第１問

解答解説のページへ

[1]　a, b を実数とする。x についての方程式

$$(2a+4b-2)x^2+(5a+11)x-b-8=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

を考える。

(1)　$a=1$ とする。b に着目すると，①の左辺は，$(4x^2-1)b+16x-8$ ……②と表せる。よって，②を因数分解すると，$(2x-1)\left(\boxed{\text{ア}}bx+b+\boxed{\text{イ}}\right)$となる。したがって，$x=\dfrac{1}{2}$ は①の解の 1 つであることがわかる。

(2)　$b=2$ とする。

(i)　①の左辺を因数分解すると，$\left(\boxed{\text{ウ}}x+\boxed{\text{エ}}\right)\left\{\left(a+\boxed{\text{オ}}\right)x-\boxed{\text{カ}}\right\}$

となる。

(ii)　$a=2\sqrt{2}$ のとき，①の解は，$x=-\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，$\boxed{\text{キ}}-\boxed{\text{ク}}\sqrt{2}$ となる。

(iii)　$a=-\boxed{\text{オ}}$ であることは，①の解が $x=-\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ だけであるための $\boxed{\text{ケ}}$。

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

⓪	必要条件であるが，十分条件ではない
①	十分条件であるが，必要条件ではない
②	必要十分条件である
③	必要条件でも十分条件でもない

[2]　図 1 のように直線 l 上の点 A において l に接する半径 2 の円を円 O とし，l 上の点 B において l に接する半径 4 の円を円 O′ とする。円 O と O′ は 2 点で交わるとし，その交点を P，Q とする。ただし，$\angle \mathrm{APB} < \angle \mathrm{AQB}$ とする。さらに，$\angle \mathrm{PAB}$ は鋭角であるとする。このとき，△PAB と△QAB について考えよう。

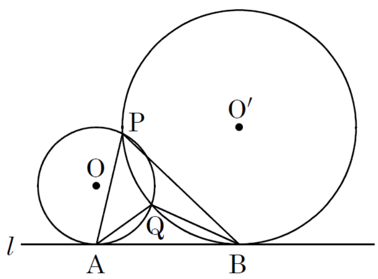


図　1

(1)　$\angle \mathrm{PAB}=\alpha$，$\angle \mathrm{PBA}=\beta$ とおく。円 O の中心 O から直線 PA に引いた垂線と直線 PA との交点を H とする。$\angle \mathrm{OAB}=90^\circ$ であるから，$\angle \mathrm{AOH}=\alpha$ である。よって，△OAH に着目すると，$\mathrm{AH}=\boxed{\text{コ}}\sin\alpha$ であるから，

$\mathrm{PA}=2\mathrm{AH}=\boxed{\text{サ}}\sin\alpha$ ……①である。

同様にして，円 O′ の中心 O′ から直線 PB に引いた垂線と直線 PB との交点を H′ とすると，$\mathrm{PB}=2\mathrm{BH'}=\boxed{\text{シ}}\sin\beta$ ……②であることもわかる。

また，△PAB の外接円の半径を R_1 とおくと，正弦定理により

$$\frac{\mathrm{PA}}{\sin \boxed{\text{ス}}} = \frac{\mathrm{PB}}{\sin \boxed{\text{セ}}} = 2R_1$$

が成り立つので，$\mathrm{PA}\sin \boxed{\text{セ}} = \mathrm{PB}\sin \boxed{\text{ス}}$ である。この式に，①と②を代入することにより，$\sin \boxed{\text{セ}} = \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}\ \sin \boxed{\text{ス}}$，$\mathrm{PB} = \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}\,\mathrm{PA}$ となることがわかる。さらに，$R_1 = \boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}$ が得られる。

$\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ α	① β

(2)　太郎さんと花子さんは，(1)の考察を振り返っている。

太郎：△QAB の外接円の半径も求められるかな。
花子：(1)の R_1 の求め方を参考にすればよさそうだね。

△PAB，△QAB の外接円の半径をそれぞれ R_1，R_2 とおく。このとき，R_1 $\boxed{\text{ツ}}$ R_2 である。さらに，$\sin\angle\mathrm{APB}$ $\boxed{\text{テ}}$ $\sin\angle\mathrm{AQB}$ であることもわかる。

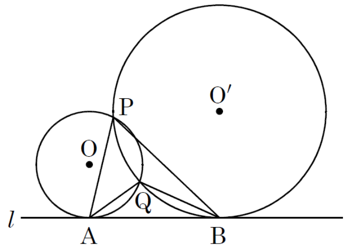


図 1（再掲）

$\boxed{\text{ツ}}$，$\boxed{\text{テ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ $<$	① $=$	② $>$

(3)　太郎さんと花子さんは，これまでの考察をもとに，△PAB と△QAB の辺の長さについて考えている。

太郎：AB の長さが与えられれば，PA と QA の長さが求められそうだね。
花子：$\angle\mathrm{APB} < \angle\mathrm{AQB}$ に注意して求めてみようよ。

$\mathrm{AB} = 2\sqrt{7}$ とする。このとき，$\sin\angle\mathrm{APB} = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{トナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である。(1)より，

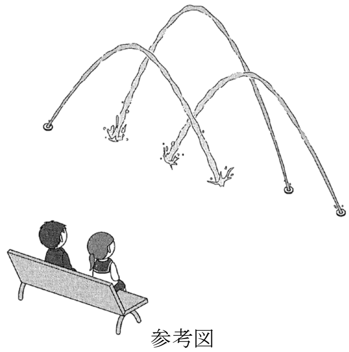
$\mathrm{PB} = \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}\,\mathrm{PA}$ であるから，$\mathrm{PA} = \sqrt{\boxed{\text{ヌネ}}}$ である。

