

第1問

解答解説のページへ

(1)  $0 \leq \theta < \pi$  のとき、方程式  $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2\theta \cdots \cdots \textcircled{1}$  の解を求めよう。以下では、

$\alpha = \theta + \frac{\pi}{6}$ ,  $\beta = 2\theta$  とおく。このとき、 $\textcircled{1}$  は  $\sin \alpha = \sin \beta \cdots \cdots \textcircled{2}$  となる。

(i) 2つの一般角  $\alpha$  と  $\beta$  が等しければ、 $\sin \alpha$  と  $\sin \beta$  は等しい。 $\alpha = \beta$  を満たす  $\theta$  は  $\frac{\pi}{\text{ア}}$  であり、これは $\textcircled{1}$ の解の1つである。そして、 $\theta = \frac{\pi}{\text{ア}}$  のとき、

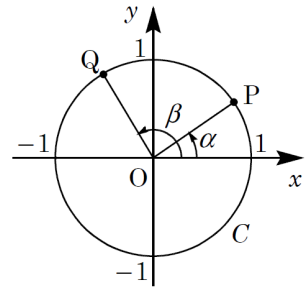
$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2\theta = \frac{\sqrt{\text{イ}}}{\text{ウ}}$$

(ii) 太郎さんと花子さんは、 $\theta = \frac{\pi}{\text{ア}}$  以外の $\textcircled{1}$ の解を求める方法について、話し

ている。

太郎：角が等しくなくても、サインの値が等しくなることがあるね。  
 花子：サインの値が等しくなるのはどんなときか、単位円を用いて考えてみようか。

O を原点とする座標平面において、中心が O で、半径が 1 の円を C とする。さらに、 $\alpha$  の動径と C との交点を P、 $\beta$  の動径と C との交点を Q とする。ここで、動径は O を中心とし、その始線は x 軸の正の部分とする。



参考図

$\textcircled{2}$  が成り立つときに、点 P と点 Q の間につねに成り立つ関係の記述として、次の $\textcircled{0} \sim \textcircled{3}$ のうち、正しいものは

$\text{エ}$  である。

$\text{エ}$  の解答群

- $\textcircled{0}$  点 P と点 Q は同じ点である。
- $\textcircled{1}$  点 P の x 座標と、点 Q の x 座標が等しい。
- $\textcircled{2}$  点 P の y 座標と、点 Q の y 座標が等しい。
- $\textcircled{3}$  点 P と点 Q は、原点 O に関して対称である。

(iii)  $\theta \neq \frac{\pi}{\text{ア}}$  とする。

・  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  の場合を考える。このとき、 $0 \leq \beta \leq \pi$  であるので、 $\textcircled{2}$  が成り立つとき、(ii)で考察したことに注意すると、 $\alpha$  と  $\beta$  は  $\alpha + \beta = \text{オ}$  を満たすことがわか

かる。これより、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  のときの $\textcircled{1}$ の解  $\theta = \frac{\text{カ}}{\text{キク}} \pi$  を得る。

・  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  の場合を考える。このとき、 $\pi < \beta < 2\pi$  であるので、②が成り立つとき、(ii)で考察したことに注意すると、 $\alpha$  と  $\beta$  は  $\alpha + \beta = \boxed{\text{ケ}}$  を満たすことがわかる。これより、 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  のときの①の解  $\theta = \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シス}}} \pi$  を得る。

以上より、 $0 \leq \theta < \pi$  のとき、①の解は、 $\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}$ ,  $\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}} \pi$ ,  $\frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シス}}} \pi$  で

ある。

オ,  ケ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

① 0	① $\frac{\pi}{2}$	② $\pi$	③ $\frac{3}{2}\pi$
④ $2\pi$	⑤ $\frac{5}{2}\pi$	⑥ $3\pi$	⑦ $\frac{7}{2}\pi$

(2)  $0 \leq \theta < \pi$  のとき、方程式  $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2\theta$  の解は、 $\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}$ ,  $\frac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チツ}}} \pi$

である。

## 第2問

解答解説のページへ

以下の問題を解答するにあたっては、必要に応じて5, 6ページの常用対数表を用いてもよい。

学校の池でメダカを飼うことが決まり、メダカの飼育係になった花子さんは、水質を良くする効果がある水草Aを水面に浮かべることにした。一方で、水草Aが増えすぎてメダカに悪影響を与えることを心配した花子さんは、水草Aを定期的に除去することにし、その作業の計画を立てるために次の**基本方針**を定めた。

**基本方針**

- ・水草Aの量を水草Aが池の水面を覆う面積の割合(%)で測ることとし、この量をもとに作業計画を立てる。
- ・作業は正午に行う。

- (1) 水草Aの増え方を知るために、観測を行った。次の表は、観測を開始した日を0日目として、0日目、3日目、6日目、9日目の正午に観測した水草Aの量を表したものである。

観測日(日目)	0	3	6	9
水草Aの量(%)	17.2	22.7	30.0	39.6

水草Aの量が3日ごとに何倍に増えるのかを計算して小数第3位を四捨五入したところ、いずれも1.32倍であることがわかった。水草Aの量は、3日ごとにほとんど同じ倍率で増えていることから、「水草Aの量は、1日ごとに一定の倍率で増える」と考え、その倍率を定数 $r$ とした。

観測結果から、3日目の水草Aの量は0日目の量の1.32倍になると考えた。このとき、 $r$ は **ア** = 1.32 を満たす。 $\log_{10} 1.32 =$  **イ** であるので、 $\log_{10} r = 0.$  **ウエオカ** が得られる。

**ア** の解答群

- ①  $r$       ②  $\frac{r}{3}$       ③  $3r$       ④  $r^3$       ⑤  $3^r$       ⑥  $\log_3 r$

**イ** については、最も適当なものを、次の⑦～⑬のうちから1つ選べ。

- ⑦ 0.0899      ⑧ 0.1206      ⑨ 0.1523      ⑩ 0.2148  
 ⑪ 0.2405      ⑫ 0.3010      ⑬ 0.3636      ⑭ 0.4771

- (2) 花子さんは、**基本方針**に次の**条件**を加えて、作業計画を立てることにした。

**条件**

- ・作業は14日ごとに行う。
- ・作業の後に残す水草Aの量を、次の作業までの間に水草Aの量がつねに60%を超えない範囲で、できるだけ多くする。

作業の後に残す水草Aの量について考える。

作業を行った日を0日目として、次回の作業は14日目に行く。なお、作業にかかる時間は考えないものとする。次のような実数 $a$ を考える。作業の後に残す水草Aの量を $a\%$ としたとき、14日目の正午に水草Aの量がちょうど60%になる。

このとき、(1)の定数 $r$ を用いると、14日目の正午に水草Aの量は $a$ の $\boxed{\text{キ}}$ 倍になるので、 $a \times \boxed{\text{キ}} = \boxed{\text{クケ}} \cdots \cdots \textcircled{1}$ が成り立つ。

$\textcircled{1}$ の両辺の常用対数を取り、(1)で求めた $\log_{10} r = 0.\boxed{\text{ウエオカ}}$ と $\log_{10} 6 = 0.7782$ であることを用いると、 $\log_{10} a = \boxed{\text{コ}}$ となる。

$a$ の決め方から、作業の後に残す水草Aの量を $a\%$ 以下にすれば、次回の作業までの間に水草Aの量がつねに60%を超えないことがわかる。 $a$ 以下で最大の整数は $\boxed{\text{サシ}}$ であることから、花子さんは作業の後に残す水草Aの量を $\boxed{\text{サシ}}\%$ にすることとした。

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

- |                       |                                  |                         |                            |                          |                                 |
|-----------------------|----------------------------------|-------------------------|----------------------------|--------------------------|---------------------------------|
| $\textcircled{0}$ $r$ | $\textcircled{1}$ $\frac{r}{14}$ | $\textcircled{2}$ $14r$ | $\textcircled{3}$ $r^{14}$ | $\textcircled{4}$ $14^r$ | $\textcircled{5}$ $\log_{14} r$ |
|-----------------------|----------------------------------|-------------------------|----------------------------|--------------------------|---------------------------------|

$\boxed{\text{コ}}$ については、最も適当なものを、次の $\textcircled{0} \sim \textcircled{7}$ のうちから1つ選べ。

- |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $\textcircled{0}$ 0.7758 | $\textcircled{1}$ 1.0670 | $\textcircled{2}$ 1.0934 | $\textcircled{3}$ 1.2154 |
| $\textcircled{4}$ 1.3410 | $\textcircled{5}$ 1.4894 | $\textcircled{6}$ 1.7806 | $\textcircled{7}$ 2.4666 |

