第１問

解答解説のページへ

[1] 全体集合 U を 2 以上 20 以下の自然数全体の集合とする。すなわち

$$U=\{2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 20\}$$

である。2 以上 9 以下の自然数 a, b に対して，U の部分集合 A, B を

$$A=\{k \mid k\in U,\ k\text{ と }a\text{ は 1 以外の正の公約数をもつ}\}$$

$$B=\{k \mid k\in U,\ k\text{ と }b\text{ は 1 以外の正の公約数をもつ}\}$$

とする。例えば

$a=7$ のとき $A=\{7,\ 14\}$，$a=9$ のとき $A=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$

である。

(1) $a=3$ のとき $A=$ [ア]，$b=4$ のとき $B=$ [イ] である。このとき，

$A\cap B=$ [ウ]，$A\cap\overline{B}=$ [エ] である。

[ア] ～ [エ] の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ $\{12\}$	① $\{3,\ 9\}$
② $\{3,\ 9,\ 15\}$	③ $\{6,\ 12,\ 18\}$
④ $\{3,\ 6,\ 9,\ 15,\ 18\}$	⑤ $\{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20\}$
⑥ $\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$	⑦ $\{2,\ 4,\ 8,\ 10,\ 14,\ 16,\ 20\}$
⑧ $\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\}$	
⑨ $\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16,\ 18,\ 20\}$	

(2) a, b が 2 以上 9 以下の自然数であることに注意して，a, b について考えよう。

(i) $\overline{A}$ の要素に，2 の倍数も 3 の倍数もないとき，$a=$ [オ] である。

(ii) $A\cap\overline{B}=\{5\}$ であるとき，$a=$ [カ]，$b=$ [キ] である。

[2] 以下の問題において比を解答する場合は，最も簡単な整数の比で答えよ。

(1) 四角形 ABCD の面積 S について考えよう。以下では，四角形 ABCD の内角 ∠A，∠B，∠C，∠D の大きさを，それぞれ A, B, C, D で表す。ただし，4 つの内角はいずれも180° より小さいものとする。

対角線 BD を共通の 1 辺とする△ABD と△BCD の面積を，それぞれ S_1，S_2 とすると，$S_1 = \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{2}\sin A$，$S_2 = \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{2}\sin C$ となる。

四角形 ABCD の 4 つの内角が $A+C=B+D$ を満たすとき，$A+C=\boxed{\text{コ}}$ となる。このとき，$\sin C$ を $\sin A$ を用いて表せることに注意すると

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\boxed{\text{サ}}}{2}\sin A \cdots\cdots\cdots ①$$

となる。

$\boxed{\text{ク}}$, $\boxed{\text{ケ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ AB·BD	① AB·AD	② AD·BD
③ BC·BD	④ BC·CD	⑤ BD·CD
⑥ AB·CD	⑦ AD·BC	⑧ AC·BD

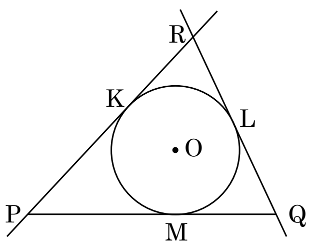
$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

⓪ 90°	① 120°	② 135°	③ 150°
④ 180°	⑤ 240°	⑥ 270°	⑦ 360°

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪ AB·BD + BC·BD	① AB·BD − BC·BD
② AB·AD + BC·CD	③ AB·AD − BC·CD
④ AD·BD + BD·CD	⑤ AD·BD − BD·CD
⑥ AB·CD + AD·BC	⑦ AB·CD − AD·BC
⑧ AC·BD	

(2) 点 O を中心とする半径 6 の円 O が，線分 PQ 上の P, Q と異なる点 M において線分 PQ に接している。P, Q それぞれを通る円 O の接線で，直線 PQ と異なるものを引き，この円との接点をそれぞれ K, L とする。以下では直線 PK, QL が交わる場合を考え，その交点を R とする。このとき，△PQR の辺の長さについて考えよう。



参考図

(i) $\mathrm{PK}=12$，$\mathrm{QL}=9$ であるときを考え，$\angle\mathrm{KPM}=P$，$\angle\mathrm{LQM}=Q$ とする。このとき，2 直線 PK, QL の交点 R は直線 PQ に関して点 O と同じ側にある。

