第１問

解答解説のページへ

[1] (1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$\sin\theta > \sqrt{3}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$ ……①となる θ の値の範囲を求めよう。加法定理を用いると

$$\sqrt{3}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}\cos\theta + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{イ}}}\sin\theta$$

である。よって，三角関数の合成を用いると，①は $\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{\boxed{\text{エ}}}\right) < 0$ と変形できる。したがって，求める範囲は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi < \theta < \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi$ である。

(2) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とし，k を実数とする。$\sin\theta$ と $\cos\theta$ は x の 2 次方程式 $25x^2 - 35x + k = 0$ の解であるとする。このとき，解と係数の関係により $\sin\theta + \cos\theta$ と $\sin\theta\cos\theta$ の値を考えれば，$k = \boxed{\text{ケコ}}$ であることがわかる。

さらに，θ が $\sin\theta \geqq \cos\theta$ を満たすとすると，$\sin\theta = \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$，$\cos\theta = \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。このとき，θ は $\boxed{\text{ソ}}$ を満たす。$\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～⑤ のうちから１つ選べ。

⓪ $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{12}$　① $\dfrac{\pi}{12} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{6}$　② $\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4}$

③ $\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{3}$　④ $\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta < \dfrac{5}{12}\pi$　⑤ $\dfrac{5}{12}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$

[2] (1) t は正の実数であり，$t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}} = -3$ を満たすとする。このとき，$t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} = \boxed{\text{タチ}}$ である。さらに，$t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{\boxed{\text{ツテ}}}$，$t - t^{-1} = \boxed{\text{トナニ}}$ である。

(2) x, y は正の実数とする。連立不等式

$$\log_3(x\sqrt{y}) \leqq 5 \text{ ………②},\quad \log_{81}\frac{y}{x^3} \leqq 1 \text{ ………③}$$

について考える。

$X = \log_3 x$，$Y = \log_3 y$ とおくと，②は，$\boxed{\text{ヌ}}\,X + Y \leqq \boxed{\text{ネノ}}$ ……④と変形でき，③は，$\boxed{\text{ハ}}\,X - Y \geqq \boxed{\text{ヒフ}}$ ……⑤と変形できる。

X, Y が④と⑤を満たすとき，Y のとり得る最大の整数の値は $\boxed{\text{ヘ}}$ である。また，x, y が②，③と $\log_3 y = \boxed{\text{ヘ}}$ を同時に満たすとき，x のとり得る最大の整数の値は $\boxed{\text{ホ}}$ である。

第２問

解答解説のページへ

$a>0$ とし，$f(x)=x^2-(4a-2)x+4a^2+1$ とおく。座標平面上で，放物線 $y=x^2+2x+1$ を C, 放物線 $y=f(x)$ を D とする。また，l を C と D の両方に接する直線とする。

(1) l の方程式を求めよう。

l と C は点 $(t,\ t^2+2t+1)$ において接するとすると，l の方程式は

$$y=(\boxed{\text{ア}}\,t+\boxed{\text{イ}})x-t^2+\boxed{\text{ウ}}\quad\cdots\cdots\text{①}$$

である。また，l と D は点 $(s,\ f(s))$ において接するとすると，l の方程式は

$$y=(\boxed{\text{エ}}\,s-\boxed{\text{オ}}\,a+\boxed{\text{カ}})x-s^2+\boxed{\text{キ}}\,a^2+\boxed{\text{ク}}\quad\cdots\cdots\text{②}$$

である。ここで，①と②は同じ直線を表しているので，$t=\boxed{\text{ケ}}$, $s=\boxed{\text{コ}}\,a$ が成り立つ。

したがって，l の方程式は $y=\boxed{\text{サ}}\,x+\boxed{\text{シ}}$ である。

(2) 2 つの放物線 C, D の交点の x 座標は $\boxed{\text{ス}}$ である。

C と直線 l, および直線 $x=\boxed{\text{ス}}$ で囲まれた図形の面積を S とすると，$S=\dfrac{a^{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