## 常用対数表

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0.0000	0.0043	0.0086	0.0128	0.0170	0.0212	0.0253	0.0294	0.0334	0.0374
1.1	0.0414	0.0453	0.0492	0.0531	0.0569	0.0607	0.0645	0.0682	0.0719	0.0755
1.2	0.0792	0.0828	0.0864	0.0899	0.0934	0.0969	0.1004	0.1038	0.1072	0.1106
1.3	0.1139	0.1173	0.1206	0.1239	0.1271	0.1303	0.1335	0.1367	0.1399	0.1430
1.4	0.1461	0.1492	0.1523	0.1553	0.1584	0.1614	0.1644	0.1673	0.1703	0.1732
1.5	0.1761	0.1790	0.1818	0.1847	0.1875	0.1903	0.1931	0.1959	0.1987	0.2014
1.6	0.2041	0.2068	0.2095	0.2122	0.2148	0.2175	0.2201	0.2227	0.2253	0.2279
1.7	0.2304	0.2330	0.2355	0.2380	0.2405	0.2430	0.2455	0.2480	0.2504	0.2529
1.8	0.2553	0.2577	0.2601	0.2625	0.2648	0.2672	0.2695	0.2718	0.2742	0.2765
1.9	0.2788	0.2810	0.2833	0.2856	0.2878	0.2900	0.2923	0.2945	0.2967	0.2989
2.0	0.3010	0.3032	0.3054	0.3075	0.3096	0.3118	0.3139	0.3160	0.3181	0.3201
2.1	0.3222	0.3243	0.3263	0.3284	0.3304	0.3324	0.3345	0.3365	0.3385	0.3404
2.2	0.3424	0.3444	0.3464	0.3483	0.3502	0.3522	0.3541	0.3560	0.3579	0.3598
2.3	0.3617	0.3636	0.3655	0.3674	0.3692	0.3711	0.3729	0.3747	0.3766	0.3784
2.4	0.3802	0.3820	0.3838	0.3856	0.3874	0.3892	0.3909	0.3927	0.3945	0.3962
2.5	0.3979	0.3997	0.4014	0.4031	0.4048	0.4065	0.4082	0.4099	0.4116	0.4133
2.6	0.4150	0.4166	0.4183	0.4200	0.4216	0.4232	0.4249	0.4265	0.4281	0.4298
2.7	0.4314	0.4330	0.4346	0.4362	0.4378	0.4393	0.4409	0.4425	0.4440	0.4456
2.8	0.4472	0.4487	0.4502	0.4518	0.4533	0.4548	0.4564	0.4579	0.4594	0.4609
2.9	0.4624	0.4639	0.4654	0.4669	0.4683	0.4698	0.4713	0.4728	0.4742	0.4757
3.0	0.4771	0.4786	0.4800	0.4814	0.4829	0.4843	0.4857	0.4871	0.4886	0.4900
3.1	0.4914	0.4928	0.4942	0.4955	0.4969	0.4983	0.4997	0.5011	0.5024	0.5038
3.2	0.5051	0.5065	0.5079	0.5092	0.5105	0.5119	0.5132	0.5145	0.5159	0.5172
3.3	0.5185	0.5198	0.5211	0.5224	0.5237	0.5250	0.5263	0.5276	0.5289	0.5302
3.4	0.5315	0.5328	0.5340	0.5353	0.5366	0.5378	0.5391	0.5403	0.5416	0.5428
3.5	0.5441	0.5453	0.5465	0.5478	0.5490	0.5502	0.5514	0.5527	0.5539	0.5551
3.6	0.5563	0.5575	0.5587	0.5599	0.5611	0.5623	0.5635	0.5647	0.5658	0.5670
3.7	0.5682	0.5694	0.5705	0.5717	0.5729	0.5740	0.5752	0.5763	0.5775	0.5786
3.8	0.5798	0.5809	0.5821	0.5832	0.5843	0.5855	0.5866	0.5877	0.5888	0.5899
3.9	0.5911	0.5922	0.5933	0.5944	0.5955	0.5966	0.5977	0.5988	0.5999	0.6010
4.0	0.6021	0.6031	0.6042	0.6053	0.6064	0.6075	0.6085	0.6096	0.6107	0.6117
4.1	0.6128	0.6138	0.6149	0.6160	0.6170	0.6180	0.6191	0.6201	0.6212	0.6222
4.2	0.6232	0.6243	0.6253	0.6263	0.6274	0.6284	0.6294	0.6304	0.6314	0.6325
4.3	0.6335	0.6345	0.6355	0.6365	0.6375	0.6385	0.6395	0.6405	0.6415	0.6425
4.4	0.6435	0.6444	0.6454	0.6464	0.6474	0.6484	0.6493	0.6503	0.6513	0.6522
4.5	0.6532	0.6542	0.6551	0.6561	0.6571	0.6580	0.6590	0.6599	0.6609	0.6618
4.6	0.6628	0.6637	0.6646	0.6656	0.6665	0.6675	0.6684	0.6693	0.6702	0.6712
4.7	0.6721	0.6730	0.6739	0.6749	0.6758	0.6767	0.6776	0.6785	0.6794	0.6803
4.8	0.6812	0.6821	0.6830	0.6839	0.6848	0.6857	0.6866	0.6875	0.6884	0.6893
4.9	0.6902	0.6911	0.6920	0.6928	0.6937	0.6946	0.6955	0.6964	0.6972	0.6981
5.0	0.6990	0.6998	0.7007	0.7016	0.7024	0.7033	0.7042	0.7050	0.7059	0.7067
5.1	0.7076	0.7084	0.7093	0.7101	0.7110	0.7118	0.7126	0.7135	0.7143	0.7152
5.2	0.7160	0.7168	0.7177	0.7185	0.7193	0.7202	0.7210	0.7218	0.7226	0.7235
5.3	0.7243	0.7251	0.7259	0.7267	0.7275	0.7284	0.7292	0.7300	0.7308	0.7316
5.4	0.7324	0.7332	0.7340	0.7348	0.7356	0.7364	0.7372	0.7380	0.7388	0.7396

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	0.7404	0.7412	0.7419	0.7427	0.7435	0.7443	0.7451	0.7459	0.7466	0.7474
5.6	0.7482	0.7490	0.7497	0.7505	0.7513	0.7520	0.7528	0.7536	0.7543	0.7551
5.7	0.7559	0.7566	0.7574	0.7582	0.7589	0.7597	0.7604	0.7612	0.7619	0.7627
5.8	0.7634	0.7642	0.7649	0.7657	0.7664	0.7672	0.7679	0.7686	0.7694	0.7701
5.9	0.7709	0.7716	0.7723	0.7731	0.7738	0.7745	0.7752	0.7760	0.7767	0.7774
6.0	0.7782	0.7789	0.7796	0.7803	0.7810	0.7818	0.7825	0.7832	0.7839	0.7846
6.1	0.7853	0.7860	0.7868	0.7875	0.7882	0.7889	0.7896	0.7903	0.7910	0.7917
6.2	0.7924	0.7931	0.7938	0.7945	0.7952	0.7959	0.7966	0.7973	0.7980	0.7987
6.3	0.7993	0.8000	0.8007	0.8014	0.8021	0.8028	0.8035	0.8041	0.8048	0.8055
6.4	0.8062	0.8069	0.8075	0.8082	0.8089	0.8096	0.8102	0.8109	0.8116	0.8122
6.5	0.8129	0.8136	0.8142	0.8149	0.8156	0.8162	0.8169	0.8176	0.8182	0.8189
6.6	0.8195	0.8202	0.8209	0.8215	0.8222	0.8228	0.8235	0.8241	0.8248	0.8254
6.7	0.8261	0.8267	0.8274	0.8280	0.8287	0.8293	0.8299	0.8306	0.8312	0.8319
6.8	0.8325	0.8331	0.8338	0.8344	0.8351	0.8357	0.8363	0.8370	0.8376	0.8382
6.9	0.8388	0.8395	0.8401	0.8407	0.8414	0.8420	0.8426	0.8432	0.8439	0.8445
7.0	0.8451	0.8457	0.8463	0.8470	0.8476	0.8482	0.8488	0.8494	0.8500	0.8506
7.1	0.8513	0.8519	0.8525	0.8531	0.8537	0.8543	0.8549	0.8555	0.8561	0.8567
7.2	0.8573	0.8579	0.8585	0.8591	0.8597	0.8603	0.8609	0.8615	0.8621	0.8627
7.3	0.8633	0.8639	0.8645	0.8651	0.8657	0.8663	0.8669	0.8675	0.8681	0.8686
7.4	0.8692	0.8698	0.8704	0.8710	0.8716	0.8722	0.8727	0.8733	0.8739	0.8745
7.5	0.8751	0.8756	0.8762	0.8768	0.8774	0.8779	0.8785	0.8791	0.8797	0.8802
7.6	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859
7.7	0.8865	0.8871	0.8876	0.8882	0.8887	0.8893	0.8899	0.8904	0.8910	0.8915
7.8	0.8921	0.8927	0.8932	0.8938	0.8943	0.8949	0.8954	0.8960	0.8965	0.8971
7.9	0.8976	0.8982	0.8987	0.8993	0.8998	0.9004	0.9009	0.9015	0.9020	0.9025
8.0	0.9031	0.9036	0.9042	0.9047	0.9053	0.9058	0.9063	0.9069	0.9074	0.9079
8.1	0.9085	0.9090	0.9096	0.9101	0.9106	0.9112	0.9117	0.9122	0.9128	0.9133
8.2	0.9138	0.9143	0.9149	0.9154	0.9159	0.9165	0.9170	0.9175	0.9180	0.9186
8.3	0.9191	0.9196	0.9201	0.9206	0.9212	0.9217	0.9222	0.9227	0.9232	0.9238
8.4	0.9243	0.9248	0.9253	0.9258	0.9263	0.9269	0.9274	0.9279	0.9284	0.9289
8.5	0.9294	0.9299	0.9304	0.9309	0.9315	0.9320	0.9325	0.9330	0.9335	0.9340
8.6	0.9345	0.9350	0.9355	0.9360	0.9365	0.9370	0.9375	0.9380	0.9385	0.9390
8.7	0.9395	0.9400	0.9405	0.9410	0.9415	0.9420	0.9425	0.9430	0.9435	0.9440
8.8	0.9445	0.9450	0.9455	0.9460	0.9465	0.9469	0.9474	0.9479	0.9484	0.9489
8.9	0.9494	0.9499	0.9504	0.9509	0.9513	0.9518	0.9523	0.9528	0.9533	0.9538
9.0	0.9542	0.9547	0.9552	0.9557	0.9562	0.9566	0.9571	0.9576	0.9581	0.9586
9.1	0.9590	0.9595	0.9600	0.9605	0.9609	0.9614	0.9619	0.9624	0.9628	0.9633
9.2	0.9638	0.9643	0.9647	0.9652	0.9657	0.9661	0.9666	0.9671	0.9675	0.9680
9.3	0.9685	0.9689	0.9694	0.9699	0.9703	0.9708	0.9713	0.9717	0.9722	0.9727
9.4	0.9731	0.9736	0.9741	0.9745	0.9750	0.9754	0.9759	0.9763	0.9768	0.9773
9.5	0.9777	0.9782	0.9786	0.9791	0.9795	0.9800	0.9805	0.9809	0.9814	0.9818
9.6	0.9823	0.9827	0.9832	0.9836	0.9841	0.9845	0.9850	0.9854	0.9859	0.9863
9.7	0.9868	0.9872	0.9877	0.9881	0.9886	0.9890	0.9894	0.9899	0.9903	0.9908
9.8	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939	0.9943	0.9948	0.9952
9.9	0.9956	0.9961	0.9965	0.9969	0.9974	0.9978	0.9983	0.9987	0.9991	0.9996