同様に，$\mathrm{QA} = \sqrt{7}$ であることがわかる。

第２問

解答解説のページへ

[1]　花子さんと太郎さんは，公園にある 2 つの小さな噴水と 1 つの大きな噴水の高さについて話している。



参考図

花子：あの中央の大きな噴水の高さは何メートルだろう。
太郎：実際に高さを測定するのは難しそうだね。噴水の水がえがく曲線は，放物線になると聞いたことがあるよ。
花子：じゃあ，放物線と仮定して，およその高さを考えてみよう。

花子さんと太郎さんは，噴水の高さについて次のように考えることにした。噴水の水がえがく曲線は 3 つとも放物線とする。3 つの噴水の水が出る位置は水平な地面にある。図 1 のように座標軸が定められた平面上に，3 つの噴水を正面から見た図をかく。左右の小さな噴水の水がえがく放物線については後の**仮定 1** を，中央の大きな噴水の水がえがく放物線については後の**仮定 2** を設定する。図 1 の P_1，P_2，P_3 は噴水の水が出る位置である。なお，長さの単位はメートルであるが，以下では省略する。

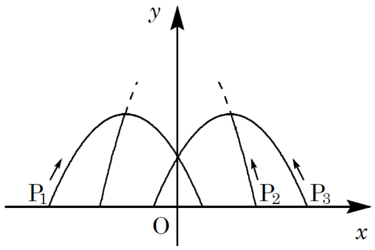


図　1

仮定 1

・左側の小さな噴水の水がえがく放物線 C_1 は，x 軸上の点 $\mathrm{P}_1\left(-\frac{5}{2},\ 0\right)$ から出て点 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ に至る。

・右側の小さな噴水の水がえがく放物線 C_3 は，x 軸上の点 $\mathrm{P}_3\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$ から出て点 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$ に至る。

・C_1 と C_3 はともに点 $(0,\ 1)$ を通る。

仮定 2

中央の大きな噴水の水がえがく放物線 C_2 は，x 軸上の点 $\mathrm{P}_2\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$ から出て C_3 の頂点と C_1 の頂点を通る。

(1)　**仮定 1** と**仮定 2** のもとで考える。C_1 をグラフにもつ 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。このとき $c=\boxed{\text{ア}}$ であり，また

$$y=-\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}x^2-\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}x+\boxed{\text{ア}}$$

である。

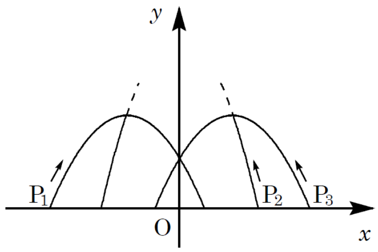


図 1（再掲）

C_1 の頂点の y 座標は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。このことを用いると，C_2 の頂点の y 座標は $\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ であることがわかる。

したがって，大きな噴水の高さは，小さな噴水の高さの $\boxed{\text{シ}}$ である。

$\boxed{\text{シ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～③ のうちから 1 つ選べ。

⓪　およそ 2 倍	①　およそ 3 倍
②　およそ 4 倍	③　およそ 5 倍

(2)　花子さんと太郎さんは，大きな噴水の高さについて話している。

花子：正面から見たとき，大きな噴水が小さな噴水の頂点を通って見えるというデザインは変えずに，大きな噴水の高さを変えることはできるのかな。

太郎：左右の 2 つの小さな噴水は変えずに，大きな噴水の水か出る位置を変えてみたらどうかな。

花子：大きな噴水の高さが 5 メートルになるときの水が出る位置を考えてみよう。

仮定 2 の代わりに次の**仮定 2′** をおく。

仮定 2′

- 中央の大きな噴水の水がえがく放物線 $C_2{}'$ は，x 軸の正の部分の点 $\mathrm{P_2}'$ から出て C_3 の頂点と C_1 の頂点を通る。
- $C_2{}'$ の頂点の y 座標は 5 である。

仮定 1 と**仮定 2′** のもとで考える。このとき，$\mathrm{P_2}'$ は $\mathrm{P_2}$ より $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ だけ $\boxed{\text{ソ}}$ の方にある。

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

⓪　$\mathrm{P_1}$	①　$\mathrm{P_3}$

[2] 以下の問題を解答するにあたっては，与えられたデータに対して，次の値を外れ値とする。

「(第 1 四分位数)－1.5×(四分位範囲)」以下の値
「(第 3 四分位数)＋1.5×(四分位範囲)」以上の値

太郎さんは，47 都道府県における外国人宿泊者数と日本人宿泊者数の動向を調べるため，それらに関するデータを分析することにした。外国人宿泊者数を，日本国内に住所を有しない宿泊者の人数の 1 年間の合計とし，日本人宿泊者数を，日本国内に住所を有する宿泊者の人数の 1 年間の合計とする。宿泊者数に関するデータは千の位を四捨五入し，1 万人単位で表したものとし，以下においては単位(万人)を省略して用いることとする。例えば，「4567890 人」は「457」とする。

なお，以下の図や表については，国土交通省の Web ページをもとに作成している。

(1) (i) 図 1 は，47 都道府県における令和 4 年の外国人宿泊者数と日本人宿泊者数の散布図である。なお，散布図には原点を通り，傾きが 10 の直線(破線)を付加している。また，日本人宿泊者数が 1000 を超える都道府県の数は 12 である。

