

第 1 問

解答解説のページへ

[1] c を正の整数とする。 x の 2 次方程式 $2x^2 + (4c-3)x + 2c^2 - c - 11 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$ について考える。

(1) $c=1$ のとき、 $\textcircled{1}$ の左辺を因数分解すると、 $(\boxed{\text{ア}}x + \boxed{\text{イ}})(x - \boxed{\text{ウ}})$

であるから、 $\textcircled{1}$ の解は $x = -\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ア}}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) $c=2$ のとき、 $\textcircled{1}$ の解は $x = \frac{-\boxed{\text{エ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{オカ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ であり、大きい方の解を α とす

ると、 $\frac{5}{\alpha} = \frac{\boxed{\text{ク}} + \sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。また、 $m < \frac{5}{\alpha} < m+1$ を満たす整数 m は

$\boxed{\text{シ}}$ である。

(3) 太郎さんと花子さんは、 $\textcircled{1}$ の解について考察している。

太郎： $\textcircled{1}$ の解は c の値によって、ともに有理数である場合もあれば、とも無理数である場合もあるね。 c がどのような値のときに、解は有理数になるのかな。

花子：2 次方程式の解の公式の根号の中に着目すればいいんじゃないかな。

$\textcircled{1}$ の解が異なる 2 つの有理数であるような正の整数 c の個数は $\boxed{\text{ス}}$ 個である。

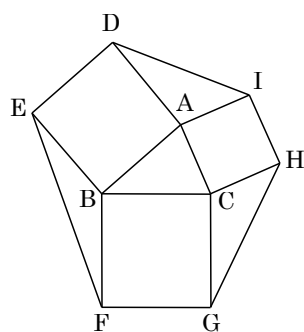
[2] 右の図のように、 $\triangle ABC$ の外側に辺 AB , BC , CA をそれぞれ 1 辺とする正方形 $ADEB$, $BFGC$, $CHIA$ をかき、2 点 E と F , G と H , I と D をそれぞれ線分で結んだ図形を考える。以下において、 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $\angle CAB=A$, $\angle ABC=B$, $\angle BCA=C$ とする。

(1) $b=6$, $c=5$, $\cos A = \frac{3}{5}$ のとき、 $\sin A = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ で

あり、 $\triangle ABC$ の面積は $\boxed{\text{タチ}}$, $\triangle AID$ の面積は $\boxed{\text{ツテ}}$ である。

(2) 正方形 $BFGC$, $CHIA$, $ADEB$ の面積をそれぞれ S_1 , S_2 , S_3 とする。このとき、 $S_1 - S_2 - S_3$ は

- ・ $0^\circ < A < 90^\circ$ のとき、 $\boxed{\text{ト}}$ 。
- ・ $A = 90^\circ$ のとき、 $\boxed{\text{ナ}}$ 。
- ・ $90^\circ < A < 180^\circ$ のとき、 $\boxed{\text{ニ}}$ 。



参考図

～ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

- ① 0 である
 ② 正の値である
 ③ 負の値である
 ④ 正の値も負の値もとる

- (3) $\triangle AID$, $\triangle BEF$, $\triangle CGH$ の面積をそれぞれ T_1 , T_2 , T_3 とする。このとき である。

の解答群

- ① $a < b < c$ ならば, $T_1 > T_2 > T_3$
 ② $a < b < c$ ならば, $T_1 < T_2 < T_3$
 ③ A が鈍角ならば, $T_1 < T_2$ かつ $T_1 < T_3$
 ④ a, b, c の値に関係なく, $T_1 = T_2 = T_3$

- (4) $\triangle ABC$, $\triangle AID$, $\triangle BEF$, $\triangle CGH$ のうち, 外接円の半径が最も小さいものを求める。

$0^\circ < A < 90^\circ$ のとき, ID BC であり

($\triangle AID$ の外接円の半径) ($\triangle ABC$ の外接円の半径)

であるから, 外接円の半径が最も小さい三角形は

- ・ $0^\circ < A < B < C < 90^\circ$ のとき, である。
- ・ $0^\circ < A < B < 90^\circ < C$ のとき, である。

, の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

- ① < ② = ③ >

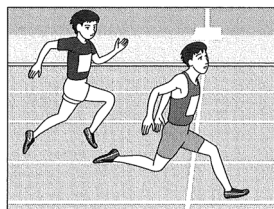
, の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

- ① $\triangle ABC$ ② $\triangle AID$ ③ $\triangle BEF$ ④ $\triangle CGH$

第 2 問

解答解説のページへ

[1] 陸上競技の短距離 100 m 走では、100 m 走るのにかかる時間(以下、タイムと呼ぶ)は、1 歩あたりの進む距離(以下、ストライドと呼ぶ)と 1 秒あたりの歩数(以下、ピッチと呼ぶ)に関係がある。ストライドとピッチはそれぞれ以下の式で与えられる。



$$\text{ストライド(m/歩)} = \frac{100(\text{m})}{100\text{mを走るのにかかった歩数(歩)}}$$

$$\text{ピッチ(歩/秒)} = \frac{100\text{mを走るのにかかった歩数(歩)}}{\text{タイム(秒)}}$$

ただし、100 m を走るのにかかった歩数は、最後の 1 歩がゴールラインをまたぐこともあるので、小数で表される。以下、単位は必要のない限り省略する。

例えば、タイムが 10.81 で、そのときの歩数が 48.5 であったとき、ストライドは $\frac{100}{48.5}$ より約 2.06、ピッチは $\frac{48.5}{10.81}$ より約 4.49 である。

なお、小数の形で解答する場合は、**解答上の注意**にあるように、指定された桁数の 1 つ下の桁を四捨五入して答えよ。また、必要に応じて、指定された桁まで ⑩にマークせよ。

- (1) ストライドを x 、ピッチを z とおく。ピッチは 1 秒あたりの歩数、ストライドは 1 歩あたりの進む距離なので、1 秒あたりの進む距離すなわち平均速度は、 x と z を用いて ア (m/秒) と表される。