(3) $a\geqq\dfrac{1}{2}$ とする。2 つの放物線 C, D と直線 l で囲まれた図形の中で $0\leqq x\leqq 1$ を満たす部分の面積 T は，$a>\boxed{\text{タ}}$ のとき，a の値によらず $T=\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ であり，

$\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq\boxed{\text{タ}}$ のとき，$T=-\boxed{\text{テ}}\,a^3+\boxed{\text{ト}}\,a^2-\boxed{\text{ナ}}\,a+\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

(4) 次に，(2), (3)で定めた S, T に対して，$U=2T-3S$ とおく。a が $\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq\boxed{\text{タ}}$ の範囲を動くとき，U は $a=\dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ で最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒフ}}}$ をとる。

第３問

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$は，初項a_1が 0 であり，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$のとき次の漸化式を満たすものとする。

$$a_{n+1}=\frac{n+3}{n+1}\{3a_n+3^{n+1}-(n+1)(n+2)\}\cdots\cdots\cdots①$$

(1) $a_2=\boxed{ア}$である。

(2) $b_n=\dfrac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}$とおき，数列$\{b_n\}$の一般項を求めよう。

$\{b_n\}$の初項b_1は$\boxed{イ}$である。①の両辺を$3^{n+1}(n+2)(n+3)$で割ると

$$b_{n+1}=b_n+\frac{\boxed{ウ}}{(n+\boxed{エ})(n+\boxed{オ})}-\left(\frac{1}{\boxed{カ}}\right)^{n+1}$$

を得る。ただし，$\boxed{エ}<\boxed{オ}$とする。

したがって，$b_{n+1}-b_n=\left(\dfrac{\boxed{キ}}{n+\boxed{エ}}-\dfrac{\boxed{キ}}{n+\boxed{オ}}\right)-\left(\dfrac{1}{\boxed{カ}}\right)^{n+1}$である。

nを 2 以上の自然数とするとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\boxed{キ}}{k+\boxed{エ}}-\frac{\boxed{キ}}{k+\boxed{オ}}\right)=\frac{1}{\boxed{ク}}\left(\frac{n-\boxed{ケ}}{n+\boxed{コ}}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\boxed{カ}}\right)^{k+1}=\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}-\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\left(\frac{1}{\boxed{カ}}\right)^{n}$$

が成り立つことを利用すると

$$b_n=\frac{n-\boxed{ソ}}{\boxed{タ}(n+\boxed{チ})}-\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\left(\frac{1}{\boxed{カ}}\right)^{n}$$

が得られる。これは$n=1$のときも成り立つ。

(3) (2)より，$\{a_n\}$の一般項は

$$a_n=\boxed{ツ}^{\,n-\boxed{テ}}(n^2-\boxed{ト})+\frac{(n+\boxed{ナ})(n+\boxed{ニ})}{\boxed{ヌ}}$$

で与えられる。ただし，$\boxed{ナ}<\boxed{ニ}$とする。

このことから，すべての自然数nについて，a_nは整数となることがわかる。

(4) kを自然数とする。a_{3k}，a_{3k+1}，a_{3k+2}を 3 で割った余りはそれぞれ$\boxed{ネ}$，$\boxed{ノ}$，$\boxed{ハ}$である。また，$\{a_n\}$の初項から第 2020 項までの和を 3 で割った余りは$\boxed{ヒ}$である。

第４問

解答解説のページへ

点 O を原点とする座標空間に 2 点 $\mathrm{A}(3,\ 3,\ -6)$，$\mathrm{B}(2+2\sqrt{3},\ 2-2\sqrt{3},\ -4)$ をとる。3 点 O, A, B の定める平面を α とする。また，α に含まれる点 C は