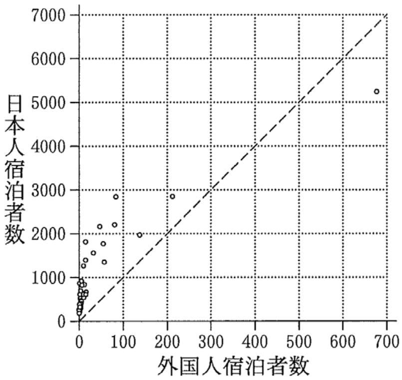


図 1 令和 4 年の外国人宿泊者数と日本人宿泊者数の散布図

次の(a), (b)は，図 1 に関する記述である。

(a) 令和 4 年について，外国人宿泊者数が 100 を超え，かつ日本人宿泊者数が 2500 を超える都道府県の数は 2 である。

(b) 令和 4 年について，日本人宿泊者数が外国人宿泊者数の 10 倍未満である都道府県の割合は 50％未満である。

(a), (b)の正誤の組合せとして正しいものは $\boxed{\text{タ}}$ である。

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

	⓪	①	②	③
(a)	正	正	誤	誤
(b)	正	誤	正	誤

(ii) 47 都道府県における令和 4 年の外国人宿泊者数を分析した結果，外れ値となる都道府県の数は 8 であった。

一方，表 1 は 47 都道府県における令和 4 年の日本人宿泊者数を，値の小さい順に並べ，その順に都道府県 P1, P2, …, P47 としたものである。この中で，外国人宿泊者数で外れ値となる都道府県(P37, P40, P42, P43, P44, P45, P46, P47)に印*を付けている。

表１　47都道府県における令和４年の日本人宿泊者数

都道府県	日本人宿泊者数	都道府県	日本人宿泊者数	都道府県	日本人宿泊者数	都道府県	日本人宿泊者数
P1	182	P13	373	P25	620	P37*	1339
P2	187	P14	388	P26	625	P38	1399
P3	197	P15	395	P27	646	P39	1547
P4	204	P16	401	P28	670	P40*	1765
P5	255	P17	405	P29	683	P41	1814
P6	270	P18	452	P30	705	P42*	1970
P7	276	P19	458	P31	831	P43*	2158
P8	286	P20	501	P32	832	P44*	2195
P9	303	P21	522	P33	839	P45*	2831
P10	321	P22	537	P34	876	P46*	2839
P11	328	P23	605	P35	925	P47*	5226
P12	351	P24	613	P36	1251		

表１のデータにおいて，四分位範囲は $\boxed{\text{チ}}$ となることから，令和４年の外国人宿泊者数と日本人宿泊者数の両方で外れ値となる都道府県の数は $\boxed{\text{ツ}}$ である。

$\boxed{\text{チ}}$ の解答群

⓪ 320	① 450	② 597	③ 638	④ 900
⑤ 966	⑥ 1253	⑦ 1261	⑧ 1602	⑨ 1864

(2)　47都道府県におけるある年の外国人宿泊者数を x，日本人宿泊者数を y とし，x と y の値の組を，それぞれ $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$\cdots$，$(x_{47},\ y_{47})$ と表す。x，y の平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$ とし，x，y の分散をそれぞれ $s_x{}^2$，$s_y{}^2$ とする。また，x と y の共分散を s_{xy} とする。

47都道府県それぞれにおける外国人宿泊者数と日本人宿泊者数を足し合わせた合計宿泊者数を z とし，その値を $z_i = x_i + y_i$ $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ 47)$ と表す。例えば，$i = 7$ のときは $z_7 = x_7 + y_7$ である。

z の平均値を $\overline{z}$ とするとき，

$$z_i - \overline{z} = (x_i - \overline{x}) + (y_i - \overline{y}) \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ 47)$$

である。このことに着目すると．z の分散を $s_z{}^2$ とするとき，$s_z{}^2 = \boxed{\text{テ}}$ となる。

また，令和４年の x と y の間には正の相関があることが図１からわかる。このことから，令和４年について，$s_z{}^2$ と $s_x{}^2 + s_y{}^2$ の関係として，後の ⓪～② のうち，正しいものは $\boxed{\text{ト}}$ であることがわかる。

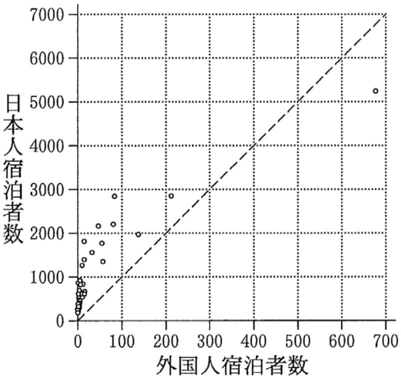


図１　（再掲）

$\boxed{\text{テ}}$ の解答群

⓪ $s_x{}^2+s_y{}^2-2s_{xy}$	① $s_x{}^2+s_y{}^2-s_{xy}$	② $s_x{}^2+s_y{}^2$
③ $s_x{}^2+s_y{}^2+s_{xy}$	④ $s_x{}^2+s_y{}^2+2s_{xy}$	

$\boxed{\text{ト}}$ の解答群

⓪ $s_z{}^2>s_x{}^2+s_y{}^2$

① $s_z{}^2=s_x{}^2+s_y{}^2$

② $s_z{}^2<s_x{}^2+s_y{}^2$

(3) 太郎さんが住む地域では，その地域に宿泊を促すためのキャンペーンとして，キャンペーン A, B が実施されている。

太郎さんは，キャンペーン A の方がよいと思っている人が多いといううわさを聞いた。このうわさのとおり，キャンペーン A の方がよいと思っている人が多いといえるかどうかを確かめることにした。そこで，かたよりなく選んだ人たちに，キャンペーン A, B のどちらがよいかについて，二択のアンケートを行ったところ，アンケートに回答した 35 人のうち，23 人が「キャンペーン A の方がよい」と答えた。この結果から，一般にキャンペーン A の方がよいと思っている人が多いといえるかどうかを，次の**方針**で考えることにした。

