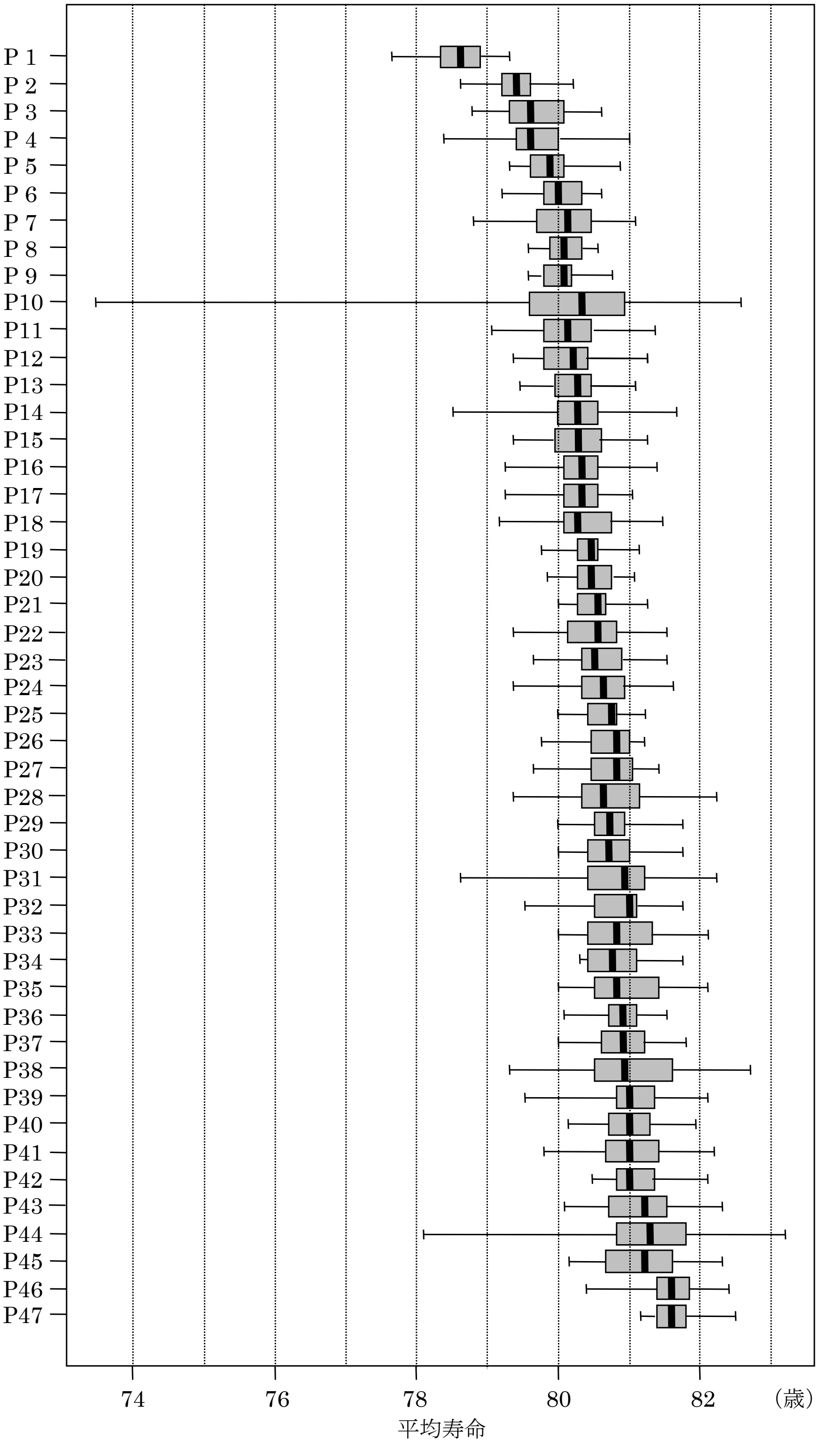


図１　男の市区町村別平均寿命の箱ひげ図
（出典：厚生労働省の Web ページにより作成）

(3) ある県は 20 の市区町村からなる。図 2 はその県の男の市区町村別平均寿命のヒストグラムである。なお，ヒストグラムの各階級の区間は，左側の数値を含み，右側の数値を含まない。