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 24 \cdots\cdots\cdots ①$$

を満たすとする。

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boxed{\text{オカ}}$ である。

(2) 点 C は平面 α 上にあるので，実数 s，t を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表すことができる。このとき，①から $s = \dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$，$t = \boxed{\text{コ}}$ である。したがって，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = \boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ である。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CB}} = (\boxed{\text{ス}},\ \boxed{\text{セ}},\ \boxed{\text{ソタ}})$ である。したがって，平面 α 上の四角形 OABC は $\boxed{\text{チ}}$。$\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～④ のうちから 1 つ選べ。ただし，少なくとも 1 組の対辺が平行な四角形を台形という。

⓪ 正方形である

① 正方形ではないが，長方形である

② 長方形ではないが，平行四辺形である

③ 平行四辺形ではないが，台形である

④ 台形ではない

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるので，四角形 OABC の面積は $\boxed{\text{ツテ}}$ である。

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 2\sqrt{6}$ かつ z 座標が 1 であるような点 D の座標は

$$\left(\boxed{\text{ト}} + \frac{\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}},\ \boxed{\text{ヌ}} - \frac{\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{\boxed{\text{ノ}}},\ 1\right)$$

である。このとき $\angle\mathrm{COD} = \boxed{\text{ハヒ}}^\circ$ である。

3 点 O, C, D の定める平面を β とする。α と β は垂直であるので，三角形 ABC を底面とする四面体 DABC の高さは $\sqrt{\boxed{\text{フ}}}$ である。したがって，四面体 DABC の体積は $\boxed{\text{ヘ}}\sqrt{\boxed{\text{ホ}}}$ である。

第５問

解答解説のページへ

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 7 ページの正規分布表を用いてもよい。

ある市の市立図書館の利用状況について調査を行った。

(1) ある高校の生徒 720 人全員を対象に，ある 1 週間に市立図書館で借りた本の冊数について調査を行った。その結果，1 冊も借りなかった生徒が 612 人，1 冊借りた生徒が 54 人，2 冊借りた生徒が 36 人であり，3 冊借りた生徒が 18 人であった。4 冊以上借りた生徒はいなかった。

この高校の生徒から 1 人を無作為に選んだとき，その生徒が借りた本の冊数を表す確率変数を X とする。

このとき，X の平均（期待値）は $E(X)=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，X^2 の平均は $E(X^2)=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。よって，X の標準偏差は $\sigma(X)=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

(2) 市内の高校生全員を母集団とし，ある 1 週間に市立図書館を利用した生徒の割合（母比率）を p とする。この母集団から 600 人を無作為に選んだとき，その 1 週間に市立図書館を利用した生徒の数を確率変数 Y で表す。

$p=0.4$ のとき，Y の平均は $E(Y)=\boxed{\text{キクケ}}$，標準偏差は $\sigma(Y)=\boxed{\text{コサ}}$ になる。ここで，$Z=\dfrac{Y-\boxed{\text{キクケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ とおくと，標本数 600 は十分に大きいので，Z は近似的に標準正規分布に従う。このことを利用して，Y が 215 以下となる確率を求めると，その確率は $0.\boxed{\text{シス}}$ になる。

また，$p=0.2$ のとき，Y の平均は $\boxed{\text{キクケ}}$ の $\dfrac{1}{\boxed{\text{セ}}}$ 倍，標準偏差は $\boxed{\text{コサ}}$ の $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{3}$ 倍である。

(3) 市立図書館に利用者登録のある高校生全員を母集団とする。1 回あたりの利用時間（分）を表す確率変数を W とし，W は母平均 m，母標準偏差 30 の分布に従うとする。この母集団から大きさ n の標本 W_1，W_2，…，W_n を無作為に抽出した。