第3問

解答解説のページへ

$k$  を 0 でない実数とし、 $f(x)$  を 2 次関数とする。 $F(x)$  と  $G(x)$  はどちらも導関数が  $f(x)$  であるような関数で、 $F(x)$  は  $x=0$  で極小値 0 をとり、 $G(x)$  は  $x=k$  で極大値 0 をとるとする。

(1) まず、 $F(x) = 2x^3 + 3x^2$  の場合を考える。 $F(x)$  の導関数が  $f(x)$  であることから、 $f(x) = \text{ア} x^2 + \text{イ} x$  であり、 $F(x)$  は  $x = \text{ウエ}$  で極大値をとる。また、 $G(x)$  の導関数が  $f(x)$  であることから、 $G(x) = \text{オ} x^3 + \text{カ} x^2 + C$  ( $C$  は積分定数) と表され、 $G(x)$  は  $x = \text{キ}$  で極小値をとる。さらに  $G(x)$  に関する条件から  $C = \text{クケ}$  である。

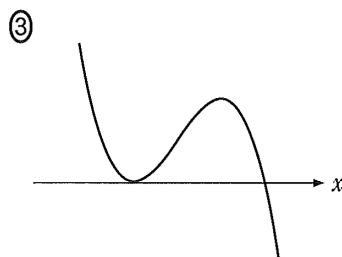
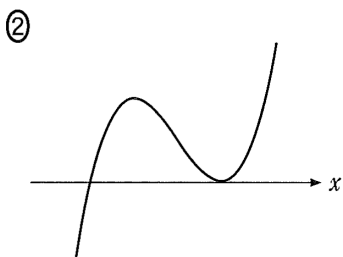
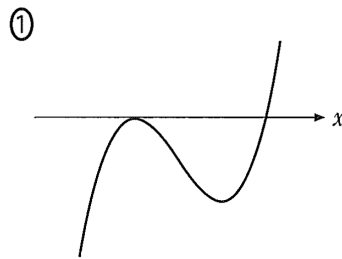
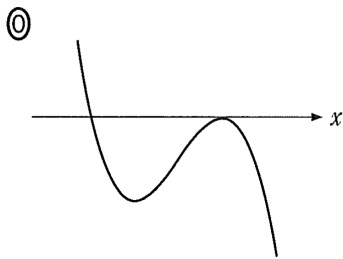
(2) 次に、 $k > 0$  の場合を考える。このとき、 $F(x)$  と  $G(x)$  に関する条件から、 $y = F(x)$  のグラフと  $F(x)$ 、 $G(x)$  の極値について調べよう。

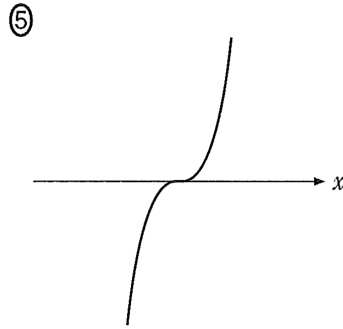
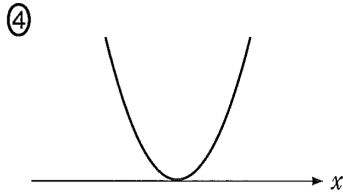
(i)  $F(x)$  が  $x=0$  で極小値をとることから、 $f(0) = \text{コ}$  であり、 $x=0$  の前後で  $f(x)$  の符号は  $\text{サ}$ 。さらに、 $G(x)$  が  $x=k$  で極大値をとることから、 $f(k) = \text{シ}$  であり、 $x=k$  の前後で  $f(x)$  の符号は  $\text{ス}$ 。したがって、 $F(x)$  の導関数は  $f(x)$  であることに注意すると、座標平面において  $y = F(x)$  のグラフの概形は  $\text{セ}$  であることがわかる。

$\text{サ}$ 、 $\text{ス}$  解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

- |            |            |
|------------|------------|
| ① 負から正に変わる | ① 正から負に変わる |
| ② 変わらない    |            |

$\text{セ}$  については、最も適当なものを、次の ①～④のうちから 1 つ選べ。なお、 $y$  軸は省略しているが、上方向が正の方向であり、 $x$  軸は直線  $y=0$  を表している。





(ii)  $F(x)$ に関する条件から、すべての実数  $x$  に対して  $F(x) = \int_{\square{\text{タ}}}^{\square{\text{ソ}}} f(t)dt$  が成り立

つ。このことと(i)の考察により、 $F(x)$ の極大値は  $\int_{\square{\text{ツ}}}^{\square{\text{チ}}} f(t)dt$  と表され、 $F(x)$ の極大値は、関数  $y = \square{\text{テ}}$  のグラフと  $x$  軸で囲まれた図形の  $\square{\text{ト}}$  と等しいことがわかる。

さらに  $G(x)$ に関する条件から、 $F(x)$ の極大値は、 $G(x)$ の  $\square{\text{ナ}}$  と等しいことがわかる。

$\square{\text{ソ}}$  ~  $\square{\text{ツ}}$  の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

① 0                      ② 1                      ③  $k$                       ④  $x$

$\square{\text{テ}}$  の解答群

①  $f(x)$                       ②  $F(x)$                       ③  $G(x)$

$\square{\text{ト}}$  の解答群

① 面積                      ② 面積の  $-1$  倍

$\square{\text{ナ}}$  の解答群

① 極小値                      ② 極大値  
 ③ 極小値の  $-1$  倍                      ④ 極大値の  $-1$  倍



第4問

解答解説のページへ

座標平面上で、 $x$ 座標と $y$ 座標がともに整数である点を格子点という。いくつかの直線や曲線で囲まれた図形の内部にある格子点の個数を考えよう。ただし、図形の内部は、境界(境界線)を含まないものとする。

例えば直線  $y = -x + 5$  と  $x$  軸、 $y$  軸で囲まれた図形を  $S$  とする。 $S$  は図1の灰色部分であり、 $S$  の内部にある格子点を黒丸、内部にない格子点を白丸で表している。したがって、 $S$  の内部にある格子点の個数は6である。

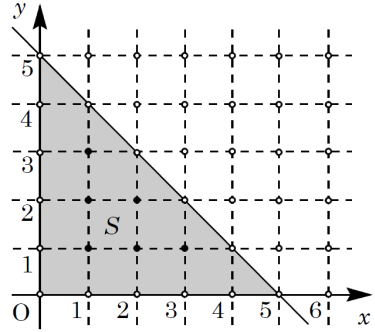


図 1

(1) 直線  $y = 3x$  と  $x$  軸、直線  $x = 21$  で囲まれた図形を  $T$  とする。 $T$  の内部にある格子点の個数を考える。

直線  $x = 1$  上の格子点で  $T$  の内部にあるものは、点  $(1, 1)$  と点  $(1, 2)$  の2個である。点  $(1, 0)$  と点  $(1, 3)$  は  $T$  の境界にあるため、内部にはない。

$n$  を整数とする。直線  $x = n$  が  $T$  の内部にある格子点を通るのは、 $1 \leq n \leq 20$  のときである。 $1 \leq n \leq 20$  のとき、直線  $x = n$  上の格子点で  $T$  の内部にあるものの個数を  $a_n$  とおく。 $a_1 = 2$  であり、 $a_2 = \boxed{\text{ア}}$ 、 $a_3 = \boxed{\text{イ}}$  である。数列  $\{a_n\}$  は  $\boxed{\text{ウ}}$  が  $\boxed{\text{エ}}$  の  $\boxed{\text{オ}}$  数列である。