これより、タイムと、ストライド、ピッチとの関係は

$$\text{タイム} = \frac{100}{\text{ア}} \cdots \cdots \text{①}$$

と表されるので、ア が最大になるときにタイムが最もよくなる。ただし、タイムがよくなるとは、タイムの値が小さくなることである。

ア の解答群

① $x + z$	② $z - x$	③ xz
④ $\frac{x+z}{2}$	⑤ $\frac{z-x}{2}$	⑥ $\frac{xz}{2}$

- (2) 男子短距離 100 m 走の選手である太郎さんは、①に着目して、タイムが最もよくなるストライドとピッチを考えることにした。

右の表は、太郎さんが練習で 100 m を 3 回走ったときのストライドとピッチのデータである。

	1 回目	2 回目	3 回目
ストライド	2.05	2.10	2.15
ピッチ	4.70	4.60	4.50

また、ストライドとピッチにはそれぞれ限界がある。太郎さんの場合、ストライドの最大値は 2.40、ピッチの最大値は 4.80 である。

太郎さんは、上の表から、ストライドが 0.05 大きくなると、ピッチが 0.1 小さくなるという関係があると考えて、ピッチがストライドの 1 次関数として表されると仮定した。このとき、ピッチ z はストライド x を用いて

$$z = \boxed{\text{イウ}}x + \frac{\boxed{\text{エオ}}}{5} \cdots \cdots \text{②}$$

と表される。

②が太郎さんのストライドの最大値 2.40 とピッチの最大値 4.80 まで成り立つと仮定すると、 x の値の範囲は次のようになる。

$$\boxed{\text{カ}} \leq x \leq 2.40$$

$y = \boxed{\text{ア}}$ とおく。②を $y = \boxed{\text{ア}}$ に代入することにより、 y を x の関数として表すことができる。太郎さんのタイムが最もよくなるストライドとピッチを求めるためには、 $\boxed{\text{カ}} \leq x \leq 2.40$ の範囲で y の値を最大にする x の値を見つければよい。このとき、 y の値が最大になるのは $x = \boxed{\text{ケ}} \cdot \boxed{\text{コサ}}$ のときである。

よって、太郎さんのタイムが最もよくなるのは、ストライドが $\boxed{\text{ケ}} \cdot \boxed{\text{コサ}}$ のときであり、このとき、ピッチは $\boxed{\text{シ}} \cdot \boxed{\text{スセ}}$ である。また、このときの太郎さんのタイムは、①により $\boxed{\text{ソ}}$ である。

$\boxed{\text{ソ}}$ については、最も適当なものを、次の ①～⑤のうちから 1 つ選べ。

① 9.68	① 9.97	② 10.09
③ 10.33	④ 10.42	⑤ 10.55

[2] 就業者の従事する産業は、勤務する事業所の主な経済活動の種類によって、第 1 次産業(農業、林業と漁業)、第 2 次産業(鉱業、建設業と製造業)、第 3 次産業(前記以外の産業)の 3 つに分類される。国の労働状況の調査(国勢調査)では、47 の都道府県別に第 1 次、第 2 次、第 3 次それぞれの産業ごとの就業者数が発表されている。ここでは都道府県別に、就業者数に対する各産業に就業する人数の割合を算出したものを、各産業の「就業者数割合」と呼ぶことにする。

(1) 図 1 は、1975 年度から 2010 年度まで 5 年ごとの 8 個の年度(それぞれを時点という)における都道府県別の 3 つの産業の就業者割合を箱ひげ図で表したものである。各時点の箱ひげ図は、それぞれ上から順に第 1 次産業、第 2 次産業、第 3 次産業のものである。

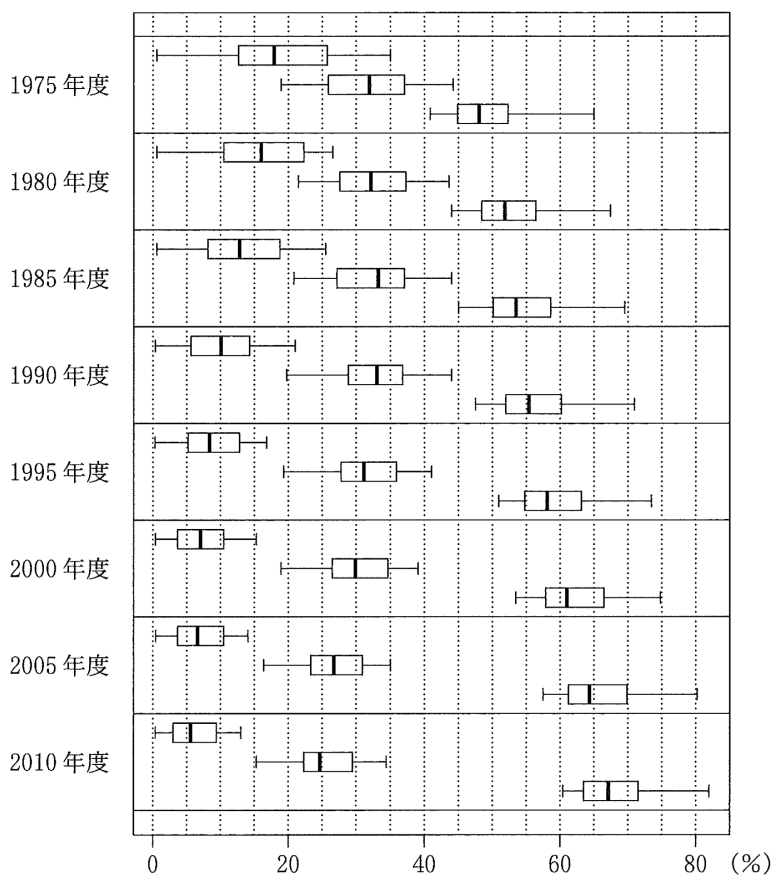


図 1 3つの産業の就業者数割合の箱ひげ図

(出典：総務省の Web ページにより作成)

次の ①～⑤のうち、図 1 から読み取れることとして正しくないものは **タ** と**チ** である。**タ**、**チ** の解答群 (解答の順序は問わない)

- ① 第 1 次産業の就業者数割合の四分位範囲は、2000 年度までは、後の時点になるにしたがって減少している。
- ② 第 1 次産業の就業者数割合について、左側のひげの長さや右側のひげの長さを比較すると、どの時点においても左側の方が長い。
- ③ 第 2 次産業の就業者数割合の中央値は、1990 年度以降、後の時点になるにしたがって減少している。
- ④ 第 2 次産業の就業者数割合の第 1 四分位数は、後の時点になるにしたがって減少している。
- ⑤ 第 3 次産業の就業者数割合の第 3 四分位数は、後の時点になるにしたがって増加している。