四角形 PMOK が△PMO と△PKO に分けられることに注意すると，四角形 PMOK の面積は $\boxed{\text{シス}}$ であることがわかる。このことから，①を用いると，

$\sin P=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ となることがわかる。

四角形 QLOM についても同様に考えると，$\sin Q=\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ となることもわかる。

よって，$\mathrm{PR}:\mathrm{QR}=\boxed{\text{トナ}}:\boxed{\text{ニヌ}}$ となり，これにより $\mathrm{RL}=\dfrac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ と求められるので，△PQR の辺の長さを求めることができる。

(ii) $\mathrm{PK}=4\sqrt{2}$，$\mathrm{QL}=3\sqrt{2}$ であるときを考える。このとき，2 直線 PK, QL の交点 R は，直線 PQ に関して点 O と反対側にある。

このことに注意すると，$\mathrm{RL}=\boxed{\text{ヒフ}}\sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}$ と求められるので，△PQR の辺の長さを求めることができる。

第２問

解答解説のページへ

[1] 2次関数の最大値，最小値について考えよう。

(1) 2 次関数 $y=2x^2-8x+5$ は $0 \leqq x \leqq 3$ において，$x=$ $\boxed{ア}$ で最大値 $\boxed{イ}$ をとり，$x=$ $\boxed{ウ}$ で最小値 $\boxed{エオ}$ をとる。

(2) 太郎さんと花子さんは，(1)を振り返って 2 次関数の最大値，最小値について話している。

太郎：(1)では，2 次関数と x のとり得る値の範囲が与えられて，最大値と最小値を求めることができたね。

花子：じゃあ，x の値の範囲とそのときの最大値と最小値に関する条件が与えられている場合に，条件を満たす 2 次関数を求めることはできるのかな。具体的な例で考えてみよう。

(i) 2次関数 $y=f(x)$ は次の**条件 1** を満たすとする。

条件 1

$y=f(x)$ は $-3 \leqq x \leqq 0$ において

・$x=-1$ で最大値 3 をとる。

・$x=-3$ で最小値 -5 をとる。

このとき，$y=f(x)$ のグラフの頂点の座標は $\boxed{カ}$ であり，

$$f(x)=\boxed{キク}\,x^2-\boxed{ケ}\,x+\boxed{コ}$$

である。

$\boxed{カ}$ の解答群

⓪ (0, 3)	① (1, 3)	② (3, 3)
③ (−1, 3)	④ (−3, 3)	⑤ (0, −5)
⑥ (1, −5)	⑦ (3, −5)	⑧ (−1, −5)
⑨ (−3, −5)		

(ii) 2次関数 $y=g(x)$ は次の**条件 2** を満たすとする。

条件 2

a を正の定数とし，$y=g(x)$ の $0 \leqq x \leqq a$ における最大値を M，最小値を m とすると

・$0<a<3$ ならば，$m>-2$ である。

・$a \geqq 3$ ならば，$m=-2$ である。

・$0<a \leqq 6$ ならば，$M=7$ である。

・$a>6$ ならば，$M>7$ である。

このとき 2 次関数 $y=g(x)$ のグラフは $\boxed{サ}$ の放物線であり，$g(x)=$ $\boxed{シ}$ である。

$\boxed{サ}$ の解答群

⓪ 下に凸	① 上に凸

$\boxed{シ}$ の解答群

⓪ $2x^2-12x+16$	① $-2x^2+12x-16$
② $2x^2-12x-16$	③ $-2x^2+12x-20$
④ x^2-7	⑤ $-x^2+7$
⑥ x^2-6x+7	⑦ $-x^2+6x-7$
⑧ $2x^2-9x+7$	⑨ $-2x^2+3x+7$

(3) 2 次関数 $y=h(x)$ は次の**条件 3** を満たすとする。

条件 3

b を定数とし，$y=h(x)$ の $b-1 \leqq x \leqq b+1$ における最大値を M とすると

・$1 \leqq b \leqq 7$ ならば，$M \geqq 0$ である。

・$b<1$ または $7<b$ ならば，$M<0$ である。

太郎さんと花子さんは $h(x)$ について話している。

太郎：(2)の**条件 1** や**条件 2** からは関数が 1 つに決まったけど，**条件 3** だけでは，$h(x)$ が 1 つに決まりそうにないね。