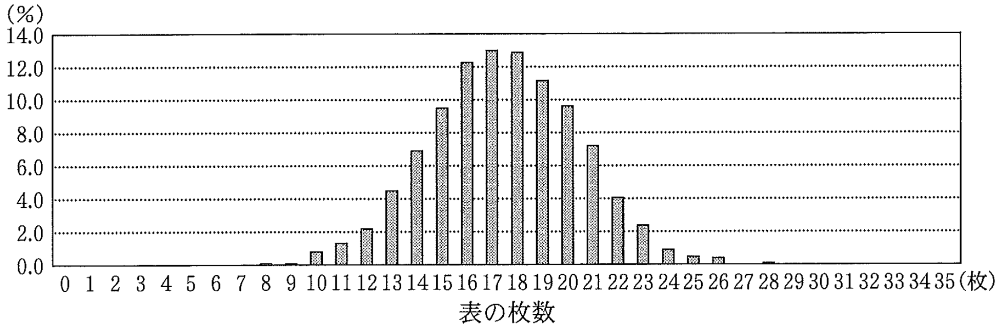
方針

・“「キャンペーン A の方がよい」と回答する割合と「キャンペーン B の方がよい」と回答する割合は等しい”という仮説を立てる。
・この仮説のもとで，かたよりなく選ばれた 35 人のうち 23 人以上が「キャンペーン A の方がよい」と回答する確率が 5％未満であれば，その仮説は誤っていると判断し，5％以上であればその仮説は誤っているとは判断しない。

後の**実験結果**は，35 枚の硬貨を投げる実験を 1000 回行ったとき，表が出た枚数ごとの回数の割合を示したものである。

実験結果

表の枚数(枚)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
割合(%)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.1	0.8	1.3
表の枚数(枚)	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
割合(%)	2.2	4.5	6.9	9.5	12.3	13.0	12.9	11.2	9.6	7.2	4.1	2.4
表の枚数(枚)	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
割合(%)	0.9	0.5	0.4	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0



実験結果を用いると, 35 枚の硬貨のうち 23 枚以上が表となった割合は, $\boxed{\text{ナ}}$. $\boxed{\text{ニ}}$ % である。これを, 35 人のうち 23 人以上が「キャンペーン A の方がよい」と回答する確率とみなし, **方針**に従うと, “「キャンペーン A の方がよい」と回答する割合と「キャンペーン B の方がよい」と回答する割合は等しい”という仮説は $\boxed{\text{ヌ}}$ 。したがって, 今回のアンケート結果からは, キャンペーン A の方がよいと思っている人が $\boxed{\text{ネ}}$ 。

$\boxed{\text{ヌ}}$, $\boxed{\text{ネ}}$ については, 最も適当なものを, 次のそれぞれの解答群から 1 つずつ選べ。

$\boxed{\text{ヌ}}$ の解答群

⓪ 誤っていると判断する	① 誤っているとは判断しない

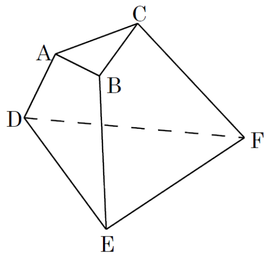
$\boxed{\text{ネ}}$ の解答群

⓪ 多いといえる	① 多いとはいえない

第３問

解答解説のページへ

6 点 A, B, C, D, E, F を頂点とし，三角形 ABC と DEF，および四角形 ABED, ACFD, BCFE を面とする五面体がある。ただし，直線 AD と BE は平行でないとする。



参考図

以下では，例えば，面 ABC を含む平面を平面 ABC，面 ABED を含む平面を平面 ABED，などということにする。

(1) 3 直線 AD, BE, CF は 1 点で交わる。これを証明しよう。

直線 AD と BE は平面 ABED 上にあり，平行でないので 1 点で交わる。その交点を P とする。

点 P は直線 AD 上にあり，直線 AD は平面 ABED と平面 $\boxed{\text{ア}}$ との交線であるから，点 P は平面 $\boxed{\text{ア}}$ 上にあることがわかる。また，点 P は直線 BE 上にあり，直線 BE は平面 ABED と平面 $\boxed{\text{イ}}$ との交線であるから，点 P は平面 $\boxed{\text{イ}}$ 上にあることがわかる。

平面 $\boxed{\text{ア}}$ と平面 $\boxed{\text{イ}}$ との交線は直線 CF であるから，点 P は直線 CF 上にもあることがわかる。したがって，3 直線 AD, BE, CF は点 P で交わる。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

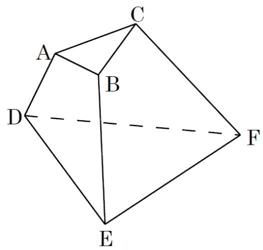
⓪ ABC	① DEF	② ACFD	③ BCFE

(2) 五面体において，面 ABC は 1 辺の長さが 3 の正三角形であり，$AD=7$，$BE=11$，$CF=17$，$DE=9$ であるとする。また，6 点 A, B, C, D, E, F はある 1 つの球面上にあるとし，その球面を S とする。直線 AD と BE の交点を P とする。

(i) 平面 ABED と球面 S が交わる部分は円であり，4 点 A，B，E，D はその円周上にある。このことから，三角形 PAB と PED は相似であることがわかり，その相似比は $1:\boxed{\text{ウ}}$ である。したがって

$$\boxed{\text{ウ}}\,PA=PB+\boxed{\text{エオ}},\quad \boxed{\text{ウ}}\,PB=PA+\boxed{\text{カ}}$$

が成り立つ。よって，$PA=\boxed{\text{キ}}$，$PB=\boxed{\text{ク}}$ となる。



参考図（再掲）

(ii) 平面 BCFE と球面 S が交わる部分に着目すると，方べきの定理より $PC=\boxed{\text{ケ}}$ となる。したがって，$EF=\boxed{\text{コサ}}$，$DF=\boxed{\text{シス}}$ となる。