- ⑤ 第 3 次産業の就業者数割合の最小値は、後の時点になるにしたがって増加している。

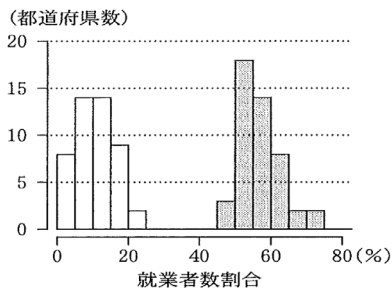
(2) (1)で取り上げた 8 時点の中から 5 時点を取り出して考える。各時点における都道府県別の、第 1 次産業と第 3 次産業の就業者数割合のヒストグラムを 1 つのグラフにまとめてかいたものが、次の 5 つのグラフである。それぞれの右側の網掛けしたヒストグラムが第 3 次産業のものである。なお、ヒストグラムの各階級の区間は、左側の数値を含み、右側の数値を含まない。

・1985 年度におけるグラフは **ツ** である。

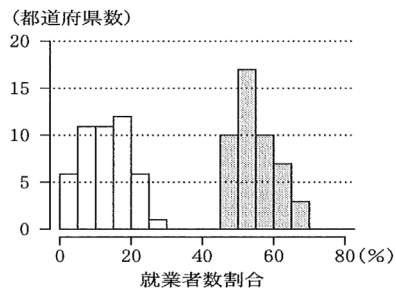
・1995 年度におけるグラフは **テ** である。

ツ、**テ** については、最も適当なものを、次の ①～④のうちから 1 つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

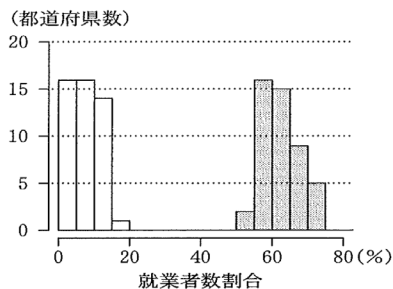
①



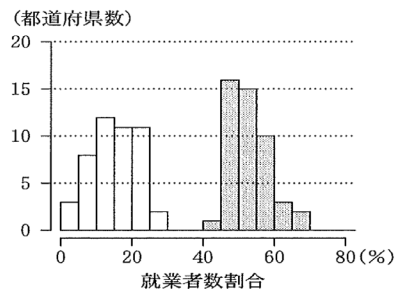
②



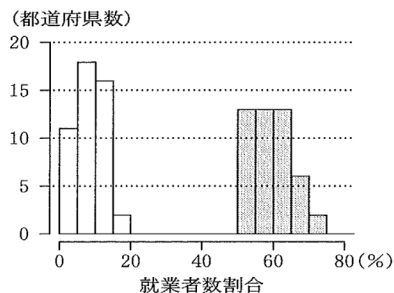
③



④



⑤



(出典：総務省の Web ページにより作成)

- (3) 3つの産業から2つずつを組み合わせる都道府県別の就業者数割合の散布図を作成した。図2の散布図群は、左から順に1975年度における第1次産業(横軸)と第2次産業(縦軸)の散布図、第2次産業(横軸)と第3次産業(縦軸)の散布図、および第3次産業(横軸)と第1次産業(縦軸)の散布図である。また、図3は同様に作成した2015年度の散布図群である。

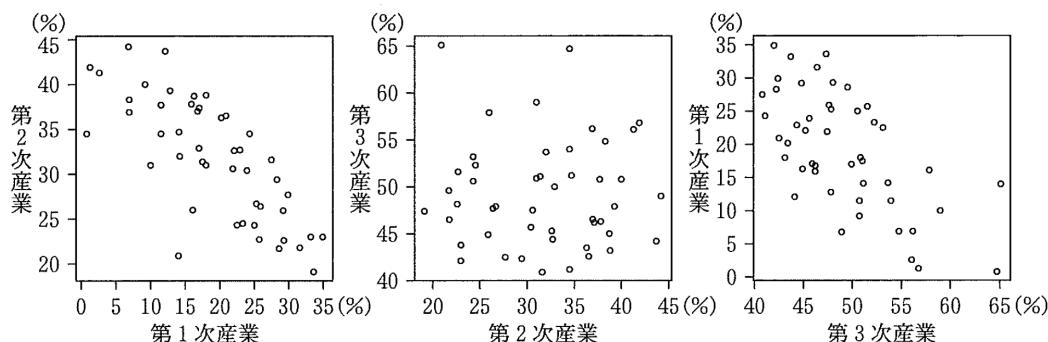


図2 1975年度の散布図群

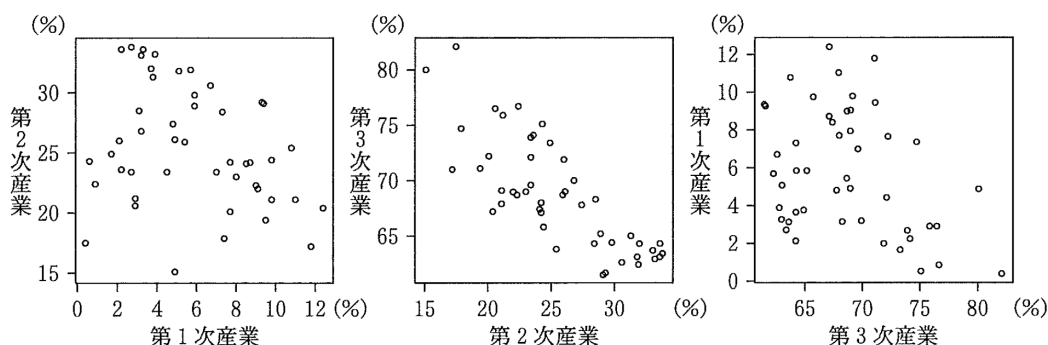


図3 2015年度の散布図群

(出典：図2、図3はともに総務省のWebページにより作成)

下の(I), (II), (III)は、1975年度を基準としたときの、2015年度の変化を記述したものである。ただし、ここで「相関が強くなった」とは、相関係数の絶対値が大きくなったことを意味する。