利用時間が 60 分をどの程度超えるかについて調査するために

$$U_1=W_1-60,\ U_2=W_2-60,\ \cdots,\ U_n=W_n-60$$

とおくと，確率変数 U_1，U_2，…，U_n の平均と標準偏差はそれぞれ

$$E(U_1)=E(U_2)=\cdots=E(U_n)=m-\boxed{\text{タチ}}$$

$$\sigma(U_1)=\sigma(U_2)=\cdots=\sigma(U_n)=\boxed{\text{ツテ}}$$

である。

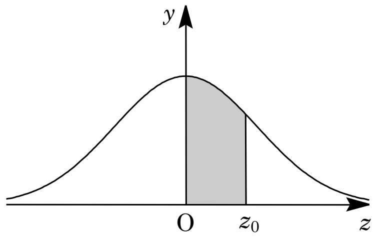
ここで，$t=m-60$ として，t に対する信頼度 95%の信頼区間を求めよう。この母集団から無作為抽出された 100 人の生徒に対して U_1，U_2，$\cdots$，U_{100} の値を調べたところ，その標本平均の値が 50 分であった。標本数は十分に大きいことを利用して，この信頼区間を求めると

$$\boxed{\text{トナ}}.\boxed{\text{ニ}}\leqq t\leqq\boxed{\text{ヌネ}}.\boxed{\text{ノ}}$$

になる。

正 規 分 布 表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

第１問

問題のページへ

[1] (1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$\sin\theta > \sqrt{3}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ ……①に対して，

$$\sqrt{3}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{3}{2}\sin\theta$$

①より，$\sin\theta > \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{3}{2}\sin\theta$ から，$\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta < 0$ となり，

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)<0$$

$\frac{\pi}{3} \leqq \theta + \frac{\pi}{3} < 2\pi + \frac{\pi}{3}$ から，①を満たす θ の値の範囲は $\pi < \theta + \frac{\pi}{3} < 2\pi$ となり，

$$\frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$$

(2) $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ は $25x^2 - 35x + k = 0$ ……(＊)の解なので，

$$\sin\theta + \cos\theta = \frac{7}{5},\quad \sin\theta\cos\theta = \frac{k}{25}$$

すると，$(\sin\theta+\cos\theta)^2 - 2\sin\theta\cos\theta = 1$ より，$\frac{49}{25} - \frac{2}{25}k = 1$ となり，

$$-2k + 24 = 0,\quad k = 12$$

このとき，(＊)は $25x^2 - 35x + 12 = 0$ となり，$(5x-3)(5x-4)=0$

$$x = \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}$$

さらに，$\sin\theta \geqq \cos\theta$ のときは，$\sin\theta = \frac{4}{5}$，$\cos\theta = \frac{3}{5}$ となり，$\tan\theta = \frac{4}{3}$

すると，$1 < \frac{4}{3} < \sqrt{3}$ から $\tan\frac{\pi}{4} < \tan\theta < \tan\frac{\pi}{3}$ となるので，$\frac{\pi}{4} \leqq \theta < \frac{\pi}{3}$

[2] (1) $t > 0$ のとき，$t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}} = -3$ より，

$$t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} = \left(t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}}\right)^2 + 2t^{\frac{1}{3}}t^{-\frac{1}{3}} = (-3)^2 + 2 = 11$$

また，$\left(t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}}\right)^2 = t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} + 2t^{\frac{1}{3}}t^{-\frac{1}{3}} = 11 + 2 = 13$ より，$t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{13}$

さらに，$\left(t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}}\right)\left(t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}}\right) = -3\cdot 11$ より，$t + t^{-\frac{1}{3}} - t^{\frac{1}{3}} - t^{-1} = -33$ となり，

$$t - t^{-1} = -33 + \left(t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}}\right) = -33 + (-3) = -36$$

(2) $x > 0$，$y > 0$ のとき，

$$\log_3(x\sqrt{y}) \leqq 5\ \cdots\cdots\cdots②,\quad \log_{81}\frac{y}{x^3} \leqq 1\ \cdots\cdots\cdots③$$

$X = \log_3 x$，$Y = \log_3 y$ とおくと，②より，$\log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 y \leqq 5$ となるので，

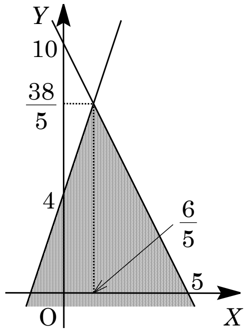
$$X + \frac{1}{2}Y \leqq 5,\quad 2X + Y \leqq 10\ \cdots\cdots\cdots④$$