したがって、 $T$  の内部にある格子点の個数は  $\boxed{\text{カキク}}$  である。

$\boxed{\text{ウ}}$  の解答群

- |      |      |
|------|------|
| ① 公差 | ① 公比 |
|------|------|

$\boxed{\text{オ}}$  の解答群

- |      |      |
|------|------|
| ① 等差 | ① 等比 |
|------|------|

(2)  $n$  を自然数とする。関数  $y = 2^x$  のグラフと  $x$  軸、 $y$  軸および直線  $x = n + 1$  で囲まれた図形を  $U$  とする。

$k$  を整数とする。直線  $x = k$  が  $U$  の内部にある格子点を通るとき、直線  $x = k$  上の格子点で  $U$  の内部にあるものの個数は  $\boxed{\text{ケ}}$  である。

したがって、 $U$  の内部にある格子点の個数は、 $\sum_{k=1}^{\boxed{\text{コ}}} (\boxed{\text{ケ}}) = \boxed{\text{サ}}$  である。

$\boxed{\text{ケ}}$  の解答群

- |                 |                 |             |
|-----------------|-----------------|-------------|
| ① $2k - 2$      | ① $2k - 1$      | ② $2k$      |
| ③ $2^{k-1} - 2$ | ④ $2^{k-1} - 1$ | ⑤ $2^{k-1}$ |
| ⑥ $2^k - 2$     | ⑦ $2^k - 1$     | ⑧ $2^k$     |

コ	の解答群
---	------

① $n-1$	① $n$	② $n+1$
③ $2n-1$	④ $2n$	⑤ $2n+1$
⑥ $2^n-1$	⑦ $2^n$	⑧ $2^n+1$

サ	の解答群
---	------

① $2^n-2n-1$	① $2^n-2n$	② $2^n-n-1$
③ $2^n-n$	④ $2^n-3$	⑤ $2^{n+1}-2n-2$
⑥ $2^{n+1}-2n-1$	⑦ $2^{n+1}-n-2$	⑧ $2^{n+1}-n-1$
⑨ $2^{n+1}-3$		

- (3)  $a, b, c$  は整数で,  $a > 0$ ,  $b^2 - 4ac < 0$  を満たすとする。放物線  $y = ax^2 + bx + c$  と  $x$  軸,  $y$  軸および直線  $x = n+1$  で囲まれた図形を  $V$  とする。すべての自然数  $n$  に対して,  $V$  の内部にある格子点の個数が  $n^3$  となるのは,  $a =$  シ,  $b =$  スセ,  $c =$  ソ のときである。

## 第5問

解答解説のページへ

以下の問題を解答するにあたっては、必要に応じて 14 ページの正規分布表を用いてもよい。

Q 地域ではレモンを栽培しており、収穫されるレモンを重さによってサイズごとに分類している(表 1)。過去に収穫されたレモンの重さは、平均が 110g、標準偏差が 20g の正規分布に従うとする。

表1 レモンのサイズと重さの対応関係

サイズ	レモン1個の重さ
S	80g 以上 90g 未満
M	90g 以上 110g 未満
L	110g 以上 140g 未満
2L	140g 以上 170g 未満
その他	80g 未満または 170g 以上

(1) Q 地域で今年収穫されるレモンの重さ(単位は g)は、過去に収穫されたレモンの重さ

と同じ分布に従うとする。すなわち、今年収穫される 1 個のレモンの重さを確率変数  $X$  で表すと、 $X$  は正規分布  $N(110, 20^2)$  に従うとする。よって、今年収穫されるレモンから無作為にレモンを 1 個抽出するとき、そのレモンが L サイズである確率は、 $P(110 \leq X < 140) = P(110 \leq X \leq 140)$  であることに注意すると、0. アイウエ である。

いま、Q 地域で今年収穫されるレモンが 20 万個であるとし、その中の L サイズのレモンの個数を確率変数  $Y$  で表すと、 $Y$  は二項分布に従い、 $Y$  の平均(期待値)は オ となる。

オ については、最も適当なものを、次の ①～⑦のうちから 1 つ選べ。

① 13100	① 13360	② 31740	③ 68260
④ 86640	⑤ 100000	⑥ 168260	⑦ 186640

(2) 太郎さんと花子さんは、Q 地域で今年収穫されるレモンから何個かを抽出して、今年収穫されるレモンの重さの平均(母平均)を推定する方法について話している。

太郎：母平均に対する信頼度 95%の信頼区間の幅を 4g 以下にして推定したいね。

花子：母標準偏差を過去と同じ 20g とすると、何個のレモンの重さを量ればいいのか。

太郎：信頼区間の式から、必要な標本の大きさを求めてみようよ。

母平均に対する信頼度 95%の信頼区間の幅を 4g 以下にするために必要な標本の大きさを求める。

いま、Q 地域で今年収穫されるレモン全体を母集団とし、その重さの母平均を  $mg$ 、母標準偏差を  $\sigma g$  とする。この母集団から無作為に抽出した  $n$  個のレモンの重さを確率変数  $W_1, W_2, \dots, W_n$  で表すと、標本の大きさ  $n$  が十分に大きいとき、標本平均  $\bar{W} = \frac{1}{n}(W_1 + W_2 + \dots + W_n)$  は近似的に正規分布  $N(m, \text{ カ })$  に従う。

また、 $m$  に対する信頼度 95%の信頼区間を  $A \leq m \leq B$  と表すと、信頼区間の幅は

$$B - A = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\sqrt{n}}$$

となる。

したがって、母標準偏差を過去と同じ  $\sigma = 20$  として、 $n$  に関する不等式

$$\frac{\boxed{\text{キ}}}{\sqrt{n}} \leq 4 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を満たす自然数  $n$  を求めればよい。①の両辺は正であるから、

両辺を 2 乗して整理すると、 $(\boxed{\text{キ}})^2 \leq 16n$  となる。この不等式を満たす最小

の自然数  $n$  を  $n_0$  とすると、 $n_0 = \boxed{\text{クケコ}}$  である。ゆえに、 $m$  に対する信頼度 95%の

信頼区間の幅を 4g 以下にするために必要な標本の大きさ  $n$  のうち、最小のものは

$\boxed{\text{クケコ}}$  であることがわかる。

$\boxed{\text{カ}}$  の解答群

① $\sigma$	② $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	③ $\frac{\sqrt{\sigma}}{n}$	④ $\frac{\sigma}{n}$
⑤ $\sigma^2$	⑥ $\frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}$	⑦ $\frac{\sigma^2}{n}$	⑧ $\frac{\sigma^2}{n^2}$

$\boxed{\text{キ}}$  については、最も適当なものを、次の ①～⑧のうちから 1 つ選べ。

① $\sigma$	② $1.65\sigma$	③ $1.96\sigma$
④ $2\sigma$	⑤ $3.3\sigma$	⑥ $3.92\sigma$

- (3) 太郎さんと花子さんは、Q 地域で今年収穫されるレモンの重さについて話している。

太郎：今年のレモンの重さは、他の地域では例年よりも軽そうだと聞いたよ。  
 花子：Q 地域でも、過去の平均 110g と比べて軽いのかな。  
 太郎：標本の大きさを 400、母標準偏差を過去と同じ 20g として、仮説検定を試みようよ。

(2)の  $m$  を用いて、Q 地域で今年収穫されるレモンの重さの母平均  $m$ g が過去の平均 110g より軽いといえるかを、有意水準 5% (0.05)で仮説検定を行い検証したい。ただし、標本の大きさは 400、母標準偏差は過去と同じ 20g とする。ここで、統計的に検証したい仮説を「対立仮説」、対立仮説に反する仮定として設けた仮説を「帰無仮説」とする。このとき帰無仮説は「 $m = 110$ 」、対立仮説は「 $\boxed{\text{サ}}$ 」である。これらの仮説に対して、有意水準 5%で帰無仮説が棄却(否定)されるかどうかを判断する。

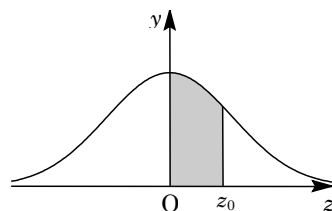
いま、帰無仮説が正しいと仮定する。標本の大きさ 400 は十分に大きいので、(2)の標本平均  $\bar{W}$  は近似的に正規分布  $\boxed{\text{シ}}$  に従う。無作為抽出した 400 個のレモンの重さの平均が 108.2 g となった。このとき確率  $P(\bar{W} \leq 108.2)$  は  $0.\boxed{\text{スセソタ}}$  となる。この値をパーセント表示した値は有意水準 5%より  $\boxed{\text{チ}}$ 。

したがって、有意水準 5%で今年収穫されるレモンの重さの母平均は110g より軽  
いと **ツ**。

<b>サ</b> の解答群		
① $m < 110$	① $m \leq 110$	② $m = 110$
③ $m \geq 110$	④ $m > 110$	
<b>シ</b> の解答群		
① $N(108.2, 400)$	① $N(108.2, 20)$	② $N(108.2, 1)$
③ $N(110, 400)$	④ $N(110, 20)$	⑤ $N(110, 1)$
<b>チ</b> の解答群		
① 小さいから、帰無仮説は棄却されない		
① 小さいから、帰無仮説は棄却される		
② 大きいから、帰無仮説は棄却されない		
③ 大きいから、帰無仮説は棄却される		
<b>ツ</b> の解答群		
① 判断できる		① 判断できない