- (I) 都道府県別の第1次産業の就業者数割合と第2次産業の就業者数割合の間の相関は強くなった。
- (II) 都道府県別の第2次産業の就業者数割合と第3次産業の就業者数割合の間の相関は強くなった。
- (III) 都道府県別の第3次産業の就業者数割合と第1次産業の就業者数割合の間の相関は強くなった。

(I), (II), (III)の正誤の組合せとして正しいものは **ト** である。

ト の解答群

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(I)	正	正	正	正	誤	誤	誤
(II)	正	正	誤	誤	正	正	誤
(III)	正	誤	正	誤	正	誤	正

- (4) 各都道府県の就業者数の内訳として男女別の就業者数も発表されている。そこで、就業者数に対する男性・女性の就業者数の割合をそれぞれ「男性の就業者数割合」、「女性の就業者数割合」と呼ぶことにし、これらを都道府県別に算出した。図 4 は、2015 年度における都道府県別の、第 1 次産業の就業者数割合(横軸)と、男性の就業者数割合(縦軸)の散布図である。

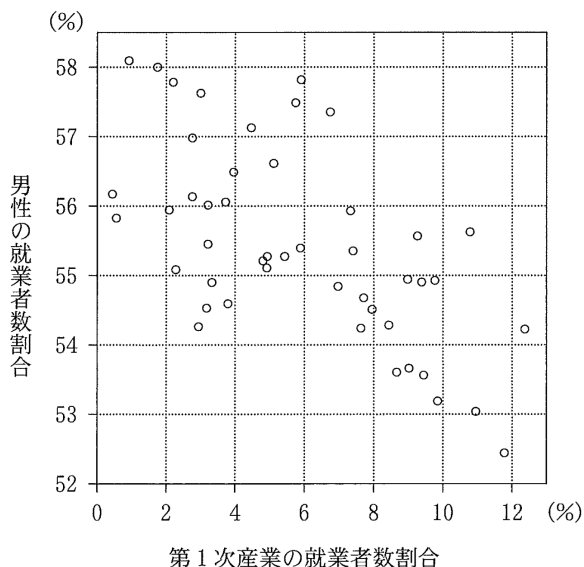


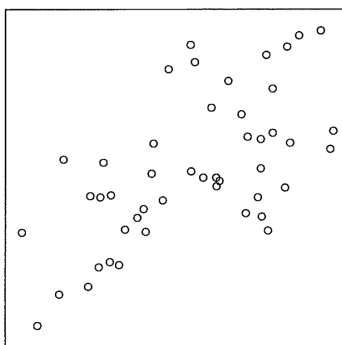
図 4 都道府県別の、第 1 次産業の就業者数割合と、
男性の就業者数割合の散布図

(出典：総務省の Web ページにより作成)

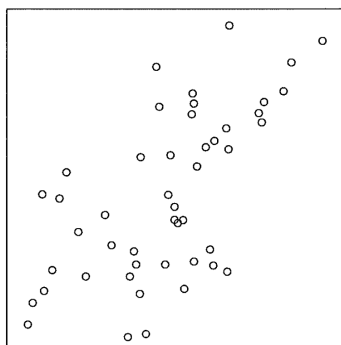
各都道府県の、男性の就業者数と女性の就業者数を合計すると就業者数全体となることに注意すると、2015 年度における都道府県別の、第 1 次産業の就業者数割合(横軸)と女性の就業者数割合(縦軸)の散布図は **ナ** である。

ナ については、最も適当なものを、下の ①～④のうちから 1 つ選べ。なお、設問の都合で各散布図の横軸と縦軸の目盛りは省略しているが、横軸は右方向、縦軸は上方向がそれぞれ正の方向である。

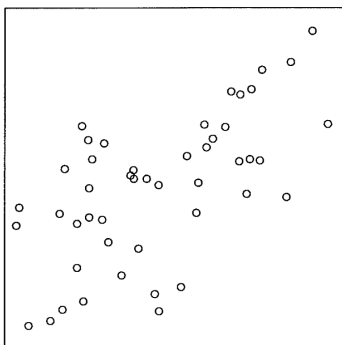
①



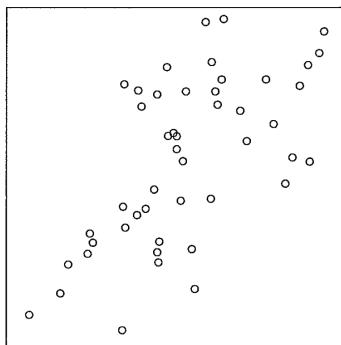
②



③



④



第 3 問

解答解説のページへ

中にくじが入っている箱が複数あり、各箱の外見は同じであるが、当たりくじを引く確率は異なっている。くじ引きの結果から、どの箱からくじを引いた可能性が高いかを、条件付き確率を用いて考えよう。

- (1) 当たりくじを引く確率が $\frac{1}{2}$ である箱 A と、当たりくじを引く確率が $\frac{1}{3}$ である箱 B の 2 つの箱の場合を考える。

- (i) 各箱で、くじを 1 本引いてはもとに戻す試行を 3 回繰り返したとき

箱 A において、3 回中ちょうど 1 回当たる確率は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ ……①

箱 B において、3 回中ちょうど 1 回当たる確率は $\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ ……②

である。

- (ii) まず、A と B のどちらか一方の箱をでたために選ぶ。次にその選んだ箱において、くじを 1 本引いてはもとに戻す試行を 3 回繰り返したところ、3 回中ちょうど 1 回当たった。このとき、箱 A が選ばれる事象を A、箱 B が選ばれる事象を B、3 回中ちょうど 1 回当たる事象を W とすると

$$P(A \cap W) = \frac{1}{2} \times \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \quad P(B \cap W) = \frac{1}{2} \times \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である。 $P(W) = P(A \cap W) + P(B \cap W)$ であるから、3 回中ちょうど 1 回当たったとき、選んだ箱が A である条件付き確率 $P_W(A)$ は $\frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}}$ となる。また、条

件付き確率 $P_W(B)$ は $\frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ となる。

- (2) (1)の $P_W(A)$ と $P_W(B)$ について、次の事実(*)が成り立つ。

事実(*)