③より，$\dfrac{\log_3 \dfrac{y}{x^3}}{\log_3 81} \leqq 1$ となり，$\dfrac{1}{4}(\log_3 y - 3\log_3 x) \leqq 1$ から，

$\dfrac{1}{4}(Y-3X) \leqq 1$，$Y-3X \leqq 4$，$3X-Y \geqq -4$ ………⑤

ここで，④と⑤の境界線の交点は，$2X+Y=10$ かつ $3X-Y=-4$ より，

$(X,\ Y)=\left(\dfrac{6}{5},\ \dfrac{38}{5}\right)$



これより，④かつ⑤で表される領域を図示すると，右図の網点部となる。

すると，Y のとり得る最大の整数の値は $Y=7$ である。

このとき X のとり得る値の範囲は，④⑤より，

$2X+7 \leqq 10$，$3X-7 \geqq -4$

よって，$1 \leqq X \leqq \dfrac{3}{2}$ となり，$1 \leqq \log_3 x \leqq \dfrac{3}{2}$ から，

$3 \leqq x \leqq 3^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3}$

すると，$5 < 3\sqrt{3} < 6$ から，x のとり得る最大の整数の値は 5 である。

［解 説］

[1]は三角関数の小問 2 題です。ともに基本的な変形が問われています。[2]は，(1)が指数の計算，(2)が対数不等式と領域の融合問題です。難しい計算はありませんが，問題量としては多めです。

第２問

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^2-(4a-2)x+4a^2+1\ (a>0)$ とし，放物線 $C: y=x^2+2x+1$ ……ⓐ と放物線 $D: y=f(x)$ ……ⓑの両方に接する直線を l とする。

まず, ⓐより $y'=2x+2$ なので, l と C の接点を $(t,\ t^2+2t+1)$ とすると, l の方程式は，$y-(t^2+2t+1)=(2t+2)(x-t)$ より，

$y=(2t+2)x-t^2+1$ ………①

また，$f'(x)=2x-(4a-2)$ なので，l と D の接点を $(s,\ f(s))$ とすると，l の方程式は，$y-\{s^2-(4a-2)s+4a^2+1\}=\{2s-(4a-2)\}(x-s)$ より，

$y=(2s-4a+2)x-s^2+4a^2+1$ ………②

①と②が一致することより，

$2t+2=2s-4a+2$ ………③，$-t^2+1=-s^2+4a^2+1$ ………④

③より $t=s-2a$，④より $t^2=s^2-4a^2$ となり，$t^2=(t+2a)^2-4a^2$ から $4at=0$

$t=0$，$s=2a$

すると，①より，$l: y=2x+1$ となる。

(2)　ⓐⓑを連立して，$x^2+2x+1=x^2-(4a-2)x+4a^2+1$ から，

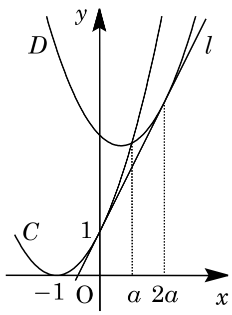
$4ax-4a^2=0$，$x=a$

これより，C と D の交点の x 座標は a である。

さて，C と l，および直線 $x=a$ で囲まれた図形の面積 S は，

$$S=\int_0^a\{(x^2+2x+1)-(2x+1)\}dx=\int_0^a x^2\,dx$$

$$=\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^a=\frac{a^3}{3}$$



(3)　$a\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき, C, D と l で囲まれた図形で $0\leqq x\leqq 1$ を満たす部分の面積 T は,

(i)　$a>1$ のとき　$T=\displaystyle\int_0^1\{(x^2+2x+1)-(2x+1)\}dx=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$