次の $\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものを，下の ⓪～⑦のうちから 1 つ選べ。

図 2 のヒストグラムに対応する箱ひげ図は $\boxed{\text{ス}}$ である。

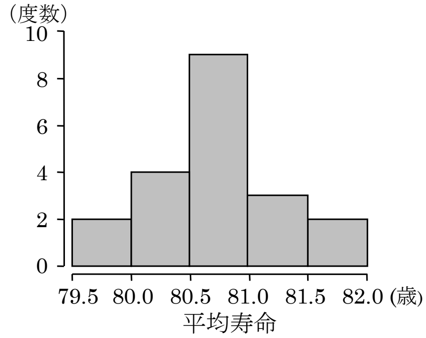
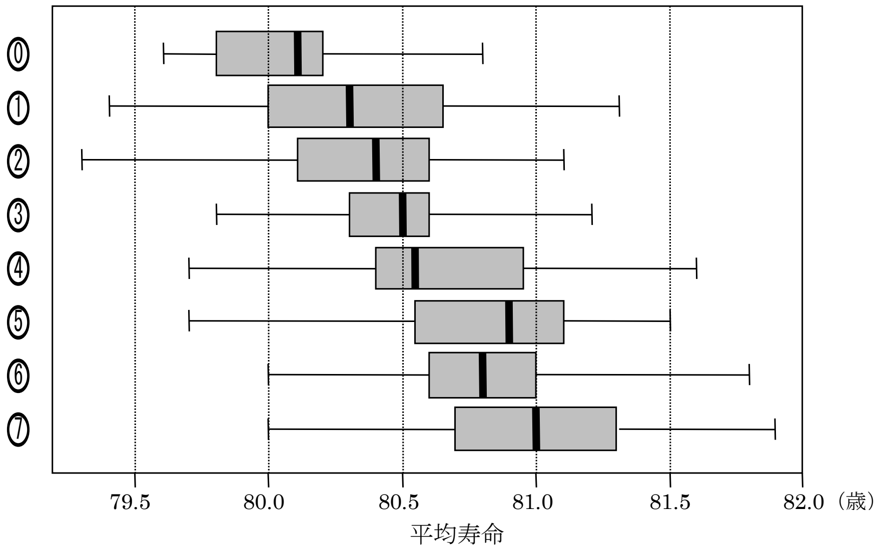


図 2　市区町村別平均寿命のヒストグラム
(出典：厚生労働省の Web ページにより作成)



(4) 図 3 は，平成 27 年の男の都道府県別平均寿命と女の都道府県別平均寿命の散布図である。2 個の点が重なって区別できない所は黒丸にしている。図には補助的に切片が 5.5 から 7.5 まで 0.5 刻みで傾き 1 の直線を 5 本付加している。