$P_W(A)$ と $P_W(B)$ の $\boxed{\text{ス}}$ は、①の確率と②の確率の $\boxed{\text{ス}}$ に等しい。

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

① 和 ② 2 乗の和 ③ 3 乗の和 ④ 比 ⑤ 積

(3) 花子さんと太郎さんは**事実(*)**について話している。

花子：**事実(*)**はなぜ成り立つのかな？

太郎： $P_W(A)$ と $P_W(B)$ を求めるのに必要な $P(A \cap W)$ と $P(B \cap W)$ の計算で、

①、②の確率に同じ数 $\frac{1}{2}$ をかけているからだよ。

花子：なるほどね。外見が同じ3つの箱の場合は、同じ数 $\frac{1}{3}$ をかけることになる

ので、同様なことが成り立ちそうだね。

当たりくじを引く確率が、 $\frac{1}{2}$ である箱 A、 $\frac{1}{3}$ である箱 B、 $\frac{1}{4}$ である箱 C の3つの箱の場合を考える。まず、A、B、Cのうちどれか1つの箱をでたために選ぶ。次にその選んだ箱において、くじを1本引いてはもとに戻す試行を3回繰り返したところ、3回中ちょうど1回当たった。このとき、選んだ箱が A である条件付き確率は

セソタ

チツテ

となる。

(4)

花子：どうやら箱が3つの場合でも、条件付き確率の**ス**は各箱で3回中ちょうど1回当たりくじを引く確率の**ス**になっているみたいだね。

太郎：そうだね。それを利用すると、条件付き確率の値は計算しなくても、その大きさを比較することができるね。

当たりくじを引く確率が、 $\frac{1}{2}$ である箱 A、 $\frac{1}{3}$ である箱 B、 $\frac{1}{4}$ である箱 C、 $\frac{1}{5}$ である箱 D の4つの箱の場合を考える。まず、A、B、C、Dのうちどれか1つの箱をでたために選ぶ。次にその選んだ箱において、くじを1本引いてはもとに戻す試行を3回繰り返したところ、3回中ちょうど1回当たった。このとき、条件付き確率を用いて、どの箱からくじを引いた可能性が高いかを考える。可能性の高い方から順に並べると**ト**となる。

トの解答群

① A, B, C, D

① A, B, D, C

② A, C, B, D

③ A, C, D, B

④ A, D, B, C

⑤ B, A, C, D

⑥ B, A, D, C

⑦ B, C, A, D

⑧ B, C, D, A

第 4 問

解答解説のページへ

円周上に 15 個の点 $P_0, P_1, \dots, P_{14}$ が反時計回りに順に並んでいる。最初、点 P_0 に石がある。さいころを投げて偶数の目が出たら石を反時計回りに 5 個先の点に移動させ、奇数の目が出たら石を時計回りに 3 個先の点に移動させる。この操作を繰り返す。例えば、石が点 P_5 にあるとき、さいころを投げて 6 の目が出たら石を点 P_{10} に移動させる。次に、5 の目が出たら点 P_{10} にある石を点 P_7 に移動させる。

(1) さいころを 5 回投げて、偶数の目が 回、奇数の目が 回出れば、点 P_0 にある石を点 P_1 に移動させることができる。このとき、 $x = \text{ア}$ 、 $y = \text{イ}$ は、不定方程式 $5x - 3y = 1$ の整数解になっている。

(2) 不定方程式 $5x - 3y = 8 \cdots \cdots \text{①}$ のすべての整数解 x, y は、 k を整数として

$$x = \text{ア} \times 8 + \text{ウ} k, y = \text{イ} \times 8 + \text{エ} k$$

と表される。①の整数解 x, y の中で、 $0 \leq y < \text{エ}$ を満たすものは、 $x = \text{オ}$ 、 $y = \text{カ}$ である。したがって、さいころを 回投げて、偶数の目が 回、奇数の目が 回出れば、点 P_0 にある石を点 P_8 に移動させることができる。

(3) (2)において、さいころを 回より少ない回数だけ投げて、点 P_0 にある石を点 P_8 に移動させることはできないだろうか。

(*) 石を反時計回りまたは時計回りに 15 個先の点に移動させると元の点に戻る。

(*)に注意すると、偶数の目が 回、奇数の目が 回出れば、さいころを投げる回数が 回で、点 P_0 にある石を点 P_8 に移動させることができる。このとき、 $<$ である。

(4) 点 $P_1, P_2, \dots, P_{14}$ のうちから点を 1 つ選び、点 P_0 にある石をさいころを何回か投げてその点に移動させる。そのために必要となる、さいころを投げる最小回数を考える。例えば、さいころを 1 回だけ投げて点 P_0 にある石を点 P_2 へ移動させることはできないが、さいころを 2 回投げて偶数の目と奇数の目が 1 回ずつ出れば、点 P_0 にある石を点 P_2 へ移動させることができる。したがって、点 P_2 を選んだ場合には、この最小回数は 2 回である。

点 $P_1, P_2, \dots, P_{14}$ のうち、この最小回数が最も大きいのは点 であり、その最小回数は 回である。

の解答群

① P_{10}	② P_{11}	③ P_{12}	④ P_{13}	⑤ P_{14}
---	---	---	---	---

第 5 問

解答解説のページへ

△ABC において、 $AB = 3$ 、 $BC = 4$ 、 $AC = 5$ とする。

∠BAC の二等分線と辺 BC との交点を D とすると

$$BD = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \quad AD = \frac{\boxed{\text{ウ}} \sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である。

また、∠BAC の二等分線と△ABC の外接円 O との交点で、点 A とは異なる点を E とする。△AEC に着目すると、 $AE = \boxed{\text{カ}} \sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ である。

△ABC の 2 辺 AB と AC の両方に接し、外接円 O に内接する円の中心を P とする。円 P の半径を r とする。さらに、円 P と外接円 O との接点を F とし、直線 PF と外接円 O との交点で点 F とは異なる点を G とする。このとき

$$AP = \sqrt{\boxed{\text{ク}}} r, \quad PG = \boxed{\text{ケ}} - r$$

と表せる。したがって、方べきの定理より $r = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

△ABC の内心を Q とする。内接円 Q の半径は $\boxed{\text{シ}}$ で、 $AQ = \sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ である。