(iii) $\angle ADE$，$\angle ADF$，$\angle EDF$ の大きさに着目すると，次の命題(a)，(b)，(c)の真偽の組合せとして正しいものは $\boxed{\text{セ}}$ であることがわかる。

(a) 平面 ABED と平面 DEF は垂直である。

(b) 直線 DE は平面 ACFD に垂直である。

(c) 直線 AC と直線 DE は垂直である。

$\boxed{セ}$ の解答群

	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(a)	真	真	真	真	偽	偽	偽	偽
(b)	真	真	偽	偽	真	真	偽	偽
(c)	真	偽	真	偽	真	偽	真	偽

第４問

解答解説のページへ

ある行事で，主催者が次の**ゲーム**を計画している。

ゲーム

参加者はくじを最大３回引き，当たりが出たら，1200 円相当の景品を主催者から受け取り，以降はくじを引かない。参加者はくじを 1 回目，2 回目，3 回目で異なる箱から引く。1 回目のくじ引きで当たりが出なかった場合は 2 回目のくじを引き，2 回目のくじ引きでも当たりが出なかった場合は 3 回目のくじを引く。主催者は，当たりの出る確率について次のとおり設定する。

・1 回目に当たりが出る確率は $\dfrac{3}{16}$ である。

・1 回目に当たりが出ず，かつ 2 回目に当たりが出る確率は $\dfrac{1}{8}$ である。

・1 回目，2 回目ともに当たりが出ず，かつ 3 回目に当たりが出る確率は $\dfrac{1}{16}$ である。

ゲームの参加料について，主催者は 2 種類の支払い方法を考えている。参加料に関する設定の妥当性について，主催者は判断を行う。

(1) 1 回目または 2 回目に当たりが出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である。このことから，1 回目，2 回目ともに当たりが出ない確率は $\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ であることがわかる。1 回も当たりが出ない確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

以下では，主催者が参加者に対して負担する金額を X 円とする。すなわち，参加者が**ゲーム**で景品を受け取るとき $X=1200$，参加者が**ゲーム**で景品を受け取らないとき $X=0$ である。

(2) (i)　数量 X の期待値は $\boxed{\text{コサシ}}$ である。なお，必要に応じて，右に示す表を用いて考えてもよい。

X	0	1200	計
確率			1

(ii) 次の**支払い方法 1** を考える。

支払い方法 1

参加者は 1 回目のくじを引く直前に参加料 500 円を支払う。

支払い方法 1 の場合，主催者が負担する金額 X 円の期待値が，参加料の金額 500 円未満であるとき，主催者は参加料の設定は妥当であると判断し，参加料の金額 500 円以上であるとき，参加料の設定は妥当ではないと判断する。

(i)で求めた X 円の期待値 $\boxed{\text{コサシ}}$ 円は参加料の金額 500 円 $\boxed{\text{ス}}$。したがって，主催者は参加料 500 円という設定について $\boxed{\text{セ}}$ と判断する。

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

⓪ 未満である	① 以上である

$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

⓪ 妥当である	① 妥当ではない

(3) a を正の整数とする。次の**支払い方法 2** を考える。

支払い方法 2

参加者は 1 回目，2 回目，3 回目のくじを引く直前にそれぞれ料金 a 円を支払う。なお，この料金をくじ引き料といい，当たりが出た後は，くじを引かないため，くじ引き料を支払わないことになる。

支払い方法 2 で，**ゲーム**を通して参加者が支払うくじ引き料の合計を参加料とし，Y 円で表す

(i) $a=170$ とする。このとき，次が成り立つ。

・1 回目に当たりが出るとき，$Y=170$ である。

・1 回目に当たりが出ず，かつ 2 回目に当たりが出るとき $Y=340$ である。

・1 回目, 2 回目ともに当たりが出ないとき，$Y=510$ である。

数量 Y の期待値は $\boxed{\text{ソタチ}}$ である。なお，必要に応じて，右に示す表を用いて考えてもよい。

Y	170	340	510	計
確率				1

(ii) **支払い方法 2** の場合，主催者が負担する金額 X 円の期待値が，参加料 Y 円の期待値未満であるとき，主催者はくじ引き料の設定は妥当であると判断し，参加料 Y 円の期待値以上であるとき，くじ引き料の設定は妥当ではないと判断する。

(2)の(i)で求めた X 円の期待値 $\boxed{\text{コサシ}}$ 円は，$a=170$ と設定した場合の**支払い方法 2** で参加者が支払う参加料 Y 円の期待値 $\boxed{\text{ソタチ}}$ 円 $\boxed{\text{ツ}}$。したがって，主催者はくじ引き料 170 円という設定について $\boxed{\text{テ}}$ と判断する。

また，主催者がくじ引き料の設定が妥当であると判断するのは $a>\boxed{\text{トナニ}}$ のときであり，主催者がくじ引き料の設定が妥当ではないと判断するのは $a \leqq \boxed{\text{トナニ}}$ のときである。

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

⓪ 未満である	① 以上である

$\boxed{\text{テ}}$ の解答群

⓪ 妥当である	① 妥当ではない

第１問

問題のページへ

[1]　$(2a+4b-2)x^2+(5a+11)x-b-8=0$……①に対して，

(1)　$a=1$のとき，①は$4bx^2+16x-b-8=0$となり，

$$(4x^2-1)b+(16x-8)=0\,,\ (2x-1)\{(2x+1)b+8\}=0$$

すると，$(2x-1)(2bx+b+8)=0$から，$x=\dfrac{1}{2}$は①の解の１つである。

(2)　$b=2$のとき，①は$(2a+6)x^2+(5a+11)x-10=0$

(i)　左辺を因数分解して，$(2x+5)\{(a+3)x-2\}=0$………(＊)