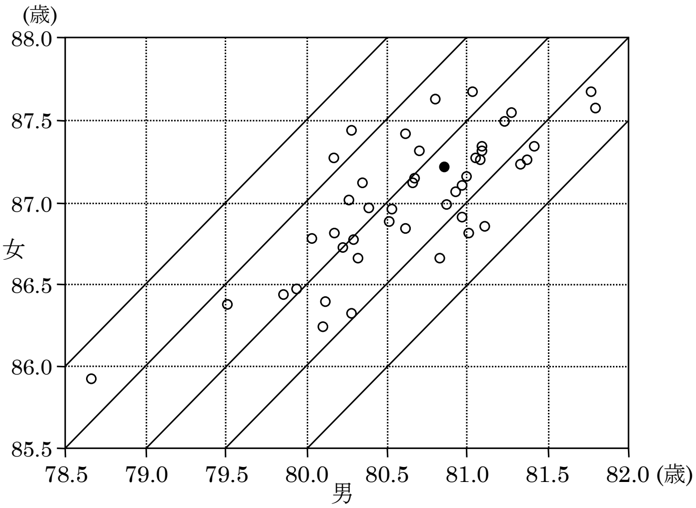
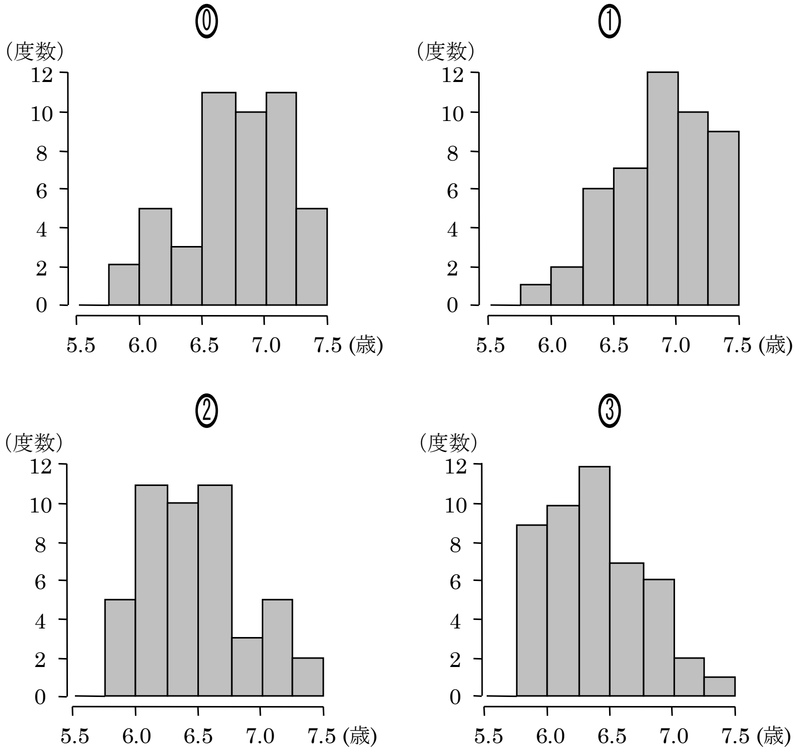


図 3　男と女の都道府県別平均寿命の散布図
(出典：厚生労働省の Web ページにより作成)

次の $\boxed{\quad\text{セ}\quad}$ に当てはまるものを，下の ⓪～③ のうちから１つ選べ。

都道府県ごとに男女の平均寿命の差をとったデータに対するヒストグラムは $\boxed{\quad\text{セ}\quad}$ である。なお，ヒストグラムの各階級の区間は，左側の数値を含み，右側の数値を含まない。



第３問

解答解説のページへ

[1] 次の $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪～③のうちから 1 つずつ選べ。ただし，解答の順序は問わない。

正しい記述は $\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ である。

⓪ 1 枚のコインを投げる試行を 5 回繰り返すとき，少なくとも 1 回は表が出る確率を p とすると，$p > 0.95$ である。

① 袋の中に赤球と白球が合わせて 8 個入っている。球を 1 個取り出し，色を調べてから袋に戻す試行を行う。この試行を 5 回繰り返したところ赤球が 3 回出た。したがって，1 回の試行で赤球が出る確率は $\dfrac{3}{5}$ である。

② 箱の中に「い」と書かれたカードが 1 枚，「ろ」と書かれたカードが 2 枚，「は」と書かれたカードが 2 枚の合計 5 枚のカードが入っている。同時に 2 枚のカードを取り出すとき，書かれた文字が異なる確率は $\dfrac{4}{5}$ である。

③ コインの面を見て「オモテ(表)」または「ウラ(裏)」とだけ発言するロボットが 2 体ある。ただし，どちらのロボットも出た面に対して正しく発言する確率が 0.9，正しく発言しない確率が 0.1 であり，これら 2 体は互いに影響されることなく発言するものとする。いま，ある人が 1 枚のコインを投げる。出た面を見た 2 体が，ともに「オモテ」と発言したときに，実際に表が出ている確率を p とすると，$p \leqq 0.9$ である。

[2] 1 枚のコインを最大で 5 回投げるゲームを行う。このゲームでは，1 回投げるごとに表が出たら持ち点に 2 点を加え，裏が出たら持ち点に -1 点を加える。はじめの持ち点は 0 点とし，ゲーム終了のルールを次のように定める。

・持ち点が再び 0 点になった場合は，その時点で終了する。

・持ち点が再び 0 点にならない場合は，コインを 5 回投げ終わった時点で終了する。

(1) コインを 2 回投げ終わって持ち点が -2 点である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。また，コインを 2 回投げ終わって持ち点が 1 点である確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