(ii)　$\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 1$ のとき　$2a\geqq 1$ となり，

$$T=\int_0^a\{(x^2+2x+1)-(2x+1)\}dx+\int_a^1\{f(x)-(2x+1)\}dx$$

$$=\frac{a^3}{3}+\int_a^1(x^2-4ax+4a^2)dx=\frac{a^3}{3}+\int_a^1(x-2a)^2\,dx$$

$$=\frac{a^3}{3}+\frac{1}{3}\Big[(x-2a)^3\Big]_a^1=\frac{a^3}{3}+\frac{1}{3}(1-2a)^3-\frac{1}{3}(-a)^3$$

$$=-2a^3+4a^2-2a+\frac{1}{3}$$

(4)　$\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 1$ のとき，$U=2T-3S=-5a^3+8a^2-4a+\dfrac{2}{3}$ とおくと，

$U'=-15a^2+16a-4=-(3a-2)(5a-2)$

ここで，$\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ において U の増減を調べると，右表のようになる。

これより，U は $a=\frac{2}{3}$ で最大値 $\frac{2}{27}$ をとる。

a	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
U'		$+$	0	$-$	
U		$\nearrow$	$\frac{2}{27}$	$\searrow$	

［解 説］

微積分の標準的な総合問題です。ややこしい計算もありません。

第３問

問題のページへ

数列$\{a_n\}$に対して，$a_1=0$，$a_{n+1}=\dfrac{n+3}{n+1}\{3a_n+3^{n+1}-(n+1)(n+2)\}$………①

(1) ①より，$a_2=\dfrac{4}{2}(3a_1+3^2-2\cdot3)=6$

(2) $b_n=\dfrac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}$とおくと，$b_1=\dfrac{a_1}{3\cdot2\cdot3}=0$

ここで，①の両辺を$3^{n+1}(n+2)(n+3)$で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}(n+2)(n+3)}=\frac{1}{3^{n+1}(n+1)(n+2)}\{3a_n+3^{n+1}-(n+1)(n+2)\}$$
$$=\frac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{3^{n+1}}$$

すると，$b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$となり，

$$b_{n+1}-b_n=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\text{………②}$$

ここで，$n\geqq2$のとき，

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}=\frac{n-1}{2(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$$
$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}=\frac{1}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}\Big/\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

したがって，$n\geqq2$のとき，②より，

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}\right\}=0+\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$=\frac{n-2}{3(n+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$（これは$n=1$のときも成り立つ）………③

(3) (2)より，$a_n=3^n(n+1)(n+2)b_n$なので，③より，

$$a_n=3^{n-1}(n+2)(n-2)+\frac{1}{2}(n+1)(n+2)=3^{n-1}(n^2-4)+\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

すべての自然数nについて，$(n+1)(n+2)$は２の倍数よりa_nは整数となる。

(4) $a_1=0$，$a_2=6$で，$n\geqq3$に対して，$3^{n-1}(n^2-4)\equiv0\ (\mathrm{mod}\,3)$

自然数kに対して，以下，mod３で記すと，

$$(3k+1)(3k+2)\equiv2,\ (3k+2)(3k+3)\equiv0,\ (3k+3)(3k+4)\equiv0$$

すると，２と３は互いに素なので，

$$\frac{(3k+1)(3k+2)}{2}\equiv1,\ \frac{(3k+2)(3k+3)}{2}\equiv0,\ \frac{(3k+3)(3k+4)}{2}\equiv0$$

これより，$a_{3k}\equiv1$，$a_{3k+1}\equiv0$，$a_{3k+2}\equiv0$となり，a_{3k}，a_{3k+1}，a_{3k+2}を３で割った余りは，それぞれ1, 0, 0である。

また，a_1 から a_{2020} までの和を S_{2020} とすると，$2020=3\times673+1$ から，

$$S_{2020}=a_1+a_2+(a_3+\cdots+a_{2019})+(a_4+\cdots+a_{2020})+(a_5+\cdots+a_{2018})$$
$$\equiv0+0+1\times673+0\times673+0\times672\equiv673\equiv3\times224+1\equiv1$$