また、円 P と辺 AB との接点を H とすると、 $AH = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

以上から、点 H に関する次の(a), (b)の正誤の組合せとして正しいものは $\boxed{\text{タ}}$ である。

(a) 点 H は 3 点 B, D, Q を通る円の周上にある。

(b) 点 H は 3 点 B, E, Q を通る円の周上にある。

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

	①	②	③	④
(a)	正	正	誤	誤
(b)	正	誤	正	誤

第 1 問

問題のページへ

- [1] (1)
- $2x^2 + (4c - 3)x + 2c^2 - c - 11 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$
- について、
- $c = 1$
- のとき
- $\textcircled{1}$
- の左辺は、

$$2x^2 + x - 10 = (2x + 5)(x - 2)$$

これより、 $\textcircled{1}$ の解は $x = -\frac{5}{2}, 2$ である。

- (2) $c = 2$ のとき $\textcircled{1}$ は $2x^2 + 5x - 5 = 0$ となり、その解は $x = \frac{-5 \pm \sqrt{65}}{4}$ である。

$$\text{ここで、}\alpha = \frac{-5 + \sqrt{65}}{4} \text{ とすると、}\frac{5}{\alpha} = \frac{20}{-5 + \sqrt{65}} = \frac{20(5 + \sqrt{65})}{-25 + 65} = \frac{5 + \sqrt{65}}{2}$$

$$8 < \sqrt{65} < 9 \text{ から } \frac{13}{2} < \frac{5 + \sqrt{65}}{2} < 7 \text{ となるので、} m < \frac{5}{\alpha} < m + 1 \text{ を満たす整数 } m$$

は $m = 6$ である。

- (3) 正の整数 c に対し、 $\textcircled{1}$ の解が異なる 2 つの有理数である条件は、判別式 D が正でしかも平方数であることより、

$$D = (4c - 3)^2 - 8(2c^2 - c - 11) = -16c + 97$$

まず、 $D > 0$ が必要なので、 $0 < c < \frac{97}{16} = 6 + \frac{1}{16}$ から、 $c = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$c = 1 \text{ のとき } D = 81 = 9^2, \quad c = 2 \text{ のとき } D = 65, \quad c = 3 \text{ のとき } D = 49 = 7^2$$

$$c = 4 \text{ のとき } D = 33, \quad c = 5 \text{ のとき } D = 17, \quad c = 6 \text{ のとき } D = 1 = 1^2$$

これより、条件に適するのは $c = 1, 3, 6$ となり、その個数は 3 個である。

- [2] (1)
- $b = 6, c = 5, \cos A = \frac{3}{5}$
- のとき、

$$\sin A = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}, \quad \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 12$$

$$\angle IAD = 180^\circ - A \text{ から、} \sin \angle IAD = \sin A \text{ となり、}$$

$$\triangle AID = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \sin \angle IAD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 12$$

- (2) $S = S_1 - S_2 - S_3$ とおくと、 $S = a^2 - b^2 - c^2$ から、

$$0^\circ < A < 90^\circ \text{ のとき } a^2 < b^2 + c^2 \text{ より } S < 0$$

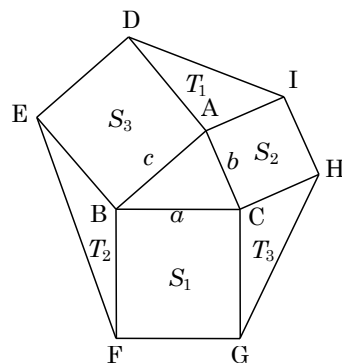
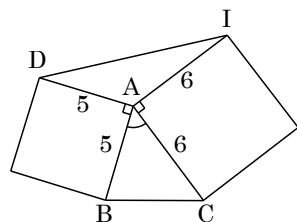
$$A = 90^\circ \text{ のとき } a^2 = b^2 + c^2 \text{ より } S = 0$$

$$90^\circ < A < 180^\circ \text{ のとき } a^2 > b^2 + c^2 \text{ より } S > 0$$

- (3) (1) と同様に、 $T_1 = \frac{1}{2}bc \sin(180^\circ - A) = \frac{1}{2}bc \sin A$

$$T_2 = \frac{1}{2}ca \sin B, \quad T_3 = \frac{1}{2}ab \sin C$$

ここで、 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とおくと、正弦定理から、 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ となり、



$$T_1 = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}, \quad T_2 = \frac{1}{2}ca \cdot \frac{b}{2R} = \frac{abc}{4R}, \quad T_3 = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

よって、③「 a, b, c の値に関係なく $T_1 = T_2 = T_3$ 」である。

(4) 余弦定理から、 $BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ となり、

$$ID^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(180^\circ - A) = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$$

$0^\circ < A < 90^\circ$ のとき $\cos A > 0$ なので、 $ID^2 > BC^2$ 、すなわち $ID > BC$ である。

さて、 $\triangle AID$, $\triangle BEF$, $\triangle CGH$ の外接円の半径を、それぞれ R_1 , R_2 , R_3 とおく。

$$R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{CA}{2\sin B} = \frac{AB}{2\sin C}, \quad R_1 = \frac{ID}{2\sin A}, \quad R_2 = \frac{EF}{2\sin B}, \quad R_3 = \frac{GH}{2\sin C}$$

すると、 $R_1 > R$ 、すなわち ($\triangle AID$ の外接円の半径) $>$ ($\triangle ABC$ の外接円の半径)

また、 $0^\circ < A < B < C < 90^\circ$ のとき、 $R_1 > R$ かつ $R_2 > R$ かつ $R_3 > R$ より、 R が最小となり、外接円の半径が最も小さい三角形は $\triangle ABC$ である。

さらに、 $0^\circ < A < B < 90^\circ < C$ のとき、 $R_1 > R$ かつ $R_2 > R$ 、そして $R_3 < R$ であるので、 R_3 が最小となり、外接円の半径が最も小さい三角形は $\triangle CGH$ である。

【解 説】

[1]は 2 次方程式の解を題材にした基本問題です。[2]は三角比の平面図形への応用問題で、(4)までうまく誘導がつけられています。

第 2 問

問題のページへ

- [1] (1) 100 m 走のタイム t (秒) は、ストライドを x (m/歩)、ピッチを z (歩/秒) とおくと、1 秒あたりの進む距離すなわち平均速度 v (m/秒) が $v = xz$ と表せるので、

$$t = \frac{100}{v} = \frac{100}{xz} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