(2) 持ち点が再び 0 点になることが起こるのは，コインを $\boxed{\text{キ}}$ 回投げ終わったときである。コインを $\boxed{\text{キ}}$ 回投げ終わって持ち点が 0 点になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(3)　ゲームが終了した時点で持ち点が 4 点である確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である。

(4)　ゲームが終了した時点で持ち点が 4 点であるとき，コインを 2 回投げ終わって持ち点が 1 点である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

第４問

解答解説のページへ

(1) x を循環小数 $2.\dot{3}\dot{6}$ とする。すなわち，$x=2.363636\cdots\cdots$ とする。このとき

$$100\times x-x=236.\dot{3}\dot{6}-2.\dot{3}\dot{6}$$

であるから，x を分数で表すと，$x=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ である。

(2) 有理数 y は，7 進法で表すと，2 つの数字の並び ab が繰り返し現れる循環小数 $2.\dot{a}\dot{b}_{(7)}$ になるとする。ただし，a, b は 0 以上 6 以下の**異なる**整数である。このとき

$$49y-y=2ab.\dot{a}\dot{b}_{(7)}-2.\dot{a}\dot{b}_{(7)}$$

であるから，$y=\dfrac{\boxed{\text{オカ}}+7\times a+b}{\boxed{\text{キク}}}$ と表せる。

(i) y が，分子が奇数で分母が 4 である分数で表されるのは

$$y=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{4} \quad \text{または} \quad y=\frac{\boxed{\text{コサ}}}{4}$$

のときである。$y=\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{4}$ のときは，$7\times a+b=\boxed{\text{シス}}$ であるから，$a=\boxed{\text{セ}}$，$b=\boxed{\text{ソ}}$ である。

(ii) $y-2$ は，分子が 1 で分母が 2 以上の整数である分数で表されるとする。このような y の個数は，全部で $\boxed{\text{タ}}$ 個である。

第５問

解答解説のページへ

△ABC において，辺 BC を7 : 1に内分する点を D とし，辺 AC を7 : 1に内分する点を E とする。線分 AD と線分 BE の交点を F とし，直線 CF と辺 AB の交点を G とすると，$\dfrac{\mathrm{GB}}{\mathrm{AG}} = \boxed{\text{ア}}$，$\dfrac{\mathrm{FD}}{\mathrm{AF}} = \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，$\dfrac{\mathrm{FC}}{\mathrm{GF}} = \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。したがって

$$\frac{\triangle\mathrm{CDG}\text{の面積}}{\triangle\mathrm{BFG}\text{の面積}} = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}$$

となる。

4 点 B，D，F，G が同一円周上にあり，かつ FD = 1 のとき，AB = $\boxed{\text{ケコ}}$ である。さらに，AE = $3\sqrt{7}$ とするとき，AE·AC = $\boxed{\text{サシ}}$ であり，∠AEG = $\boxed{\text{ス}}$ である。

$\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものを，次の ⓪〜③ のうちから 1 つ選べ。

⓪ ∠BGE　　① ∠ADB　　② ∠ABC　　③ ∠BAD

第１問

問題のページへ

[1]　(1)　直線 $l : y=(a^2-2a-8)x+a$ の傾きが負となる a の値の範囲は,

$$a^2-2a-8<0,\ (a+2)(a-4)<0,\ -2<a<4$$

(2)　$a^2-2a-8\neq 0\ (a\neq -2,\ 4)$ のとき, l と x 軸との交点の x 座標が b より,

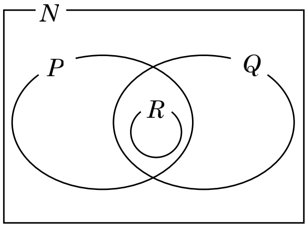
$$0=(a^2-2a-8)b+a,\ b=\frac{-a}{a^2-2a-8}=\frac{-a}{(a+2)(a-4)}\cdots\cdots\cdots(*)$$

$a>0$ の場合, $b>0$ の条件は$(*)$より $(a+2)(a-4)<0$ であり, $0<a<4$

$a\leqq 0$ の場合, $b>0$ の条件は$(*)$より $(a+2)(a-4)>0$ であり, $a<-2$

また, $a=\sqrt{3}$ のとき, $b=\dfrac{-\sqrt{3}}{3-2\sqrt{3}-8}=\dfrac{\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}(5-2\sqrt{3})}{25-12}=\dfrac{5\sqrt{3}-6}{13}$