花子：でも，$y=h(x)$ のグラフと x 軸の共有点の座標はわかりそうだね。

2 次関数 $y=h(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は $\boxed{ス}$ および $\boxed{セ}$ である。ただし，$\boxed{ス}$，$\boxed{セ}$ の解答の順序は問わない。

[2]　以下の問題を解答するにあたっては，与えられたデータに対して，次の値を外れ値とする。

「(第 1 四分位数)$-1.5\times$(四分位範囲)」以下の値
「(第 3 四分位数)$+1.5\times$(四分位範囲)」以上の値

水泳部に所属する太郎さんは，1500m 自由形におけるペース配分を考えるために，2021 年に開催された東京オリンピックの男子 1500m 自由形に関するデータを分析することにした。なお，自由形とはどのような泳ぎ方で泳いでもよい競技のことである。

分析で用いるデータは，28 人の選手における，予選で計測された記録 (以下，タイム)とする。ここでは，タイムは秒単位で表すものとする。例えば，15 分 23 秒 46 であれば，$60\times15+23.46=923.46$ (秒)である。そして，公式順位 (以下，順位)は，タイムの値が小さい方が上位となる。また，28 人の選手それぞれのタイムについて，スタートから 750m までのタイムを $T_{前}$ とし，750m からゴールまでのタイムを $T_{後}$ とする。さらに，$T_{前}$ と $T_{後}$ の平均値を $T_{前後}$ とする。

なお，以下の図や表については，World Aquatics の Web ページをもとに作成している。

(1)　太郎さんは，$T_{前}$，$T_{後}$，$T_{前後}$ の関係を調べることにした。図 1 は $T_{前}$ と $T_{後}$ の散布図，図 2 は $T_{前}$ と $T_{前後}$ の散布図である。なお，これらの散布図には，完全に重なっている点はない。また，図 1 と図 2 において，A を付している点は，同じ選手であることを表している。

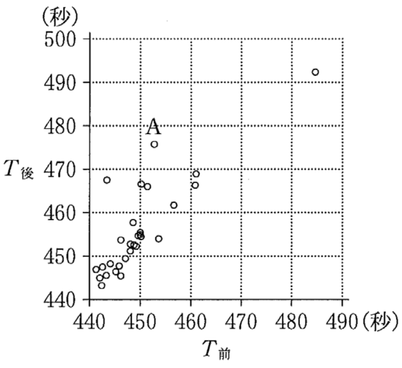


図 1　$T_{前}$ と $T_{後}$ の散布図

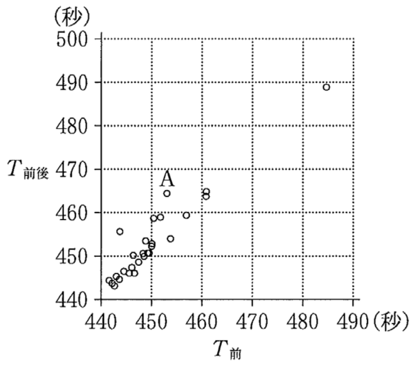


図 2　$T_{前}$ と $T_{前後}$ の散布図

次の(a), (b)は，図 1 と図 2 に関する記述である。

(a)　$T_{前}$ が 470 秒未満である選手について，$T_{後}$ が 460 秒以上である選手の人数と，$T_{前後}$ が 460 秒以上である選手の人数は等しい。

(b)　A を付している点が表す選手について，$T_{前}$ の値は $T_{前後}$ の値より小さく，かつ $T_{後}$ の値は $T_{前後}$ の値より大きい。

(a), (b)の正誤の組合せとして正しいものは $\boxed{\text{ソ}}$ である。

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

	⓪	①	②	③
(a)	正	正	誤	誤
(b)	正	誤	正	誤

(2) 太郎さんは，$T_{前}$ と $T_{前後}$ の相関係数を計算するために表 1 のように，平均値，標準偏差および共分散を求めた。

表 1 $T_{前}$ と $T_{前後}$ の平均値，標準偏差，共分散

	平均値	標準偏差	共分散
$T_{前}$	450	8.3	72.9
$T_{前後}$	453	9.3	

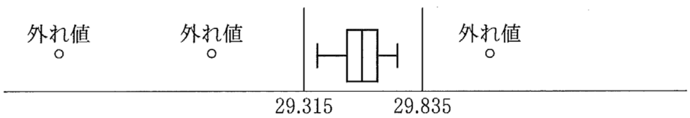
表 1 を用いると，$T_{前}$ と $T_{前後}$ の相関係数は $\boxed{\text{タ}}$ である。