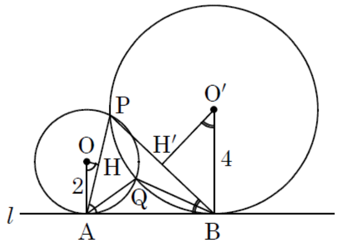
(ii)　$a=2\sqrt{2}$のとき，解は，$x=-\dfrac{5}{2}$または$x=\dfrac{2}{2\sqrt{2}+3}=\dfrac{2(3-2\sqrt{2})}{9-8}=6-4\sqrt{2}$

(iii) ①の解が$x=-\dfrac{5}{2}$だけであるのは，(＊)から$a+3=0$または$\dfrac{2}{a+3}=-\dfrac{5}{2}$，すなわち$a=-3$または$a=-\dfrac{19}{5}$のときである。

これより，$a=-3$であることは，①の解が$x=-\dfrac{5}{2}$だけであるための，①「十分条件であるが，必要条件ではない」。

[2]　(1)　$\angle\mathrm{AHO}=\angle\mathrm{OAB}=90^\circ$から，

$$\angle\mathrm{AOH}+\angle\mathrm{OAH}=90^\circ\,,\ \angle\mathrm{PAB}+\angle\mathrm{OAH}=90^\circ$$



これより，$\angle\mathrm{AOH}=\angle\mathrm{PAB}=\alpha$となり，

$$\mathrm{AH}=\mathrm{OA}\sin\angle\mathrm{AOH}=2\sin\alpha$$

すると，$\mathrm{PA}=2\mathrm{AH}=4\sin\alpha$………①

同様にして，$\angle\mathrm{BO'H'}=\angle\mathrm{PBA}=\beta$となり，

$$\mathrm{PB}=2\mathrm{BH'}=2\cdot 4\sin\beta=8\sin\beta\ \text{………②}$$

また，$\triangle\mathrm{PAB}$の外接円の半径をR_1とおくと，正弦定理から，$\dfrac{\mathrm{PA}}{\sin\beta}=\dfrac{\mathrm{PB}}{\sin\alpha}=2R_1$

これより，$\mathrm{PA}\sin\alpha=\mathrm{PB}\sin\beta$となり，①②を代入すると，

$$4\sin^2\alpha=8\sin^2\beta\,,\ \sin\alpha=\sqrt{2}\sin\beta$$

すると，$\mathrm{PA}\cdot\sqrt{2}\sin\beta=\mathrm{PB}\sin\beta$から$\mathrm{PB}=\sqrt{2}\mathrm{PA}$………③

さらに，①③から，$R_1=\dfrac{\mathrm{PB}}{2\sin\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}\mathrm{PA}}{2\sin\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot 4\sin\alpha}{2\sin\alpha}=2\sqrt{2}$

(2)　$\angle\mathrm{QAB}=\alpha'$，$\angle\mathrm{QBA}=\beta'$，$\triangle\mathrm{QAB}$の外接円の半径を$R_2$とおき，同様にすると，

$$\mathrm{QA}=4\sin\alpha'\,,\ \mathrm{QB}=8\sin\beta'\,,\ \frac{\mathrm{QA}}{\sin\beta'}=\frac{\mathrm{QB}}{\sin\alpha'}=2R_2$$

これより$\mathrm{QA}\sin\alpha'=\mathrm{QB}\sin\beta'$となり，$\sin\alpha'=\sqrt{2}\sin\beta'$から，$\mathrm{QB}=\sqrt{2}\mathrm{QA}$

すると，$R_2=\dfrac{\mathrm{QB}}{2\sin\alpha'}=\dfrac{\sqrt{2}\mathrm{QA}}{2\sin\alpha'}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot 4\sin\alpha'}{2\sin\alpha'}=2\sqrt{2}$

よって，$R_1=R_2=2\sqrt{2}$となり，さらに$\sin\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\mathrm{AB}}{2R_1}$，$\sin\angle\mathrm{AQB}=\dfrac{\mathrm{AB}}{2R_2}$から，

$$\sin\angle\mathrm{APB}=\sin\angle\mathrm{AQB}=\frac{\mathrm{AB}}{4\sqrt{2}}\cdots\cdots\cdots④$$

(3)　$\mathrm{AB}=2\sqrt{7}$ のとき，④より $\sin\angle\mathrm{APB}=\sin\angle\mathrm{AQB}=\dfrac{2\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

そして，$\angle\mathrm{APB}<\angle\mathrm{AQB}$ から $\angle\mathrm{APB}<90^\circ$ となり，$\cos\angle\mathrm{APB}=\sqrt{1-\dfrac{14}{16}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

さらに，$\triangle\mathrm{PAB}$ に余弦定理を適用すると，③から，

$$\mathrm{PA}^2+(\sqrt{2}\mathrm{PA})^2-2\cdot\mathrm{PA}\cdot\sqrt{2}\mathrm{PA}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}=(2\sqrt{7})^2$$

すると，$2\mathrm{PA}^2=28$ から，$\mathrm{PA}=\sqrt{14}$ となる。

同様に，$\cos\angle\mathrm{AQB}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ から，$\triangle\mathrm{QAB}$ に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{QA}^2+(\sqrt{2}\mathrm{QA})^2-2\cdot\mathrm{QA}\cdot\sqrt{2}\mathrm{QA}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=(2\sqrt{7})^2$$

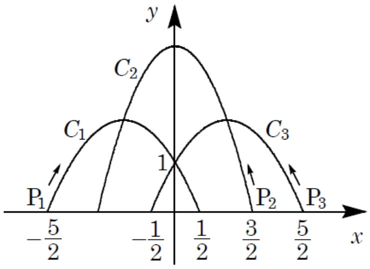
すると，$4\mathrm{QA}^2=28$ から，$\mathrm{QA}=\sqrt{7}$ となる。

［解 説］

[1]は 2 次方程式の解についての基本題です。[2]は丁寧な誘導のついた三角比の応用問題です。制限時間を考えると，同様な議論をショートカットすることが重要です。