## 正規分布表

次の表は、標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。

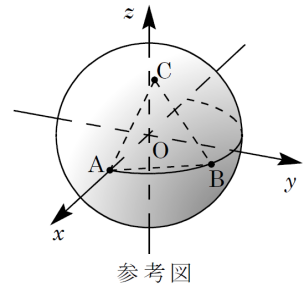


$z_0$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

第6問

解答解説のページへ

O を原点とする座標空間において、O を中心とする半径 1 の球面を  $S$  とする。 $S$  上に 2 つの点  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(a, \sqrt{1-a^2}, 0)$  をとる。ただし、 $a$  は  $-1 < a < 1$  を満たす実数とする。 $S$  上の点  $C$  を、 $\triangle ABC$  が正三角形となるようにとれるかどうかを考えてみよう。



- (1) 点  $C$  の座標を  $(x, y, z)$  とする。 $C$  が  $S$  上にあるとき、 $|\overrightarrow{OC}|^2 = \boxed{\text{ア}}$  である。これをベクトル  $\overrightarrow{OC}$  の成分を用いて表すと、 $x^2 + y^2 + z^2 = \boxed{\text{ア}}$  ……①となる。

さらに、 $\triangle ABC$  が正三角形であるとする。 $\triangle OAC$  と  $\triangle OAB$  は、対応する 3 組の辺の長さがそれぞれ等しいから合同である。したがって、対応する角の大きさも等しいから、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \boxed{\text{イ}}$  が成り立つ。これをベクトルの成分を用いて表すと、 $x = \boxed{\text{ウ}}$  ……②となる。

同様に  $\triangle OBC$  と  $\triangle OAB$  も合同であるから、 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \boxed{\text{イ}}$  が成り立ち、これをベクトルの成分を用いて表すと、 $\boxed{\text{エ}}x + \boxed{\text{オ}}y = \boxed{\text{ウ}}$  ……③となる。

逆に、実数  $x, y, z$  が①, ②, ③を満たすとき、 $C(x, y, z)$  は  $S$  上の点であり、 $\triangle ABC$  は正三角形になっていることがわかる。

$\boxed{\text{イ}}$  の解答群

① 0	① 1	② $ \overrightarrow{AB} $
③ $ \overrightarrow{AB} ^2$	④ $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$	⑤ $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB}$

$\boxed{\text{ウ}} \sim \boxed{\text{オ}}$  の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

① $a$	① $(1+a)$	② $(1-a)$
③ $a^2$	④ $(1-a^2)$	⑤ $\sqrt{1-a^2}$

- (2)  $a$  に具体的な値を代入して、 $\triangle ABC$  が正三角形となる  $S$  上の点  $C$  があるかどうかを調べよう。

- (i)  $a = \frac{3}{5}$  のとき、②と③を満たす実数  $x, y$  は、 $x = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ ,  $y = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$  である。

この  $x, y$  に対して、①を満たす実数  $z$  は  $\boxed{\text{サ}}$ 。したがって、 $\triangle ABC$  が正三角形となる  $S$  上の点  $C$  は  $\boxed{\text{サ}}$ 。

- (ii)  $a = -\frac{3}{5}$  のときも調べよう。(i)と同様に考えると、 $\triangle ABC$  が正三角形となる  $S$  上の点  $C$  は  $\boxed{\text{シ}}$  ことがわかる。

サ,  シ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

- |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> ① ない       | <input type="checkbox"/> ① ちょうど1つある | <input type="checkbox"/> ② ちょうど2つある |
| <input type="checkbox"/> ③ ちょうど3つある | <input type="checkbox"/> ④ ちょうど4つある | <input type="checkbox"/> ⑤ 無限に多くある  |

- (3)  $\triangle ABC$  が正三角形となる  $S$  上の点  $C$  があるための,  $a$  に関する条件を見つけよう。実数  $x, y, z$  は, ①, ②, ③を満たすとする。②と③から

$$x = \text{ウ}, y = \frac{\text{ウ}(1 - \text{エ})}{\text{オ}}$$

である。このとき, ①から,  $z^2 = \text{ア} - x^2 - y^2 = \frac{\text{ス}}{1+a}$  となる。さらに,

$z^2 \geq 0, 1+a > 0$  であるから  $\text{ス} \geq 0$  である。

逆に,  $\text{ス} \geq 0$  のとき, ①, ②, ③を満たす  $x, y, z$  があることがわかる。

以上のことから,  $\text{セ}$  は,  $\triangle ABC$  が正三角形となる  $S$  上の点  $C$  があるための必要十分条件である。

ス の解答群

- |  |   |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> ① $1-2a$          | <input type="checkbox"/> ① $(1-a)^2$        |
| <input type="checkbox"/> ② $(1+2a)^2$      | <input type="checkbox"/> ③ $(1+2a)(1-a)$    |
| <input type="checkbox"/> ④ $(1-2a)(1-a)$   | <input type="checkbox"/> ⑤ $(1-2a^2)(1+2a)$ |
| <input type="checkbox"/> ⑥ $(1+2a^2)(1-a)$ | <input type="checkbox"/> ⑦ $(1-2a^2)(1-a)$  |

セ の解答群

- |  |  |   |
|--|--|---|
| <input type="checkbox"/> ① $-1 < a < 1$  | <input type="checkbox"/> ① $-1 < a \leq \frac{1}{2}$ | <input type="checkbox"/> ② $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| <input type="checkbox"/> ③ $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$                                | <input type="checkbox"/> ④ $-\frac{1}{2} \leq a < 1$ | <input type="checkbox"/> ⑤ $\frac{1}{2} \leq a < 1$                             |
| <input type="checkbox"/> ⑥ $-1 < a \leq -\frac{1}{2}$ または $\frac{1}{2} \leq a < 1$               |  |   |
| <input type="checkbox"/> ⑦ $-1 < a \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ または $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a < 1$ |  |   |



## 第7問

解答解説のページへ

$\alpha, \beta, \gamma$  を異なる複素数とし、複素数平面上に3点  $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$  をとる。  
直線  $AB$  と直線  $AC$  の関係について考えよう。

以下、複素数の偏角は  $0$  以上  $2\pi$  未満とする。

- (1)  $\alpha = 3 + 2i, \beta = 7, \gamma = 7 + 10i$  の場合を考える。 $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$  の偏角を求めよう。

$\gamma - \alpha = \boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}}i, \beta - \alpha = \boxed{\text{ウ}} - \boxed{\text{エ}}i$  であるから、  
 $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \boxed{\text{オ}}$  であり、 $\boxed{\text{オ}}$  の偏角は  $\boxed{\text{カ}}$  である。

$\boxed{\text{オ}}$  の解答群

① $i$	② $1 + i$	③ $2$	④ $2i$
⑤ $-i$	⑥ $1 - i$	⑦ $-2$	⑧ $-2i$

$\boxed{\text{カ}}$  の解答群

① $0$	② $\frac{\pi}{6}$	③ $\frac{\pi}{4}$	④ $\frac{\pi}{3}$
⑤ $\frac{\pi}{2}$	⑥ $\frac{3}{4}\pi$	⑦ $\pi$	⑧ $\frac{5}{4}\pi$
⑨ $\frac{3}{2}\pi$	⑩ $\frac{7}{4}\pi$		

- (2)  $w = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$  とおく。直線  $AB$  と直線  $AC$  が垂直に交わるのは、 $w$  の偏角が  $\frac{\pi}{2}$  また

は  $\frac{3}{2}\pi$  のときである。このとき、 $w$  は  $\boxed{\text{キ}}$  であるから、 $w + \bar{w} = \boxed{\text{ク}}$  である。

逆に、 $w \neq 0$  に注意すると、 $w + \bar{w} = \boxed{\text{ク}}$  のとき、 $w$  は  $\boxed{\text{キ}}$  であるので、直線  $AB$  と直線  $AC$  が垂直に交わる。

$\boxed{\text{キ}}$  の解答群

① $0$ でない実数	② $1 + i$ または $1 - i$
③ 純虚数(実部が $0$ である虚数)	④ $-1 + i$ または $-1 - i$

$\boxed{\text{ク}}$  の解答群

① $0$	② $1$	③ $2$	④ $i$
⑤ $2i$	⑥ $-1$	⑦ $-2$	⑧ $-i$

- (3)  $z$  は  $0, 2, -2$  でない複素数とする。

- (i)  $\alpha = z, \beta = 2, \gamma = \frac{4}{z}$  とする。直線  $AB$  と直線  $AC$  が垂直に交わるための条件に