$\boxed{\text{タ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑨ のうちから 1 つ選べ。

⓪ 0.01	① 0.24	② 0.47	③ 0.59	④ 0.72
⑤ 0.83	⑥ 0.94	⑦ 1.06	⑧ 1.38	⑨ 4.14

(3) 太郎さんは，順位とペース配分の関係を調べるために，前半と後半という二分割だけではなく，より細かく分割されたタイムを用いて分析することにした。1500m 自由形のタイムは，スタートから 50m までのタイム，50m から 100m までのタイムのように，ゴールまで 50m ごとの 30 個に分けて計測されている。そこで，これら 30 個のタイムを用いて分析する。

(i) 1 位の選手の 30 個のタイムについて考えると，外れ値かどうかを判断する 2 つの値である 29.315 と 29.835 が算出され，29.315 以下の 2 個のタイムと 29.835 以上の 1 個のタイムが外れ値と判断された。このとき，1 位の選手の 30 個のタイムの四分位範囲は0.$\boxed{\text{チツ}}$秒である。



参考図

(ii) 太郎さんは 28 人の選手それぞれについて，30 個のタイムを用いて，選手ごとの箱ひげ図を作成し，分散を計算した。図 3 は上から分散が小さい順になるように，28 人の選手それぞれの箱ひげ図を並べたものであり，30 個のタイムにおける外れ値は，白丸で示されている。なお，分散が等しい選手はいなかった。

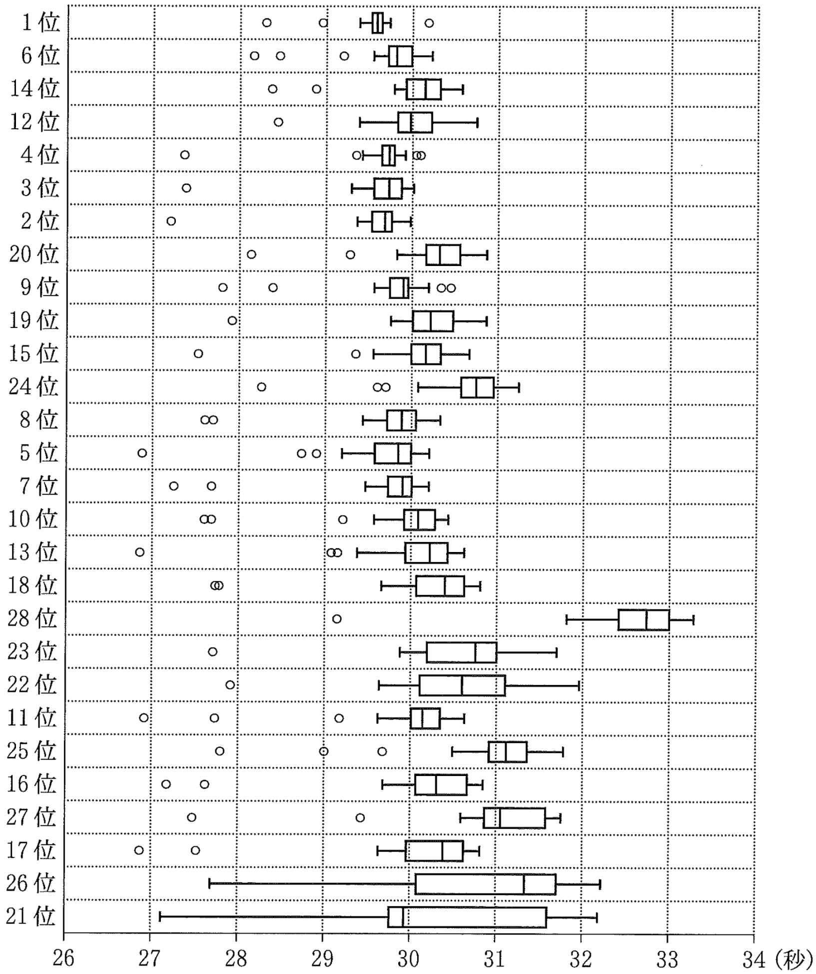


図3　28人の選手の順位と30個のタイムの箱ひげ図 (上から分散の小さい順)