[2]　自然数 n に関する 3 つの条件 $p : n$ は 4 の倍数, $q : n$ は 6 の倍数, $r : n$ は 24 の倍数に対し, 条件を満たす自然数全体の集合をそれぞれ P, Q, R とする。すると, 4 の倍数かつ 6 の倍数は 12 の倍数であるので, $R\subset(P\cap Q)$ となる。また, 自然数全体の集合を N とおく。



(1)　32 は 4 の倍数であるが 6 の倍数でないので, $32\in P\cap\overline{Q}$

(2)　$P\cap Q$ に属する自然数のうち最小のものは 12 である。また, $12\notin R$ である。

(3)　(2)より, 自然数 12 は命題「(p かつ q) $\Longrightarrow$ r」の反例である。

[3]　(1)　2 点 $(c,\ 0)$, $(c+4,\ 0)$ を通り, $y=x^2$ のグラフを平行移動したグラフ G は,

$$y=(x-c)(x-c-4)=x^2-2(c+2)x+c(c+4)\cdots\cdots\cdots①$$

2 点 $(3,\ 0)$, $(3,\ -3)$ を両端とする線分は, $x=3\ \ (-3\leqq y\leqq 0)\cdots\cdots\cdots②$

①②が共有点をもつ条件は, $-3\leqq 9-6(c+2)+c(c+4)\leqq 0$ となり,

$$-3\leqq c^2-2c-3\leqq 0\cdots\cdots\cdots③$$

$0\leqq c(c-2)$ から $c\leqq 0$, $2\leqq c$ となり, $(c+1)(c-3)\leqq 0$ から $-1\leqq c\leqq 3$

よって, ③を満たす c の値の範囲は, $-1\leqq c\leqq 0$, $2\leqq c\leqq 3$ となる。

(2)　$2\leqq c\leqq 3$ で, G が点 $(3,\ -1)$ を通るとき, $c^2-2c-3=-1$ から,

$$c^2-2c-2=0,\ c=1+\sqrt{3}$$

さて, ①より, $y=(x-c-2)^2+c(c+4)-(c+2)^2=(x-c-2)^2-4$ なので, このとき, G は $y=x^2$ のグラフを x 軸方向に $c+2=(1+\sqrt{3})+2=3+\sqrt{3}$, y 軸方向に -4 だけ平行移動したものである。

さらに, G と y 軸との交点は, ①より,

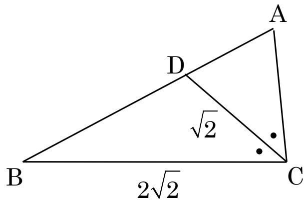
$$y=c(c+4)=(1+\sqrt{3})(5+\sqrt{3})=8+6\sqrt{3}$$

［解 説］

小問 3 題の形式です。[1]は直線の方程式を題材にした 2 次不等式の問題。[2]は集合と論証の基本題。[3]は 2 次関数のグラフについての基本の確認です。

第２問

問題のページへ



[1]　$BC=2\sqrt{2}$ である△ABC において，∠ACBの二等分線と辺 AB の交点を D とすると，$CD=\sqrt{2}$，$\cos\angle BCD=\dfrac{3}{4}$ となり，△BCD に余弦定理を適用すると，

$$BD^2=(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{3}{4}=4$$

これより，$BD=2$ となる。

さて，$\sin\angle BCD=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ から，△BCD に正弦定理を適用すると，

$$\frac{2}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin\angle BDC},\quad \sin\angle BDC=2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{8}=\frac{\sqrt{14}}{4}$$

よって，$\sin\angle ADC=\sin(180^\circ-\angle BDC)=\sin\angle BDC=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

また，線分 CD は∠ACBの二等分線なので，$AD:BD=AC:BC$ から，

$$\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{BD}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