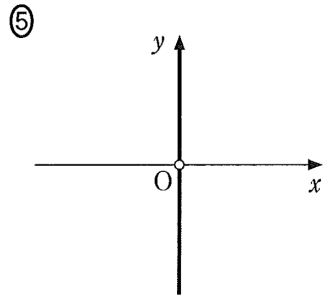
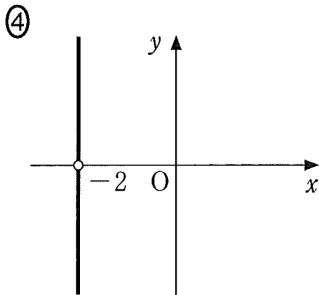
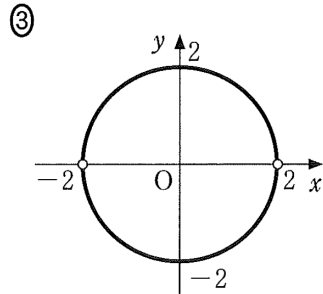
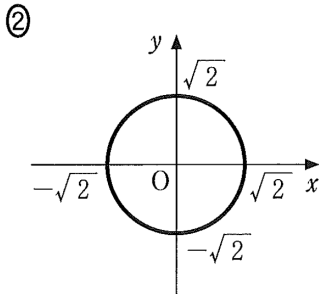
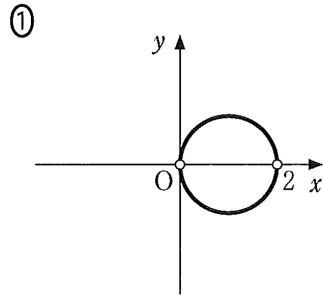
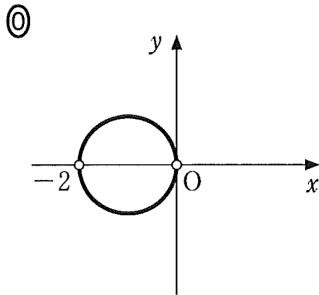
ついて考えよう。 $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\frac{4}{z} - z}{2 - z} = 1 + \frac{2}{z}$  が成り立つので、直線  $AB$  と直線  $AC$  が垂

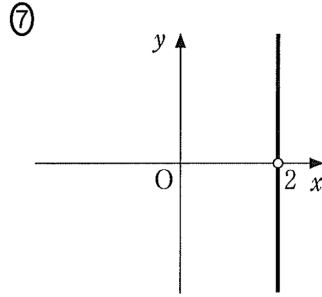
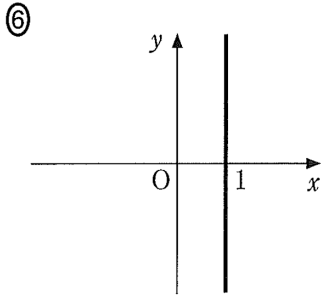
直に交わるための必要十分条件は、 $(1 + \frac{2}{z}) + \overline{(1 + \frac{2}{z})} = \boxed{\text{ク}}$  である。

これは、 $2 + \frac{2}{z} + \frac{2}{z} = \text{ク}$ と変形できる。さらに、この両辺に $z\bar{z}$ をかけて整理すると、直線 AB と直線 AC が垂直に交わるための必要十分条件は $\text{ケ}$ であることがわかる。したがって、直線 AB と直線 AC が垂直に交わるような点  $z$  全体を複素数平面上に図示すると $\text{コ}$ である。

$\text{ケ}$ の解答群	
① $ z  =  z-4 $	① $ z  =  z-2 $
② $ z  =  z+4 $	③ $ z+1  =  z-1 $
④ $ z-1  = 1$	⑤ $ z  = 2$
⑥ $ z+1  = 1$	⑦ $ z  = \sqrt{2}$

$\text{コ}$ については、最も適当なものを、次の①～⑦のうちから1つ選べ。

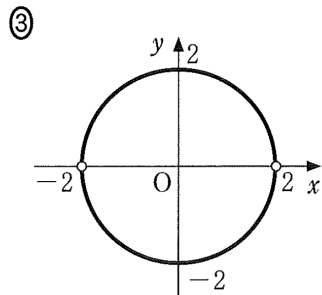
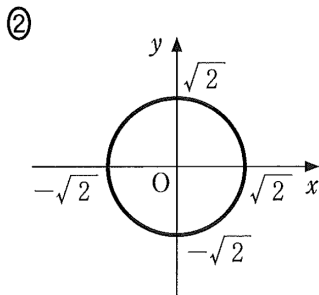
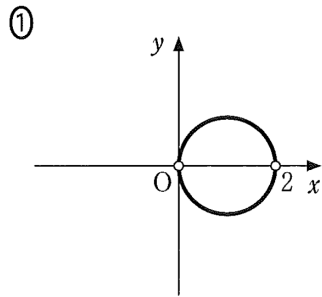
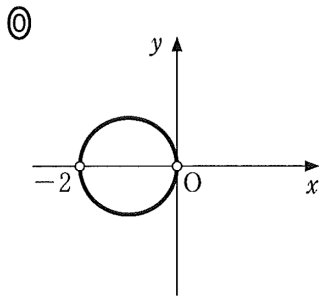


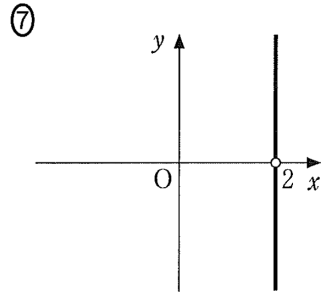
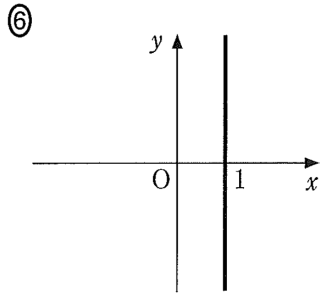
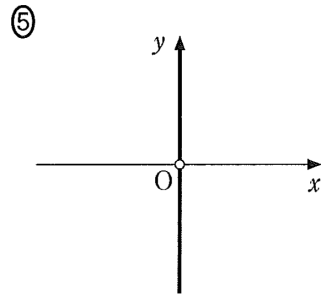
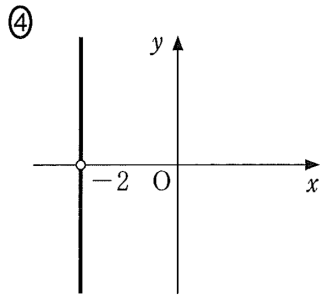


(ii) (i)の  $\alpha, \beta, \gamma$  をそれぞれ  $-1$  倍した複素数  $\alpha' = -z, \beta' = -2, \gamma' = -\frac{4}{z}$  について考える。複素数平面上の異なる 3 点  $A'(\alpha'), B'(\beta'), C'(\gamma')$  について、直線  $A'B'$  と直線  $A'C'$  が垂直になるような点  $z$  全体を複素数平面上に図示すると **サ** である。

(iii) (i)の  $\alpha, \beta, \gamma$  における  $z$  を  $-z$  に置き換え、複素数  $\alpha'' = -z, \beta'' = 2, \gamma'' = -\frac{4}{z}$  について考える。複素数平面上の異なる 3 点  $A''(\alpha''), B''(\beta''), C''(\gamma'')$  について、直線  $A''B''$  と直線  $A''C''$  が垂直になるような点  $z$  全体を複素数平面上に図示すると **シ** である。

**サ**, **シ** については、最も適当なものを、次の ①～④ のうちから 1 つ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。





## 第1問

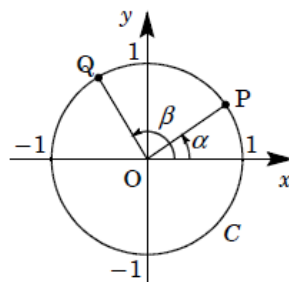
問題のページへ

(1)  $0 \leq \theta < \pi$  のとき,  $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2\theta \cdots \cdots \textcircled{1}$  に対して,  $\alpha = \theta + \frac{\pi}{6}$ ,  $\beta = 2\theta$  とおくと,  $\textcircled{1}$ は  $\sin \alpha = \sin \beta \cdots \cdots \textcircled{2}$  となる。

(i)  $\alpha = \beta$  のとき  $\textcircled{2}$  は成り立ち,  $\theta + \frac{\pi}{6} = 2\theta$  から  $\theta = \frac{\pi}{6}$  となり, このとき,

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2\theta = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(ii) 右図において,  $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$ ,  $Q(\cos \beta, \sin \beta)$  から,  $\textcircled{2}$  が成り立つのは,  $\textcircled{2}$  「点  $P$  の  $y$  座標と, 点  $Q$  の  $y$  座標が等しい」。



(iii)  $\alpha \neq \beta$  ( $\theta \neq \frac{\pi}{6}$ ) のとき

・  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  の場合  $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{2}{3}\pi$ ,  $0 \leq \beta \leq \pi$  から,

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha + \beta = \pi$$

これより,  $\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + 2\theta = \pi$  となり,  $3\theta = \frac{5}{6}\pi$  から  $\theta = \frac{5}{18}\pi$  となる。

・  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  の場合  $\frac{2}{3}\pi < \alpha < \frac{7}{6}\pi$ ,  $\pi < \beta < 2\pi$  から,

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{3}{2}\pi, \quad \alpha + \beta = 3\pi$$

これより,  $\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + 2\theta = 3\pi$  となり,  $3\theta = \frac{17}{6}\pi$  から  $\theta = \frac{17}{18}\pi$  となる。

(2)  $0 \leq \theta < \pi$  のとき, 方程式  $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2\theta \cdots \cdots \textcircled{3}$  に対して, (1)と同様にして,

(a)  $\alpha = \beta$  のとき  $\theta = \frac{\pi}{6}$  となる。

(b)  $\textcircled{3}$ は「点  $P$  の  $x$  座標と, 点  $Q$  の  $x$  座標が等しい」ことより,  $\alpha \neq \beta$  ( $\theta \neq \frac{\pi}{6}$ ) のとき,