したがって，S_{2020} を 3 で割った余りは 1 である。

［解 説］

漸化式と数列の融合問題です。複雑そうな装いをしていますが，誘導に従うと，(3)までは スムーズに解くことができます。ただ，(4)は剰余を題材とした整数問題ですので状況は異なります。もっとも答の数値は具体例だけで求まってしまいますが。

第４問

問題のページへ

(1)　原点 O とする座標空間に点 A$(3,\ 3,\ -6)$，B$(2+2\sqrt{3},\ 2-2\sqrt{3},\ -4)$ をとると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=3(1,\ 1,\ -2),\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=2(1+\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3},\ -2)$$

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3\sqrt{1+1+4}=3\sqrt{6}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2\sqrt{(4+2\sqrt{3})+(4-2\sqrt{3})+4}=4\sqrt{3}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=6(1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+4)=36$$

(2)　点 C は 3 点 O, A, B の定める平面 α 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

ここで，①より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ となり，

$$s|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+t\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0,\ 54s+36t=0,\ 3s+2t=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

さらに，①より，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=24$ なので，$s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=24$ となり，

$$36s+48t=24,\ 3s+4t=2\ \cdots\cdots\cdots③$$

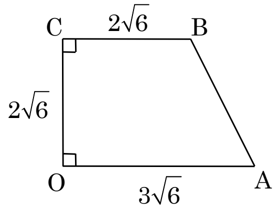
②③より，$s=-\dfrac{2}{3}$，$t=1$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ ……④から，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=\frac{4}{9}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=\frac{4}{9}\cdot 54-\frac{4}{3}\cdot 36+48=24$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=2\sqrt{6}$ となる。

(3)　④より，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\frac{2}{3}\cdot 3(1,\ 1,\ -2)=(2,\ 2,\ -4)$$



これより $\overrightarrow{\mathrm{CB}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であり，また $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ から，四角形 OABC は，平行四辺形ではないが台形である。

また，四角形 OABC の面積は，$\dfrac{1}{2}(2\sqrt{6}+3\sqrt{6})\cdot 2\sqrt{6}=30$ である。

(4)　D$(x,\ y,\ 1)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0$ となり，

$$3(x+y-2)=0,\ x+y-2=0\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\sqrt{6}$ より $\left(-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\sqrt{6}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\sqrt{6},\ 2\{(1+\sqrt{3})x+(1-\sqrt{3})y-2\}=2\sqrt{6}$$

$$(1+\sqrt{3})x+(1-\sqrt{3})y=2+\sqrt{6}\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤⑥より，$(1+\sqrt{3})x+(1-\sqrt{3})(2-x)=2+\sqrt{6}$ となり，$2\sqrt{3}x=2\sqrt{3}+\sqrt{6}$

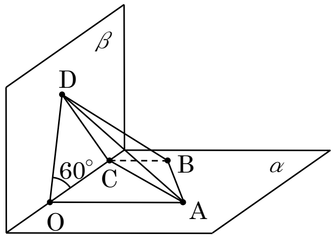
$$x=1+\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=1+\frac{\sqrt{2}}{2},\ y=2-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2=\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1=4$ から，$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=2$ となるので，

$$\cos\angle\mathrm{COD}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|}=\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot 2}=\frac{1}{2}$$

よって，$\angle\mathrm{COD}=60^\circ$ である。

さて，3 点 O, C, D の定める平面を β とすると，$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OD}$ かつ $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC}$ より，直線 OA は平面 β の垂線となる。すると，OA を含む α は β と垂直である。



ここで，△ABC を底面とする四面体 DABC の高さは，D から OC に下した垂線の長さになるので，

$$\mathrm{OD}\sin 60^\circ = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

また，$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}=12$ なので，四面体 DABC の体積は，

$$\frac{1}{3}\cdot 12\cdot\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$