次の(a), (b)は，図3に関する記述である。

(a)　28人の選手において，29秒より速いタイムはすべて外れ値である。

(b)　28人の選手から2人を選んだとき，分散の大きい選手の四分位範囲は，分散の小さい選手の四分位範囲より小さいことがある。

(a), (b)の正誤の組合せとして正しいものは $\boxed{テ}$ である。

$\boxed{テ}$ の解答群

	⓪	①	②	③
(a) (b)	正 正	正 誤	誤 正	誤 誤

(iii) 順位が1位から8位までの選手のグループを決勝進出グループ，9位から28位までの選手のグループを予選敗退グループと呼ぶことにする。決勝進出グループであり，かつ30個のタイムの分散が小さい方から14番目までの選手の人数を n (人)とすると，表2のようになる。

表 2 順位と分散の表 (単位は人)

		分散 (小さい順)		計
		1 番～14 番	15 番～28 番	
順位	決勝進出グループ	n	$8-n$	8
	予選敗退グループ	$14-n$	$6+n$	20
計		14	14	28

このとき，図 3 から $n=$ ト であることがわかる。このことから，決勝進出グループにおいて分散が小さい方から 14 番目までの選手が占める割合を P，予選敗退グループにおいて分散が小さい方から 14 番目までの選手が占める割合を Q とすると，P ナ Q であることがわかる。

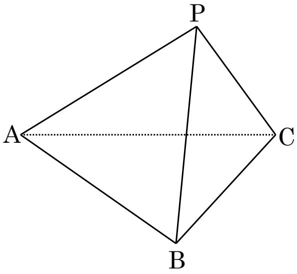
ナ の解答群

⓪ $<$	① $=$	② $>$

第３問

解答解説のページへ

空間内に，$AB = AC = 10$，$BC = 12$ である二等辺三角形 ABC がある。△ABC の内心を I とし，△IBC の重心を G とする。G を通り，△ABC を含む平面と垂直な直線上に，G と異なる点 P がある。このとき，△ABC を底面とする三角錐 PABC について考えよう。



参考図

直線 AI と辺 BC の交点を D とし，また，辺 PA 上の点 E は，$\angle PED = \angle PID$ を満たしているとする。なお，以下の問題において比を解答する場合は，最も簡単な整数の比で答えよ。

(1) 直線 BI が［ア］ことに注意すると，△ABD において線分 AI と ID の長さの比を求めることができる。よって，線分 AD の長さに着目すると，AI =［イ］，ID =［ウ］であることがわかる。また，4 点 E, I, D,［エ］は同一円周上にある。よって，$AE \cdot AP =$［オカ］であることがわかる。

［ア］の解答群

⓪ 直線 AC と垂直に交わる
① 直線 AC とねじれの位置にある
② ∠ABC を 2 等分する
③ 辺 AC の中点を通る

［エ］の解答群

⓪ A	① B	② C	③ G	④ P

(2) 線分 PI と DE の交点を F とする。このとき，線分 IF と FP の長さの比と，三角錐 PABC の体積との関係について考えよう。

(i) 次の**仮定 1** のもとで三角錐 PABC の体積 V_1 について考える。

仮定 1

線分 IF と FP の長さの比が $IF : FP = 3 : 2$ である。

このとき，PE : EA =［キ］:［ク］であるから，(1)での考察に注意すると，

AP =［ケ］$\sqrt{［コ］}$ となる。

したがって，直線 PG が△ABC を含む平面に垂直であることに注意すると，

$V_1 =$［サシ］であることがわかる。

(ii) (i)の**仮定 1** の代わりに次の**仮定 2** をおき，三角錐 PABC の体積の変化について考える。

仮定 2

線分 IF と FP の長さの比が IF : FP $=1:3$ である。

仮定 2 のもとでの三角錐 PABC の体積 V_2 を，(i)で求めた V_1 と比較すると，V_2 と V_1 の比は，$V_2 : V_1 =$ $\boxed{ス}$: $\boxed{セ}$ であるから，$\boxed{ソ}$。