・  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  の場合  $\cos \alpha = \cos \beta$  を満たす  $\alpha, \beta$  は存在しない。

・  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  の場合  $\cos \alpha = \cos \beta$  を満たす  $\alpha, \beta$  は,

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \pi, \quad \alpha + \beta = 2\pi$$

これより,  $\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + 2\theta = 2\pi$  となり,  $3\theta = \frac{11}{6}\pi$  から  $\theta = \frac{11}{18}\pi$  となる。

## [解説]

誘導に従って解くタイプの三角方程式の問題です。(1)と同様なプロセスで, (2)も記しています。

## 第2問

問題のページへ

- (1) 水草Aの量が1日ごとに一定の倍率
- $r$
- で増えるとしたとき、観測結果から、

$$r^3 = 1.32, \log_{10} r^3 = \log_{10} 1.32, 3\log_{10} r = 0.1206$$

これより、 $\log_{10} r = \frac{0.1206}{3} = 0.0402$ となる。

- (2) 0日目の作業の後に残す水草Aの量を
- $a\%$
- としたとき、14日目に水草Aの量は
- $a$
- の
- $r^{14}$
- 倍になり、このときの水草Aの量がちょうど60%であるには、

$$a \times r^{14} = 60, \log_{10} a + \log_{10} r^{14} = \log_{10} 60, \log_{10} a + 14\log_{10} r = 1 + \log_{10} 6$$

$\log_{10} r = 0.0402, \log_{10} 6 = 0.7782$ から、

$$\log_{10} a = 1 + 0.7782 - 14 \times 0.0402 = 1.2154$$

ここで、 $\log_{10} 1.64 < 0.2154 < \log_{10} 1.65$ なので、

$$\log_{10} 10 + \log_{10} 1.64 < 1.2154 < \log_{10} 10 + \log_{10} 1.65$$

すると、 $\log_{10} 16.4 < 1.2154 < \log_{10} 16.5$ から、 $\log_{10} 16.4 < \log_{10} a < \log_{10} 16.5$

したがって、 $16.4 < a < 16.5$ となり、 $a$ 以下の最大整数は16である。

## [解説]

対数の応用問題です。丁寧な誘導に従って、常用対数表を読んでいけばOKです。

## 第3問

問題のページへ

$F(x)$ は $x=0$ で極小値0,  $G(x)$ は $x=k$  ( $k \neq 0$ )で極大値0をとり,

$$F'(x) = G'(x) = f(x)$$

- (1)  $F(x) = 2x^3 + 3x^2$ のとき,  $f(x) = F'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$

すると,  $F(x)$ は増減が右表のようになり,

$x = -1$ で極大値をとる。

また,  $G'(x) = f(x)$ から,

$$G(x) = F(x) + C = 2x^3 + 3x^2 + C$$

これより  $G(x)$ は $x=0$ で極小値をとる。

さらに,  $G(x)$ は $x=-1$ で極大値0をとることから,  $G(-1) = 0$ となり,

$$-2 + 3 + C = 0, \quad C = -1$$

- (2)  $k > 0$ のときを考える。

- (i)  $F(x)$ は $x=0$ で極小値0をとるので,

$F'(0) = f(0) = 0$ であり,  $x=0$ の前後で

$f(x)$ の符号は負から正に変わる。また,

$G(x)$ は $x=k$ で極大値0をとることから,

$G'(k) = f(k) = 0$ であり,  $x=k$ の前後で

$f(x)$ の符号は正から負に変わる。すると,  $F(x)$ の増減は右上表のようになり,

$y = F(x)$ のグラフの概形は㉓である。

$x$	...	-1	...	0	...
$f(x)$	+	0	-	0	+
$F(x)$	↗		↘	0	↗
$G(x)$	↗	0	↘		↗

$x$	...	0	...	$k$	...
$f(x)$	-	0	+	0	-
$F(x)$	↘	0	↗		↘
$G(x)$	↘		↗	0	↘

- (ii)  $F(0) = 0$ から,  $F(x) = F(x) - F(0) = [F(t)]_0^x = \int_0^x F'(t) dt = \int_0^x f(t) dt$

すると,  $F(x)$ の極大値は $F(k) = \int_0^k f(t) dt$ と表され,  $f(0) = f(k) = 0$ で,

$0 < t < k$ において $f(t) > 0$ なので,  $F(k)$ は関数 $y = f(x)$ のグラフと $x$ 軸で囲まれた図形の面積に等しい。同様に,  $G(k) = 0$ から,

$$G(x) = G(x) - G(k) = [G(t)]_k^x = \int_k^x G'(t) dt = \int_k^x f(t) dt$$

これより,  $F(k) = \int_0^k f(t) dt = -\int_k^0 f(t) dt = -G(0)$ となるので,  $F(x)$ の極大値 $F(k)$ は $G(x)$ の極小値 $G(0)$ の-1倍に等しい。

## [解説]

微分と積分の関係についての問題です。与えられた $F(x)$ と $G(x)$ は定数の差だけということに着目し, グラフをイメージして考えていくと, 計算はほとんど不要で完答できます。

## 第4問

問題のページへ

- (1) 直線  $y = 3x$  と  $x$  軸, 直線  $x = 21$  で囲まれた図形  $T$  に対して, 直線  $x = n$  ( $1 \leq n \leq 20$ ) 上の格子点で  $T$  の内部にあるものの個数  $a_n$  は,  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 3 \cdot 2 - 1 = 5$ ,  $a_3 = 3 \cdot 3 - 1 = 8$  となり, 一般的に,  $a_n = 3n - 1$  と表せる。

これより, 数列  $\{a_n\}$  は公差が 3 の等差数列である。

すると,  $T$  の内部にある格子点の個数は,

$$\sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{20} (3k - 1) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 - 20 = 610$$

- (2) 関数  $y = 2^x$  のグラフと  $x$  軸,  $y$  軸および直線  $x = n+1$  で囲まれた図形  $U$  に対して, 直線  $x = k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) 上の格子点で  $U$  の内部にあるものの個数  $b_k$  は,  $b_k = 2^k - 1$  となる。

すると,  $U$  の内部にある格子点の個数は,

$$\sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (2^k - 1) = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - n = 2^{n+1} - n - 2$$

- (3)  $a, b, c$  は整数で,  $a > 0$ ,  $b^2 - 4ac < 0$  を満たすとき, 放物線  $C: y = ax^2 + bx + c$  は  $x$  軸の上側にある。(2)と同様に考え, 放

物線  $C$  と  $x$  軸,  $y$  軸および直線  $x = n+1$  で囲まれた図形  $V$  に対して, 直線  $x = k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) 上の格子点で  $V$  の内部にあるものの個数は,  $ak^2 + bk + c - 1$  となる。

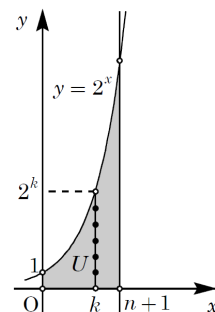
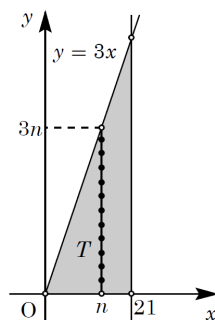
すると,  $V$  の内部にある格子点の個数は,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (ak^2 + bk + c - 1) &= \frac{a}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{b}{2} n(n+1) + (c-1)n \\ &= \frac{a}{3} n^3 + \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) n^2 + \left(\frac{a}{6} + \frac{b}{2} + c - 1\right) n \end{aligned}$$

すべての自然数  $n$  に対し,  $\frac{a}{3} n^3 + \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) n^2 + \left(\frac{a}{6} + \frac{b}{2} + c - 1\right) n = n^3$  なので,

$$\frac{a}{3} = 1, \quad \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 0, \quad \frac{a}{6} + \frac{b}{2} + c - 1 = 0$$

これより,  $a = 3$ ,  $b = -3$ ,  $c = 2$  である。



## [解説]

格子点の個数についての頻出題です。丁寧すぎるほどの説明付きです。



## 第5問

問題のページへ

- (1) 今年収穫される 1 個のレモンの重さを確率変数  $X$  で表すとき、 $X$  は正規分布  $N(110, 20^2)$  に従うとする。さて、今年収穫されるレモンから無作為に 1 個抽出するとき、そのレモンが L サイズである確率  $P(110 \leq X \leq 140)$  は、 $Z = \frac{X-110}{20}$  とおくと  $Z$  は  $N(0, 1)$  に従うことにより、

$$P(110 \leq X < 140) = P(110 \leq X \leq 140) = P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$$

ここで、収穫されるレモン 20 万個のうち、L サイズのレモンの個数を確率変数  $Y$  で表すと、 $Y$  は二項分布  $B(200000, 0.4332)$  に従うので、その平均  $E(Y)$  は、

$$E(Y) = 200000 \times 0.4332 = 86640$$

- (2) 今年収穫されるレモン全体を母集団とし、その重さの母平均を  $mg$ 、母標準偏差を  $\sigma g$  とする。この母集団から無作為に抽出した  $n$  個のレモンの重さを確率変数  $W_1, W_2, \dots, W_n$  で表すと、 $n$  が十分に大きければ、 $\bar{W} = \frac{1}{n}(W_1 + W_2 + \dots + W_n)$  は  $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$  に従い、 $m$  に対する信頼度 95% の信頼区間を  $A \leq m \leq B$  と表したとき、

$$A = \bar{W} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad B = \bar{W} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