これより，$AD=x$ とおくと $AC=\sqrt{2}x$ となり，△ACD に余弦定理を適用すると，

$$(\sqrt{2}x)^2=(\sqrt{2})^2+x^2-2\sqrt{2}x\cos\angle ADC$$

ここで，$BD^2+CD^2<BC^2$ より $\angle BDC>90^\circ$ となり，$\angle ADC<90^\circ$ である。

すると，$\cos\angle ADC=\sqrt{1-\dfrac{14}{16}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ となり，$2x^2=2+x^2-2\sqrt{2}x\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4}=0$

$$x^2+x-2=0,\ (x+2)(x-1)=0$$

よって，$AD=x=1$ となり，このとき $AC=\sqrt{2}$ から△ACD は二等辺三角形である。

すると，$\sin\angle DAC=\sin\angle ADC=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$ となり，△ABC に正弦定理を適用すると，

△ABCの外接円の半径 R は，

$$R=\frac{2\sqrt{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{14}}{4}}=\frac{4}{\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{7}}{7}$$

[2]　(1)　たとえば, 99 個の観測値について, 0 が 98 個, 1 が 1 個のときを考えると，第 1 四分位数，中央値，第 3 四分位数はすべて 0，四分位範囲は 0，平均値は $\dfrac{1}{99}$ である。

これより, ⓪と①と②と④は成り立たない。

また, 99 個の観測値について，最大値に等しい観測値を 1 個削除して 98 個になったときも，第 1 四分位数は小さい方から並べて 0 番目から 49 番目までの中央値なので変わらない。よって, ③は成り立つ。

さらに, 第 1 四分位数より小さい観測値と, 第 3 四分位数より大きい観測値とをすべて削除した残りの観測値からなるデータの最大値, 最小値は, それぞれもとのデータの第 3 四分位数, 第 1 四分位数に対応する。これより, 残りの観測値のデータの範囲はもとのデータの四分位範囲に等しくなる。よって, ⑤は成り立つ。

(2) 図 1 から, P10 は四分位範囲が 1 より大なので, (Ⅰ)は誤り。P11 の中央値は P10 の中央値より小なので, (Ⅱ)は誤り。また P47 の最小値と P1 の最大値の差は 1.5 以上なので, (Ⅲ)は正しい。

以上より, 正誤の正しい組合せは ⑥である。

(3) 図 2 より, 最大値は 81.5 以上 82.0 未満, 最小値は 79.5 以上 80.0 未満。また, 中央値は 80.5 以上 81.0 未満, 第 1 四分位数は 80.0 以上 80.5 未満である。

これより, 適する箱ひげ図は ④である。

(4) 図 3 において, 男の平均寿命を x, 女の平均寿命を y とおくと, 5 本の直線は,

$$y-x=5.5,\ \ y-x=6.0,\ \ y-x=6.5,\ \ y-x=7.0,\ \ y-x=7.5$$

すると, $5.5<y-x<6.0$ には 9 個のデータがあるので, 適するヒストグラムは ③である。

［解 説］

[1]は三角比の応用。与えられた条件に正弦定理や余弦定理を適用するだけですが, その選択方法には運・不運がつきまといます。なお, 最後の設問は 2 倍角公式という手もあります。[2]はデータの分析。(1)は 6 題中 4 題が誤りなので, 極端な例をまず考えて候補を絞っています。また, (2)以降は図の読み取りだけです。

第３問

問題のページへ

[1] ⓪に対して, 1 枚のコインを繰り返し 5 回投げるとき, 少なくとも 1 回は表が出る確率を p とすると,

$$p=1-\left(\frac{1}{2}\right)^5=1-0.03125>0.95$$

①に対して, 袋の中の赤球の個数を $n(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$ とおくと, 1 回の試行で赤球が出る確率は $\dfrac{n}{8}$ である。しかし, $\dfrac{n}{8}=\dfrac{3}{5}$ を満たす整数 n は存在しない。

②に対して,「い」,「ろ」,「は」と書かれたカードが, それぞれ 1 枚, 2 枚, 2 枚入っている箱から同時に 2 枚のカードを取り出すとき, 書かれた文字が異なる確率は,