$\boxed{ソ}$ の解答群

⓪ V_2 は V_1 より小さい

① V_2 と V_1 は等しい

② V_2 は V_1 より大きい

第４問

解答解説のページへ

1 人対 1 人で対戦する競技の大会があり, A, B, C の 3 人, または A, B, C, D の 4 人で開催される。大会はリーグ戦形式で行われる。すなわち, それぞれの人が他のすべての人と 1 回ずつ対戦する。引き分けはないものとし, A が対戦相手に勝つ確率は $\frac{2}{3}$ であり, A 以外の 2 人が対戦するとき勝つ確率はどちらも $\frac{1}{2}$ であるものとする。なお, 各対戦の結果は互いに影響を与えないものとする。

すべての対戦が終わった後, 次の**優勝者の決め方**により優勝者を 1 人決める。

優勝者の決め方

勝ち数が一番多い人が 1 人であれば, その人を優勝者とする。そうでなければ, 抽選により, 勝ち数が一番多い人の中から 1 人を選び, その人を優勝者とする。ただし, 勝ち数が一番多い人の人数が n 人であるとき, それぞれの人が選ばれる確率は $\frac{1}{n}$ であるものとする。

A が優勝する確率を, A, B, C の 3 人でリーグ戦を行うときと, A, B, C, D の 4 人でリーグ戦を行うときとで比較しよう。

以下では, すべての対戦の勝敗を**対戦結果**と呼ぶ。なお, **対戦結果**は抽選の結果を含まない。**対戦結果**を示すために表を用いる。

例えば, 表 1 は 4 人でリーグ戦を行ったときの**対戦結果**の 1 つを示す。A から始まる行の×○○は, A が B に負け C と D に勝ち, 2 勝 1 敗となったことを示す。また, 勝ち数が一番多い A と B の 2 人が抽選の対象であり, そのことを√で示す。

表 1

	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A		×	○	○	2	1	√
B	○		○	×	2	1	√
C	×	×		○	1	2	−
D	×	○	×		1	2	−

(1) A, B, C の 3 人でリーグ戦を行うときに A が優勝する確率を考える。

(i) A が 2 勝 0 敗ならば, A が優勝する。A が 2 勝 0 敗で優勝する確率は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(ii) A が 1 勝 1 敗で優勝するためには, B も C も 1 勝 1 敗であることが必要である。例えば, A が勝つ相手が B であるとき, A が C に負け B が C に勝つことが必要である。

表 2

	A	B	C	勝ち数	負け数	抽選
A		○	×	1	1	√
B	×		○	1	1	√
C	○	×		1	1	√

表 2 は，この**対戦結果**を示し，この**対戦結果**になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。この**対戦結果**になり，かつ A が抽選により優勝者に選ばれる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \times \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

A が勝つ相手は B, C の 2 通りあることに注意すると，A が 1 勝 1 敗で優勝する確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ であることがわかる。

(i)と(ii)から，A が優勝する確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} + \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である。

(2) A, B, C, D の 4 人でリーグ戦を行うときに A が優勝する確率を考える。

A が 3 勝 0 敗ならば，A が優勝する。また，A が 1 勝 2 敗ならば，2 勝以上する人がいるため A は優勝しない。

A が 2 勝 1 敗で優勝する確率を，全敗する人がいる場合の確率と全敗する人がいない場合の確率の和として求める。

(i) 全敗する人がいる場合で，かつ A が 2 勝 1 敗で優勝する確率を求める。

全敗する人は B, C, D の 3 通りある。例えば，D が全敗するとき**対戦結果**の一部を示すと表 3 のようになる。

表 3

	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A	＼			○			
B		＼		○			
C			＼	○			
D	×	×	×	＼	0	3	−

D が全敗する確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。D が全敗する場合，A が 2 勝 1 敗で優勝するためには，A が D 以外の 2 人との対戦で 1 勝 1 敗となることが必要である。

以上のことから，(1)の(ii)の結果を用い，全敗する人が B, C, D の 3 通りあることに注意すると，全敗する人がいる場合で，かつ A が 2 勝 1 敗で優勝する確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{スセ}}}$ であることがわかる。

(ii) 全敗する人がいない場合で，かつ A が 2 勝 1 敗で優勝する確率を求める。

A が 2 勝 1 敗のとき，A が負ける相手は B, C, D の 3 通りある。

例えば, A が負ける相手が B であるとき, **対戦結果**の一部を示すと表 4 のようになる。

表 4

	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A		×	○	○	2	1	
B	○						
C	×						
D	×						