- (2) z が x の 1 次関数として表されると仮定すると、ストライド $x = 2.10$ のときピッチ $z = 4.60$ で、しかも x が 0.05 大きくなると z が 0.1 小さくなるという関係から、

$$z - 4.60 = -\frac{0.1}{0.05}(x - 2.10), \quad z = -2(x - 2.10) + 4.60$$

$$\text{よって, } z = -2x + 8.80 = -2x + \frac{44}{5} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

ここで、 $z \leq 4.80$ なので、②から $-2x + 8.80 \leq 4.80$ となり、

$$4.00 \leq 2x, \quad 2.00 \leq x$$

そして、 $x \leq 2.40$ と合わせると、 $2.00 \leq x \leq 2.40$ である。

さて、 $y = xz$ とおくと、②から、

$$y = x\left(-2x + \frac{44}{5}\right) = -2x^2 + \frac{44}{5}x = -2\left(x - \frac{11}{5}\right)^2 + \frac{242}{25}$$

すると、 $2.00 \leq x \leq 2.40$ の範囲で y が最大となるのは、 x が $x = \frac{11}{5} = 2.20$ のとき

であり、このとき②から、 $z = -2 \times 2.20 + 8.80 = 4.40$ となる。

そして、このときのタイム t は、①から、

$$t = \frac{100}{2.20 \times 4.40} = \frac{100}{1.1^2 \times 8} = \frac{100}{9.68} \div 10.33$$

- [2] (1) 第 1 次産業の箱ひげ図について、1990 年度は、左側のひげの長さが右側のひげの長さより短い。また、第 2 次産業の箱ひげ図について、1985 年度から 1990 年度にかけては、第 1 四分位数は増加している。

これより、正しくないものは ① と ③ である。

- (2) 1985 年度の箱ひげ図について、第 1 次産業の最大値は 25 以上で 30 未満、第 3 次産業の最小値は 45 以上で 50 未満である。これよりグラフは ① である。

1995 年度の箱ひげ図について、第 1 次産業の最大値は 15 以上で 20 未満、第 3 次産業の第 1 四分位数が 55 程度である。これよりグラフは ④ である。

- (3) 1975 年度から 2015 年度への就業者数割合の変化について、第 1 次産業と第 2 次産業の間の相関は弱くなり、第 2 次産業と第 3 次産業の間の相関は強くなり、第 3 次産業と第 1 次産業の間の相関は弱くなっている。

これより、(I)は誤、(II)は正、(III)は誤であり、正しいものは ⑤ である。

- (4) 図 4 で与えられた第 1 次産業の就業者数割合と男性の就業者数割合の散布図について、第 1 次産業の就業者数割合が 12%前後の 2 点に着目する。
すると、第 1 次産業の就業者数割合と女性の就業者数割合の散布図は ②である。

【解 説】

[1]は 2 次関数の応用題です。最初の空欄がポイントになりますが、ここは単位に注目すると、誤る可能性はないでしょう。「応用」重視の共通テストでは、このような物理で習得する考え方が重要になる場面が今後も多いと思われます。[2]は箱ひげ図や散布図などの読み取り問題です。ポイントは極端な点に注目することです。

第3問

問題のページへ

- (1) (i) 当たりくじを引く確率が、 $\frac{1}{2}$ である箱 A、 $\frac{1}{3}$ である箱 B がある。ここで、く

じを1本引いてはもとに戻す試行を3回繰り返したとき、3回中ちょうど1回当たる確率は、Aでは ${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$ ……①、Bでは ${}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ ……②である。

- (ii) AとBのどちらか一方の箱をでたために選んだとき、箱Aが選ばれる事象をA、箱Bが選ばれる事象をB、3回中ちょうど1回当たる事象をWとおくと、

$$P(A \cap W) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{16}, \quad P(B \cap W) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\text{すると、} P(W) = P(A \cap W) + P(B \cap W) = \frac{3}{16} + \frac{2}{9} = \frac{59}{144} \text{ より、}$$

$$P_W(A) = \frac{P(W \cap A)}{P(W)} = \frac{P(A \cap W)}{P(W)} = \frac{3}{16} \div \frac{59}{144} = \frac{27}{59}$$

$$P_W(B) = \frac{P(W \cap B)}{P(W)} = \frac{P(B \cap W)}{P(W)} = \frac{2}{9} \div \frac{59}{144} = \frac{32}{59}$$

- (2) $P_W(A)$ と $P_W(B)$ の比は、①の確率と②の確率の比に等しい。

- (3) 当たりくじを引く確率が、 $\frac{1}{2}$ である箱 A、 $\frac{1}{3}$ である箱 B、 $\frac{1}{4}$ である箱 C の3つの

箱がある。ここで、くじを1本引いてはもとに戻す試行を3回繰り返したとき、3回中ちょうど1回当たる確率は、Cでは ${}_3C_1\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64}$ ……③である。

$$P(A \cap W) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{8}, \quad P(B \cap W) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{27}, \quad P(C \cap W) = \frac{1}{3} \times \frac{27}{64} = \frac{9}{64}$$

$$P(W) = P(A \cap W) + P(B \cap W) + P(C \cap W) = \frac{1}{8} + \frac{4}{27} + \frac{9}{64} = \frac{715}{64 \times 27} \text{ より、}$$

$$P_W(A) = \frac{P(A \cap W)}{P(W)} = \frac{1}{8} \div \frac{715}{64 \times 27} = \frac{216}{715}$$

- (4) 当たりくじを引く確率が、 $\frac{1}{2}$ である箱 A、 $\frac{1}{3}$ である箱 B、 $\frac{1}{4}$ である箱 C、 $\frac{1}{5}$ である箱 D の4つの箱がある。くじを1本引いてはもとに戻す試行を3回繰り返した