［解 説］

ベクトルの空間図形への応用問題です。与えられた条件が次第に増加していますので，交通整理が必要です。なお，最後の設問は，誘導によって難度が軽減されています。

第５問

問題のページへ

(1) ある高校の生徒全員を対象に，市立図書館で借りた本の冊数についての調査結果をまとめると，右表のようになる。

冊数	0	1	2	3	合計
人数	612	54	36	18	720

ここで，この高校の生徒から 1 人を無作為に選んだとき，その生徒が借りた本の冊数を表す確率変数を X とすると,

X	0	1	2	3	合計
確率	$\frac{34}{40}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{2}{40}$	$\frac{1}{40}$	1

$$E(X)=0\times\frac{34}{40}+1\times\frac{3}{40}+2\times\frac{2}{40}+3\times\frac{1}{40}=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$$

$$E(X^2)=0^2\times\frac{34}{40}+1^2\times\frac{3}{40}+2^2\times\frac{2}{40}+3^2\times\frac{1}{40}=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}$$

すると，Xの分散は$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{16}=\frac{7}{16}$となり，

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

(2) 市内の高校生全員を母集団とし，市立図書館を利用した生徒の割合（母比率）を p とする。この母集団から 600 人を無作為に選んだとき，市立図書館を利用した生徒の数を確率変数 Y で表す。すると，Yは$B(600,\ p)$に従う。

$p=0.4$ のとき，$E(Y)=600\times0.4=240$，$V(Y)=600\times0.4\times(1-0.4)=144$

$$\sigma(Y)=\sqrt{144}=12$$

ここで，$Z=\frac{Y-240}{12}$おくと，Zは近似的に$N(0,\ 1)$に従う。

そして，$Y\leqq215$は$Z\leqq\frac{215-240}{12}=-2.08\dot{3}$に対応し，正規分布表から，

$$P(Z\leqq-2.08)=0.5-0.4812=0.0188$$

$$P(Z\leqq-2.09)=0.5-0.4817=0.0183$$

よって，$P(Y\leqq215)=0.02$になる。

$p=0.2$ のときは，$E(Y)=600\times0.2=\frac{1}{2}\times240$ から $p=0.4$ のときの$\frac{1}{2}$倍になる。

また，$V(Y)=600\times0.2\times(1-0.2)=\frac{0.2\times0.8}{0.4\times0.6}\times144=\frac{2}{3}\times144$ から，

$$\sigma(Y)=\sqrt{\frac{2}{3}}\times12=\frac{\sqrt{6}}{3}\times12$$

すなわち，$p=0.4$ のときの$\frac{\sqrt{6}}{3}$倍になる。

(3) 市立図書館に利用者登録のある高校生全員を母集団とし，1 回あたりの利用時間（分）を表す確率変数を W とする。Wは母平均 m，母標準偏差 30 の分布に従うとき，この母集団から大きさ n の標本W_1，W_2，$\cdots$，W_nを無作為に抽出した。

利用時間が 60 分をどの程度超えるかについて調査するために，確率変数U_1，U_2，$\cdots$，U_nを，$U_1 = W_1 - 60$，$U_2 = W_2 - 60$，$\cdots$，$U_n = W_n - 60$と定めると，

$$E(U_1) = E(U_2) = \cdots = E(U_n) = m - 60$$

$$\sigma(U_1) = \sigma(U_2) = \cdots = \sigma(U_n) = 30$$

この母集団から無作為抽出された 100 人の生徒に対してU_1，U_2，$\cdots$，U_{100}の値を調べたところ，その標本平均の値が 50 分であった。

すると，$t = m - 60$として，tに対する信頼度 95%の信頼区間は，

$$50 - 1.96 \times \frac{30}{\sqrt{100}} \leqq t \leqq 50 + 1.96 \times \frac{30}{\sqrt{100}}$$

$50 - 1.96 \times \frac{30}{\sqrt{100}} = 44.12$，$50 + 1.96 \times \frac{30}{\sqrt{100}} = 55.88$となり，

$$44.1 \leqq t \leqq 55.9$$

［解 説］

確率分布と統計的推測についての基本問題で，独立した小問 3 題という構成です。