このとき, A が優勝するためには, B は 2 勝 1 敗か 1 勝 2 敗であることが必要である。

例えば, 表 1 は, A と B が 2 勝 1 敗である**対戦結果**の 1 つを示し, A と B の 2 人が抽選の対象となったことを示す。

表 1（再掲）

	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A		×	○	○	2	1	√
B	○		○	×	2	1	√
C	×	×		○	1	2	−
D	×	○	×		1	2	−

全敗する人がいない場合で, かつ A が B に負け C と D に勝ち優勝するときの**対戦結果**は $\boxed{\text{ソ}}$ 通りある。A が負ける相手が B, C, D の 3 通りあることに注意すると, 全敗する人がいない場合で, かつ A が 2 勝 1 敗で優勝する確率は $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ であることがわかる。

(i)と(ii)から, A が 2 勝 1 敗で優勝する確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{スセ}}}+\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ である。

以上のことから, A が 3 勝 0 敗で優勝する確率を考慮すると, A が優勝する確率は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ であることがわかる。この確率は(1)で求めた 3 人でリーグ戦を行うときに A が優勝する確率より $\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ だけ $\boxed{\text{ヌ}}$。

$\boxed{\text{ヌ}}$ の解答群

⓪ 小さい	① 大きい

第１問

問題のページへ

[1] $U=\{2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 20\}$の部分集合$A, B$は，2 以上 9 以下の自然数$a, b$で，

$A=\{k\mid k\in U,\ k$とaは 1 以外の正の公約数をもつ$\}$

$B=\{k\mid k\in U,\ k$とbは 1 以外の正の公約数をもつ$\}$

(1) $a=3$のとき，kは 3 と 1 以外の公約数をもつ，すなわち 3 の倍数から，

$A=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$

$b=4$のとき，kは 4 と 1 以外の公約数をもつ，すなわち 2 の倍数から，

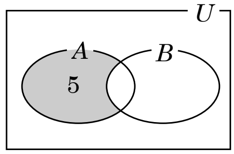
$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\}$

これより，$A\cap B=\{6,\ 12,\ 18\}$，$A\cap\overline{B}=\{3,\ 9,\ 15\}$である。

(2) (i) $\overline{A}$の要素に 2 の倍数も 3 の倍数もないとき，Aの要素は 2 の倍数または 3 の倍数すべてとなり，$A=\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16,\ 18,\ 20\}$である。

Aのすべての要素と 1 以外の公約数をもつ自然数a $(2\leqq a\leqq 9)$は，2 の倍数かつ 3 の倍数から$a=6$である。

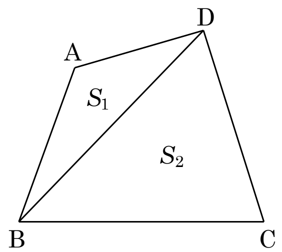
(ii) $A\cap\overline{B}=\{5\}$のとき，Aは要素 5 をもち，5 と 1 以外の公約数をもつ自然数a $(2\leqq a\leqq 9)$は$a=5$である。



このとき，$A=\{5,\ 10,\ 15,\ 20\}$から$A\cap B=\{10,\ 15,\ 20\}$

すると，Bの要素には，$10=2\cdot 5$，$15=3\cdot 5$，$20=2^2\cdot 5$を含み，5 を含まない。これより，10, 15, 20 と 1 以外の公約数をもつ自然数b $(2\leqq b\leqq 9,\ b\neq 5)$は，$b=2\cdot 3=6$である。

[2] (1) 四角形 ABCD の面積Sについて，△ABD と△BCD の面積を，それぞれS_1，S_2とすると，

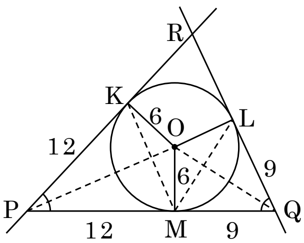


$$S_1=\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}}{2}\sin A,\quad S_2=\frac{\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}}{2}\sin C$$

ここで，$A+C=B+D$のとき，$A+B+C+D=360^\circ$から$A+C=180^\circ$となり，$\sin C=\sin(180^\circ-A)=\sin A$

$$S=S_1+S_2=\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}+\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}}{2}\sin A\ \cdots\cdots\cdots ①$$