これより、信頼区間の幅  $B - A = 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3.92\sigma}{\sqrt{n}}$  となる。

そして、 $\sigma = 20$  として  $B - A \leq 4$  とおくと、 $\frac{3.92 \times 20}{\sqrt{n}} \leq 4 \dots\dots \textcircled{1}$  となり、

$$(3.92 \times 20)^2 \leq 16n, \quad n \geq \frac{(3.92 \times 20)^2}{16} = (3.92 \times 5)^2 = 19.6^2 = 384.16$$

よって、 $\textcircled{1}$  を満たす最小の自然数  $n$  を  $n_0$  とすると、 $n_0 = 385$  である。

- (3) 今年収穫されるレモンの重さの母平均  $mg$  が過去の平均  $110g$  より軽いといえるかを、有意水準 5% で仮説検定する。

まず、標本の大きさ  $n = 400$ 、母標準偏差  $\sigma = 20$  とし、帰無仮説  $H_0$  「 $m = 110$ 」、対立仮説  $H_1$  「 $m < 110$ 」とする。

ここで、 $H_0$  が正しいと仮定すると、 $\bar{W}$  は  $N\left(110, \frac{20^2}{400}\right) = N(110, 1)$  に従うので、 $Z = \bar{W} - 110$  とおくと  $Z$  は  $N(0, 1)$  に従うことにより、

$$P(\bar{W} \leq 108.2) = P(Z \leq -1.8) = 0.5 - 0.4641 = 0.0359 < 0.05$$

すると、 $P(\bar{W} \leq 108.2)$  は有意水準 5% より小さいから、帰無仮説  $H_0$  は棄却され、今年収穫されるレモンの重さの母平均は  $110g$  より軽いと判断できる。

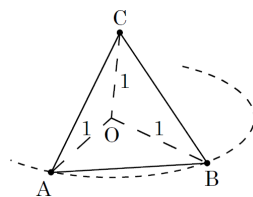
## [解説]

母平均の推定と仮説検定についての基本題です。ただ、片側検定でしたが。

## 第6問

問題のページへ

$O$  を中心とする半径 1 の球面  $S$  上に、2 点  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(a, \sqrt{1-a^2}, 0)$  ( $-1 < a < 1$ ) をとる。そして、 $S$  上に点  $C$  を、 $\triangle ABC$  が正三角形となるようにとれるかどうかを考える。



(1)  $C(x, y, z)$  とおくと、 $|\overrightarrow{OC}|^2 = 1$  から、

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また、 $\triangle OAC \equiv \triangle OAB$  から  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  となり、 $x = a \cdots \cdots \textcircled{2}$

$\triangle OBC \equiv \triangle OAB$  から  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  となり、 $ax + \sqrt{1-a^2}y = a \cdots \cdots \textcircled{3}$

(2) (i)  $a = \frac{3}{5}$  のとき、 $\textcircled{2}$  より  $x = \frac{3}{5}$ 、 $\textcircled{3}$  は  $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = \frac{3}{5}$  となり、 $y = \frac{3}{10}$  である。

$$\textcircled{1} \text{ に代入すると、} z^2 = 1 - \frac{9}{25} - \frac{9}{100} = \frac{11}{20} \text{ となり、} z = \pm \sqrt{\frac{11}{20}}$$

すると、実数  $z$  はちょうど 2 つあるので、 $\triangle ABC$  が正三角形となる  $S$  上の点  $C$  はちょうど 2 つある。

(ii)  $a = -\frac{3}{5}$  のとき、 $\textcircled{2}$  より  $x = -\frac{3}{5}$ 、 $\textcircled{3}$  は  $-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = -\frac{3}{5}$  となり、 $y = -\frac{6}{5}$

$$\textcircled{1} \text{ に代入すると、} z^2 = 1 - \frac{9}{25} - \frac{36}{25} = -\frac{4}{5} \text{ となり、} z \text{ は存在しない。これより、}$$

$\triangle ABC$  が正三角形となる  $S$  上の点  $C$  はない。

(3)  $\textcircled{2}$  より  $x = a$ 、 $\textcircled{3}$  に代入して  $a^2 + \sqrt{1-a^2}y = a$  から  $y = \frac{a(1-a)}{\sqrt{1-a^2}}$  となり、 $\textcircled{1}$  より、

$$\begin{aligned} z^2 &= 1 - a^2 - \frac{a^2(1-a)^2}{1-a^2} = (1-a)(1+a) - \frac{a^2(1-a)}{1+a} \\ &= \frac{(1-a)\{(1+a)^2 - a^2\}}{1+a} = \frac{(1+2a)(1-a)}{1+a} \end{aligned}$$

$z^2 \geq 0$ 、 $1+a > 0$  から、 $z$  が存在する条件は、 $(1+2a)(1-a) \geq 0$  である。

逆に、 $(1+2a)(1-a) \geq 0$  のとき、 $\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}$  を満たす  $x, y, z$  が存在する。

以上より、 $\triangle ABC$  が正三角形となる  $S$  上の点  $C$  があるための必要十分条件は、 $(1+2a)(1-a) \geq 0$  かつ  $-1 < a < 1$ 、すなわち  $-\frac{1}{2} \leq a < 1$  である。

## [解説]

空間ベクトルが題材ですが、実質的には連立方程式の解き方の問題です。

## 第7問

問題のページへ

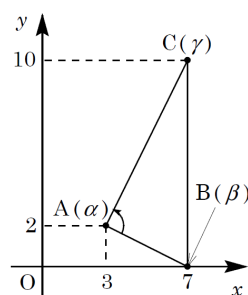
- (1)
- $\alpha = 3+2i$
- ,
- $\beta = 7$
- ,
- $\gamma = 7+10i$
- に対して,

$$\gamma - \alpha = 4 + 8i, \quad \beta - \alpha = 4 - 2i$$

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{4 + 8i}{4 - 2i} = \frac{2 + 4i}{2 - i} = \frac{(2 + 4i)(2 + i)}{4 + 1} = \frac{10i}{5} = 2i$$

これより,  $\arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \arg 2i = \frac{\pi}{2}$  である。

- (2)
- $w = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$
- とおくと, 直線 AB と直線 AC が垂直に交わる



のは  $\arg w = \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{3}{2}\pi$ , このとき  $w$  は純虚数なので  $w + \bar{w} = 0$  である。

逆に,  $w \neq 0$  で  $w + \bar{w} = 0$  のとき, 直線 AB と直線 AC は垂直に交わる。

- (3)
- $z \neq 0$
- ,
- $z \neq \pm 2$
- とする。

- (i)
- $\alpha = z$
- ,
- $\beta = 2$
- ,
- $\gamma = \frac{4}{z}$
- に対して, 直線 AB と直線 AC が垂直に交わる条件は,

$$w = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\frac{4}{z} - z}{2 - z} = 1 + \frac{2}{z} \text{ から } \left(1 + \frac{2}{z}\right) + \overline{\left(1 + \frac{2}{z}\right)} = 0 \text{ となり, } 2 + \frac{2}{z} + \frac{2}{\bar{z}} = 0 \text{ より,}$$

$$z\bar{z} + z + \bar{z} = 0, \quad (z+1)(\bar{z}+1) = 1, \quad |z+1|^2 = 1$$

よって,  $|z+1| = 1$  から, 点  $z$  全体を複素数平面上に図示すると, ①「点  $-1$  を中心とする半径  $1$  の円 ( $z = 0$ ,  $z = -2$  は除く)」である。

- (ii)
- $\alpha' = -z$
- ,
- $\beta' = -2$
- ,
- $\gamma' = -\frac{4}{z}$
- に対して, 直線 A'B' と直線 A'C' が垂直になるのは,

$$w' = \frac{\gamma' - \alpha'}{\beta' - \alpha'} = \frac{-\frac{4}{z} + z}{-2 + z} = 1 + \frac{2}{z} \text{ から, (i) と同じく } |z+1| = 1 \text{ である。}$$

よって, 点  $z$  全体を複素数平面上に図示すると, ①「点  $-1$  を中心とする半径  $1$  の円 ( $z = 0$ ,  $z = -2$  は除く)」である。

- (iii)
- $\alpha'' = -z$
- ,
- $\beta'' = 2$
- ,
- $\gamma'' = -\frac{4}{z}$
- に対して, 直線 A''B'' と直線 A''C'' が垂直になるのは,

$$\text{は, } w'' = \frac{\gamma'' - \alpha''}{\beta'' - \alpha''} = \frac{-\frac{4}{z} + z}{2 + z} = 1 - \frac{2}{z} \text{ から, } 2 - \frac{2}{z} - \frac{2}{\bar{z}} = 0 \text{ となり,}$$

$$z\bar{z} - z - \bar{z} = 0, \quad (z-1)(\bar{z}-1) = 1, \quad |z-1|^2 = 1$$

よって,  $|z-1| = 1$  から, 点  $z$  全体を複素数平面上に図示すると, ①「点  $1$  を中心とする半径  $1$  の円 ( $z = 0$ ,  $z = 2$  は除く)」である。

## [解説]

複素数と図形についての基本題です。(3)は符号に注目すると結論が得られます。