第２問

問題のページへ



[1]　(1)　$C_1 : y=ax^2+bx+c$ とおくと，点 $(0,\ 1)$ を通ることから，$c=1$ である。

また，$P_1\left(-\frac{5}{2},\ 0\right)$ と点 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ を通ることから，

$$y=a\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=a\left(x^2+2x-\frac{5}{4}\right)$$

すると，$-\frac{5}{4}a=1$ から，$a=-\frac{4}{5}$ となり，

$$C_1 : y=-\frac{4}{5}x^2-\frac{8}{5}x+1=-\frac{4}{5}(x+1)^2+\frac{9}{5}$$

これより，C_1 の頂点の座標は $\left(-1,\ \frac{9}{5}\right)$ から，その y 座標は $\frac{9}{5}$ である。

また，C_3 は C_1 と y 軸に関して対称なので，C_3 の頂点は C_1 の頂点と y 軸に関して対称となる。そして，C_2 は C_1 と C_3 の頂点を通ることから，y 軸対称であり，

$$C_2 : y=k\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)=k\left(x^2-\frac{9}{4}\right)$$

点 $\left(-1,\ \frac{9}{5}\right)$ を通ることより，$\left(1-\frac{9}{4}\right)k=\frac{9}{5}$ から $k=-\frac{36}{25}$ となり，

$$C_2 : y=-\frac{36}{25}\left(x^2-\frac{9}{4}\right)=-\frac{36}{25}x^2+\frac{81}{25}$$

すると，C_2 の頂点の y 座標は $\frac{81}{25}$ となる。これより，大きな噴水の高さは，小さな噴水の高さの $\frac{81}{25}\div\frac{9}{5}=\frac{9}{5}$ 倍（およそ 2 倍）である。

(2)　$P_2'(m,\ 0)\ (m>0)$ とし，$C_2' : y=l(x+m)(x-m)=l(x^2-m^2)$ とおく。

2 点 $\left(-1,\ \frac{9}{5}\right)$，$(0,\ 5)$ を通るので，$l(1-m^2)=\frac{9}{5}$，$-lm^2=5$ となり，

$$l=\frac{9}{5}-5=-\frac{16}{5},\quad m=\sqrt{5\cdot\frac{5}{16}}=\frac{5}{4}$$

したがって，P_2' は P_2 より $\frac{3}{2}-\frac{5}{4}=\frac{1}{4}$ だけ P_1 の方にある。

[2]　(1)　(i)　図 1 から，(a)「外国人宿泊者数が 100 を超え，かつ日本人宿泊者数が 2500 を超える都道府県の数は 2」は正しい。(b)「日本人宿泊者数が外国人宿泊者数の 10 倍未満である都道府県の割合は 50％未満」は破線の下側領域にある点の数から判断すると正しい。

(ii)　表 1 より，日本人宿泊者数の第 1 四分位数は小さい方から 12 番目より $Q_1=351$，第 3 四分位数は小さい方から 36 番目より $Q_3=1251$ となるので，四分位範囲 $Q_3-Q_1=1251-351=900$ である。

これより，日本人宿泊者数の外れ値は，$351-1.5\times900=-999$ 以下，または $1251+1.5\times900=2601$ 以上となる。

すると，外国人宿泊者数と日本人宿泊者数の両方で外れ値となる都道府県は，P45, P46, P47 の 3 都道府県である。

(2) x, y の平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$, x, y の分散をそれぞれ ${s_x}^2$，${s_y}^2$，また x と y の共分散を s_{xy} とする。$z_i = x_i + y_i$ とおくと，$z_i - \overline{z} = (x_i - \overline{x}) + (y_i - \overline{y})$ から，

$$\begin{aligned}{s_z}^2 &= \frac{1}{47}\sum_{i=1}^{47}(z_i - \overline{z})^2 = \frac{1}{47}\sum_{i=1}^{47}\{(x_i - \overline{x}) + (y_i - \overline{y})\}^2 \\ &= \frac{1}{47}\sum_{i=1}^{47}\{(x_i - \overline{x})^2 + (y_i - \overline{y})^2 + 2(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})\} = {s_x}^2 + {s_y}^2 + 2s_{xy}\end{aligned}$$

図 1 より，x と y の間には正の相関があり，$s_{xy} > 0$ から ${s_z}^2 > {s_x}^2 + {s_y}^2$ である。

(3) 「キャンペーン A の方がよい」と回答する割合と「キャンペーン B の方がよい」と回答する割合は等しいという仮説 H_0 を立てる。

ここで，35 枚の硬貨を投げる実験を 1000 回行ったとき，23 枚以上が表となった割合は，$2.4 + 0.9 + 0.5 + 0.4 + 0.1 = 4.3$ ％であり，これを 35 人のうち 23 人以上が「キャンペーン A の方がよい」と回答する確率とする。

すると，この確率は 5％未満であり，H_0 は誤っていると判断する。したがって，「キャンペーン A の方がよい」と思っている人が多いといえる。

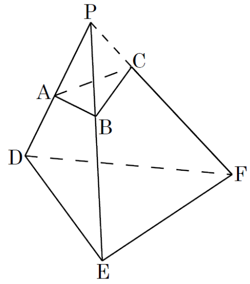
［解 説］

[1]は 2 次関数のグラフについての問題です。図 1 を見ながら計算していくだけのものです。[2]は 3 つの小問で構成されたデータの分析についての問題です。丁寧な誘導を読解するスピードが重要です。

第３問

問題のページへ

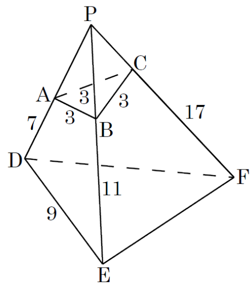
(1) 右図の五面体 ABCDEF に対して，平行でない 2 直線 AD と BE の交点を P とする。