とき、3回中ちょうど1回当たる確率は、Dでは ${}_3C_1\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{48}{125}$ ……④である。

$$\text{①②③④より、} P_W(A) : P_W(B) : P_W(C) : P_W(D) = \frac{3}{8} : \frac{4}{9} : \frac{27}{64} : \frac{48}{125} \text{ となり、}$$

$$P_W(B) > P_W(C) > P_W(D) > P_W(A)$$

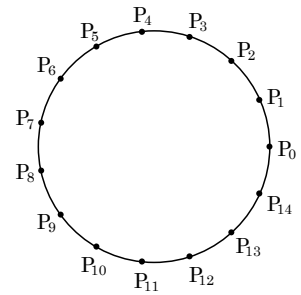
[解説]

条件付き確率に関する問題です。問題の対話文中に方針が示されており、それを利用することが重要です。なお、最後の不等式は概数計算で確定しています。

第 4 問

問題のページへ

- (1) 右図の円周上の 15 個の点 $P_0, P_1, \dots, P_{14}$ に対して、最初、石が点 P_0 にあり、さいころを投げて偶数の目が出たら石を反時計回りに 5 個先の点に移動させ、奇数の目が出たら石を時計回りに 3 個先の点に移動させる。



ここで、さいころを 5 回投げて、偶数の目が x 回、奇数の目が y 回出て、点 P_0 にある石が P_1 に移動したとすると、

$$x + y = 5, \quad 5x - 3y = 1$$

よって、 $x = 2, y = 3$ である。

- (2) 不定方程式 $5x - 3y = 8 \cdots \cdots \textcircled{1}$ に対して、(1) から、 $5 \times 2 \times 8 - 3 \times 3 \times 8 = 8$ なので、

$$5(x - 2 \times 8) - 3(y - 3 \times 8) = 0, \quad 5(x - 2 \times 8) = 3(y - 3 \times 8)$$

3 と 5 は互いに素なので、 k を整数として、 $x - 2 \times 8 = 3k, y - 3 \times 8 = 5k$

$$x = 2 \times 8 + 3k = 16 + 3k, \quad y = 3 \times 8 + 5k = 24 + 5k$$

ここで、 $0 \leq y < 5$ を満たすのは、 $k = -4$ だけであり、このとき、

$$x = 4, \quad y = 4, \quad x + y = 8$$

- (3) 点 P_0 にある石を P_8 に移動させるには、与えられた条件(*)から、 $8 - 15 = -7$ だけの移動にも対応するので、(2) と同様に、 $5x - 3y = -7 \cdots \cdots \textcircled{2}$

(1) から、 $5 \times 2 \times (-7) - 3 \times 3 \times (-7) = -7, 5 \times (-14) - 3 \times (-21) = -7$ となり、

$$5(x + 14) - 3(y + 21) = 0, \quad 5(x + 14) = 3(y + 21)$$

3 と 5 は互いに素なので、 l を整数として、 $x + 14 = 3l, y + 21 = 5l$

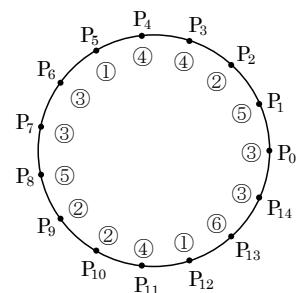
$$x = 3l - 14, \quad y = 5l - 21$$

ここで、 $x \geq 0, y \geq 0$ から $l \geq 5$ となり、 $x + y = 8l - 35$ は $l = 5$ で最小になり、

$$x = 1, \quad y = 4, \quad x + y = 5$$

- (4) 点 P_0 にある石を、 $P_1, P_2, \dots, P_{14}$ に移動させるための、さいころを投げる回数の最小数は、状態の遷移図を用いて調べ、まとめると右図の丸数字で表される。

これより、この最小回数が最も大きい点は P_{13} であり、その最小回数は 6 回である。



[解 説]

不定方程式の応用題です。(3) は一般的に解くこともできますが、時間的な制約を考えると上のような解法になるでしょう。また、(4) は移動する点を 1 つずつ調べていくという「原始的」な方法で処理しています。図の記述は省略しましたが。

第5問

問題のページへ

$AB=3$, $BC=4$, $AC=5$ である直角三角形 ABC に対して、 $\angle BAC$ の二等分線と辺 BC との交点を D とすると、 $BD:DC=3:5$ から、

$$BD = \frac{3}{8} \times 4 = \frac{3}{2}, \quad AD = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

直線 AD と $\triangle ABC$ の外接円 O との交点を E とすると、 $\triangle ABD$ と $\triangle AEC$ が相似なので、 $AB:AE=AD:AC$ より、

$$AE = \frac{AB \cdot AC}{AD} = 3 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

次に、2 辺 AB と AC の両方に接し、外接円 O に内接する円の中心を P 、半径を r とすると、 P は直線 AD 上にあり、さらに円 P と外接円 O との接点を F 、直線 PF と外接円 O との交点を G とすると、 $r:BD=AP:AD$ より、

$$AP = \frac{AD}{BD} r = \frac{3\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{3} r = \sqrt{5}r$$

また、外接円 O の直径が 5 なので、 $PG=FG-FP=5-r$ となり、方べきの定理から $PF \times PG = PA \times PE$ より、

$$r(5-r) = \sqrt{5}r(2\sqrt{5} - \sqrt{5}r), \quad r(5-r) = 5r(2-r)$$

$r > 0$ から $5-r=5(2-r)$ となり、 $r = \frac{5}{4}$ である。

ここで、 $\triangle ABC$ の内心を Q 、内接円 Q の半径を s とおくと、
 $(3-s) + (4-s) = 5$, $s=1$

さらに、 $AP = \sqrt{5}r$ から、 $AQ = \sqrt{5}s = \sqrt{5}$ である。

また、円 P と辺 AB との接点を H とすると、

$$AH = \sqrt{(\sqrt{5}r)^2 - r^2} = 2r = \frac{5}{2}$$

以上から、 $AH \times AB = \frac{5}{2} \cdot 3 = \frac{15}{2}$ となり、

$$AQ \times AD = \sqrt{5} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{5} = \frac{15}{2}, \quad AQ \times AE = \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 10$$

すると、 $AH \times AB = AQ \times AD$, $AH \times AB \neq AQ \times AE$ となり、方べきの定理の逆から、点 H は、3 点 B, D, Q を通る円の周上にあるが、3 点 B, E, Q を通る円の周上にはない。

[解 説]

三角形と円についての基本的な設問の組合せです。ただ、量的には、見かけよりかなり多めで、手際よく処理することが肝要です。