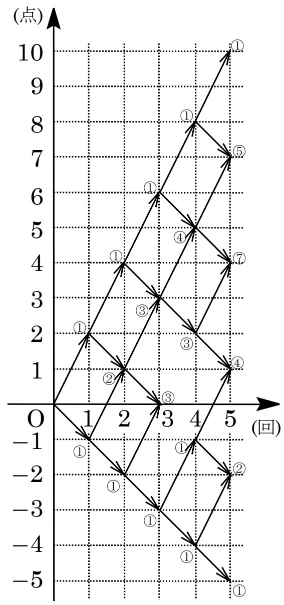
$$1-\frac{1+1}{{}_5\mathrm{C}_2}=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

③に対して, コインが表で 2 体が「オモテ」と発言する確率は, $\dfrac{1}{2}\times0.9\times0.9=0.405$, コインが裏で 2 体が「オモテ」と発言する確率は, $\dfrac{1}{2}\times0.1\times0.1=0.005$ である。これより, 2 体が「オモテ」と発言したときに, 実際に表が出ている条件付き確率 p は,

$$p=0.405\div(0.405+0.005)=\frac{405}{410}=\frac{81}{82}>0.9$$

以上より, 正しい記述は ⓪ と ② である。

[2] コインを投げる回数と持ち点の関係を推移図として表すと右図のようになる。



(1) コインを 2 回投げ終わって持ち点が -2 点である確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$, コインを 2 回投げ終わって持ち点が 1 点である確率は $2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$ である。

(2) 持ち点が再び 0 点になることが起こるのは, コインを 3 回投げ終わったときであり, そのときの確率は,

$$3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$$

(3) ゲームが終了した時点で持ち点が 4 点である確率は,

$$7\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{7}{32}$$

(4) コインを 2 回投げ終わって持ち点が 1 点で, ゲームが終了した時点で持ち点が 4 点である確率は,

$$2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

これより，ゲームが終了した時点で持ち点が 4 点であるとき，コインを 2 回投げ終わって持ち点が 1 点である条件付き確率は,

$$\frac{1}{8}\div\frac{7}{32}=\frac{4}{7}$$

［解 説］

[1]は基本的な正誤問題。[2]は最初に推移図を書いておけば，丸数字で表したルートの数を読み取るだけという問題です。ただ，[1]と[2]を合わせると，かなりの問題量があります。

第４問

問題のページへ

(1)　$x=2.\dot{3}\dot{6}$ とすると，$100x=236.\dot{3}\dot{6}$ となり，$100x-x=236.\dot{3}\dot{6}-2.\dot{3}\dot{6}$

$99x=234$，$x=\dfrac{234}{99}=\dfrac{26}{11}$

(2)　$y=2.\dot{a}\dot{b}_{(7)}$ $(0\leqq a\leqq 6,\ 0\leqq b\leqq 6,\ a\neq b)$ とすると，$7^2y=2ab.\dot{a}\dot{b}_{(7)}$ となり，

$49y-y=2ab.\dot{a}\dot{b}_{(7)}-2.\dot{a}\dot{b}_{(7)}$

すると，$48y=2\times 7^2+a\times 7+b-2$ から，$y=\dfrac{96+7a+b}{48}$

(i)　y の分子が奇数で分母が 4 であるには，$96+7a+b$ が $12\times$(奇数) の倍数であることが必要である。ここで，$0\leqq a\leqq 6,\ 0\leqq b\leqq 6,\ a\neq b$ から，

$97=96+7\cdot 0+1\leqq 96+7a+b\leqq 96+7\cdot 6+5=143$

(a)　$96+7a+b=12\times 9$ のとき　$y=\dfrac{12\times 9}{48}=\dfrac{9}{4}$ となる。

$a,\ b\ (a\neq b)$ は，$96+7a+b=108$ から $7a+b=12$ となり，$a=1$，$b=5$

(b)　$96+7a+b=12\times 11$ のとき　$y=\dfrac{12\times 11}{48}=\dfrac{11}{4}$ となる。

$a,\ b\ (a\neq b)$ は，$96+7a+b=132$ から $7a+b=36$ となり，$a=5$，$b=1$

(ii)　$y-2=\dfrac{96+7a+b}{48}-2=\dfrac{7a+b}{48}$ が，分子が 1 で分母が 2 以上の整数である分数であるには，分子 $7a+b$ が分母 48 の約数であることが必要で，$48=2^4\times 3$ および $1=7\cdot 0+1\leqq 7a+b\leqq 7\cdot 6+5=47$ に留意して，