直線 AD は平面 ABED と平面 ACFD との交線であるから，点 P は平面 ACFD 上にある。また，直線 BE は平面 ABED と平面 BCFE との交線であるから，点 P は平面 BCFE 上にある。すると，平面 ACFD と平面 BCFE の交線は直線 CF であるから，点 P は直線 CF 上にもある。

したがって，3 直線 AD, BE, CF は点 P で交わる。

(2) 五面体 ABCDEF に対して，$AB=BC=CA=3$，$AD=7$，$BE=11$，$CF=17$，$DE=9$ であり，6 点 A, B, C, D, E, F は球面 S 上にある。



(i) 4 点 A, B, E, D は同一円周上にあるので，$\angle PAB=\angle PED$

そして，$\angle P$ が共通から，$\triangle PAB \backsim \triangle PED$ となり，その相似比は $AB:ED=3:9=1:3$ であるので，

$$3PA=PE=PB+11,\quad 3PB=PD=PA+7$$

まとめると，$3(3PA-11)=PA+7$ から $8PA=40$ となり，$PA=5$

$$PB=3\cdot 5-11=4$$

(ii) 4 点 B, C, F, E は同一円周上にあるので，方べきの定理から，

$$PC\cdot PF=PB\cdot PE,\quad PC\cdot(PC+17)=4\cdot(4+11)$$

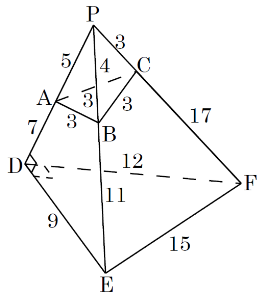
これより，$PC^2+17PC-60=0$ となり，$(PC+20)(PC-3)=0$ から $PC=3$

また，(i)と同様に，$\triangle PBC \backsim \triangle PFE$ で，相似比は $PC:PE=3:(4+11)=1:5$ なので，これより $EF=5CB=15$ である。

さらに，$\triangle PAC \backsim \triangle PFD$ で，相似比は $PC:PD=3:(5+7)=1:4$ なので，これより $DF=4CA=12$ である。

(iii) $PD=5+7=12$，$PE=4+11=15$，$DE=9$ から，

$$\cos\angle ADE=\frac{12^2+9^2-15^2}{2\cdot 12\cdot 9}=0,\quad \angle ADE=90^\circ$$



$PD=12$，$DF=12$，$PF=3+17=20$ から，

$$\cos\angle ADF=\frac{12^2+12^2-20^2}{2\cdot 12\cdot 12}<0,\quad \angle ADF>90^\circ$$

$DE=9$，$EF=15$，$DF=12$ から，

$$\cos\angle EDF=\frac{9^2+12^2-15^2}{2\cdot 9\cdot 12}=0,\quad \angle EDF=90^\circ$$

すると，平面 ABED と平面 DEF のなす角は$\angle$ADF なので，命題(a)「平面 ABED と平面 DEF は垂直である」は偽となる。

$\angle \mathrm{ADE} = \angle \mathrm{EDF} = 90^\circ$ から，命題(b)「直線 DE は平面 ACFD に垂直である」は真となり，これから命題(c)「直線 AC と直線 DE は垂直である」も真である。

［解 説］

過去に出題のなかった空間図形の性質についての問題です。問題文の参考図に求めた値をどんどん書き込んで処理をすることがポイントになります。

第４問

問題のページへ

与えられたくじ引きについて,「当たりが出る」を○,「当たりが出ない」を×で表すと, ○の確率が$\dfrac{3}{16}$, ×→○の確率が$\dfrac{1}{8}$, ×→×→○の確率が$\dfrac{1}{16}$である。

(1)　1 回目または 2 回目に当たりが出る確率は$\dfrac{3}{16}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{5}{16}$であり, これより 1 回目, 2 回目ともに当たりが出ない確率は$1-\dfrac{5}{16}=\dfrac{11}{16}$である。

そして, 1 回も当たりが出ない確率は, $1-\left(\dfrac{3}{16}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}\right)=\dfrac{5}{8}$となる。

(2)　(i)　主催者が参加者に対して負担する金額を X 円とすると, 右表からXの期待値は,

$$0\times\frac{5}{8}+1200\times\frac{3}{8}=450$$

X	0	1200	計
確率	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	1

(ii)　(i)で求めた X 円の期待値 450 円は参加料の金額 500 円未満である。したがって, 主催者は参加料 500 円という設定について妥当であると判断する。

(3)　参加者が支払うくじ引き料 a 円について, くじ引き料の合計を参加料 Y 円で表す。

(i)　$a=170$ のとき, 右表から Y の期待値は,

$$170\times\frac{3}{16}+340\times\frac{1}{8}+510\times\frac{11}{16}$$
$$=\frac{170}{16}(3+4+33)=\frac{85\cdot 40}{8}=425$$

Y	170	340	510	計
確率	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{11}{16}$	1

(ii)　(i)で求めた X 円の期待値 450 円は, $a=170$ と設定した場合の参加料 Y 円の期待値 425 円以上である。主催者はくじ引き料の設定は妥当ではないと判断する。

(iii) Y の期待値は, $a\times\dfrac{3}{16}+2a\times\dfrac{1}{8}+3a\times\dfrac{11}{16}=\dfrac{a}{16}(3+4+33)=\dfrac{40}{16}a=\dfrac{5}{2}a$

すると, 主催者がくじ引き料の設定が妥当であると判断するのは, $450<\dfrac{5}{2}a$ すなわち$a>180$ のときであり, 妥当ではないと判断するのは$a\leqq 180$ のときである。

［解 説］

期待値と有利・不利の問題です。非常に細かく設定された誘導が, 繰り返し述べられています。