(a)　$7a+b=1$ のとき　$(a,\ b)=(0,\ 1)$ より適する。

(b)　$7a+b=2$ のとき　$(a,\ b)=(0,\ 2)$ より適する。

(c)　$7a+b=3$ のとき　$(a,\ b)=(0,\ 3)$ より適する

(d)　$7a+b=4$ のとき　$(a,\ b)=(0,\ 4)$ より適する。

(e)　$7a+b=6$ のとき　$(a,\ b)=(0,\ 6)$ より適する。

(f)　$7a+b=8$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 1)$ より $a\neq b$ に反するので不適。

(g)　$7a+b=12$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 5)$ より適する。

(h)　$7a+b=16$ のとき　$(a,\ b)=(2,\ 2)$ より $a\neq b$ に反するので不適。

(i)　$7a+b=24$ のとき　$(a,\ b)=(3,\ 3)$ より $a\neq b$ に反するので不適。

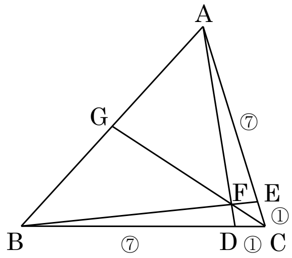
(a)～(i)より，条件を満たす y の個数は全部で 6 個である。

［解 説］

循環小数と記数法についての問題です。問題文中に誘導がついているものの，難易としては標準的な 2 次レベルです。時間的にかなり無理がありそうです。

第５問

問題のページへ



△ABC において，辺 BC, AC を$7:1$に内分する点をそれぞれ D, E とし，線分 AD と線分 BE の交点を F, 直線 CF と辺 AB の交点を G とする。チェバの定理より，

$$\frac{AG}{GB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1,\ \ \frac{GB}{AG}=\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{7}{1}\cdot\frac{1}{7}=1$$

ここで，$AE:EC=BD:DC$ より，$AB\,/\!/\,ED$ となり，

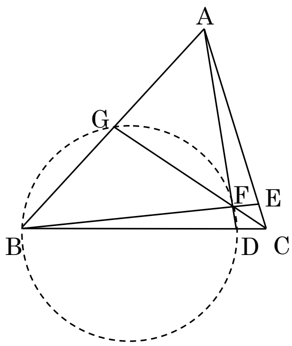
$$\frac{FD}{AF}=\frac{ED}{AB}=\frac{1}{1+7}=\frac{1}{8}$$

また，△BCG と直線 AD に対して，メネラウスの定理を適用すると，

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CF}{FG}\cdot\frac{GA}{AB}=1,\ \ \frac{FC}{GF}=\frac{DC}{BD}\cdot\frac{AB}{GA}=\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{1}=\frac{2}{7}$$

これより，$\triangle CDG=\dfrac{1}{8}\triangle BCG$, $\triangle BFG=\dfrac{7}{7+2}\triangle BCG=\dfrac{7}{9}\triangle BCG$ となり，

$$\frac{\triangle CDG\text{の面積}}{\triangle BFG\text{の面積}}=\frac{1}{8}\div\frac{7}{9}=\frac{9}{56}$$



さて，4 点 B, D, F, G が同一円周上にあり，かつ $FD=1$ のとき，$AF=8FD=8$ となる。ここで，$AB=x$ とおくと，$AG=\dfrac{1}{2}x$ となるので，方べきの定理から，

$$\frac{1}{2}x\cdot x=8\cdot(8+1),\ \ x^2=16\cdot 9$$

よって，$AB=x=4\cdot 3=12$ となる。

さらに，$AE=3\sqrt{7}$ のとき $AC=\dfrac{7+1}{7}AE=\dfrac{24}{7}\sqrt{7}$ となり，

$$AE\cdot AC=3\sqrt{7}\cdot\frac{24}{7}\sqrt{7}=72$$

一方，$AG\cdot AB=6\cdot 12=72$ なので，$AE\cdot AC=AG\cdot AB$ となり，方べきの定理の逆より，4 点 B, C, E, G は同一円周上にある。

よって，$\angle AEG=\angle ABC$ である。

［解 説］

三角形と円を題材にした問題です。誘導に飛躍がないので，スムーズに最後の設問までたどり着けます。