(2) 点 O を中心とする半径 6 の円 O が，線分 PQ 上の P，Q と異なる点 M で線分 PQ に接している。P，Q それぞれを通る円 O の接線で，直線 PQ と異なるものを引き，この円との接点をそれぞれ K, L とし，直線 PK, QL の交点を R とする。



(i) $\mathrm{PK}=\mathrm{PM}=12$ のとき，四角形 PMOK の面積は，△PMO と△PKO の和から，$\dfrac{1}{2}\cdot 12\cdot 6+\dfrac{1}{2}\cdot 12\cdot 6=72$

ここで，$\angle\mathrm{PMO}+\angle\mathrm{PKO}=180^\circ$ から 4 点 P，M，O，K は同一円周上にあり，$\angle\mathrm{KPM}+\angle\mathrm{KOM}=180^\circ$ から，$\angle\mathrm{KPM}=P$ として①を用いると，

$$\frac{12\cdot12+6\cdot6}{2}\sin P=72,\quad \sin P=72\cdot\frac{1}{90}=\frac{4}{5}$$

また，$\mathrm{QL}=\mathrm{QM}=9$ から，四角形 QLOM について，$\angle\mathrm{LQM}=Q$ として，

$$\frac{9\cdot9+6\cdot6}{2}\sin Q=\frac{1}{2}\cdot9\cdot6+\frac{1}{2}\cdot9\cdot6,\quad \sin Q=54\cdot\frac{2}{117}=\frac{12}{13}$$

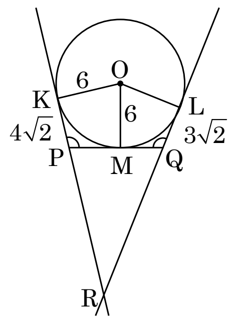
ここで，$\triangle\mathrm{PQR}$ に正弦定理を適用すると，

$$\mathrm{PR}:\mathrm{QR}=\sin Q:\sin P=\frac{12}{13}:\frac{4}{5}=15:13$$

そして，$\mathrm{RL}=\mathrm{RK}=x$ とおくと，$(12+x):(9+x)=15:13$ となり，

$$13(12+x)=15(9+x),\quad 2x-21=0,\quad x=\frac{21}{2}$$

(ii) $\mathrm{PK}=\mathrm{PM}=4\sqrt{2}$，$\mathrm{QL}=\mathrm{QM}=3\sqrt{2}$ のとき，(i)と同様に，



$$\frac{(4\sqrt{2})^2+6^2}{2}\sin P=2\left(\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}\cdot6\right),\quad \sin P=\frac{12}{17}\sqrt{2}$$

$$\frac{(3\sqrt{2})^2+6^2}{2}\sin Q=2\left(\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{2}\cdot6\right),\quad \sin Q=\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

そして，$\sin\angle\mathrm{RPQ}=\sin(180^\circ-P)=\sin P=\dfrac{12}{17}\sqrt{2}$

$$\sin\angle\mathrm{RQP}=\sin(180^\circ-Q)=\sin Q=\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

すると，$\mathrm{PR}:\mathrm{QR}=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}:\dfrac{12}{17}\sqrt{2}=17:18$ となり，

$\mathrm{RL}=\mathrm{RK}=x$ とおくと，$(x-4\sqrt{2}):(x-3\sqrt{2})=17:18$ から，

$$18(x-4\sqrt{2})=17(x-3\sqrt{2}),\quad x=21\sqrt{2}$$

［解 説］

[1]は集合と命題についての問題で，共通テストになって初めての出題です。(1)は基本的ですが，(2)は焦るとミスをしてしまいそうです。[2]は三角比の応用問題です。(2)(i)までは丁寧な誘導に乗ればスムーズに空欄が埋まりますが，(2)(ii)は誘導も参考図もないので，予想以上に時間を費やしてしまいます。配点は 4 点なのですが……。

第２問

問題のページへ

[1] (1) 2 次関数 $y=2x^2-8x+5=2(x-2)^2-3$ は，$0\leqq x\leqq 3$ において，$x=0$ で最大値 5，$x=2$ で最大値 -3 をとる。

(2) (i) 2 次関数 $y=f(x)$ は，$-3\leqq x\leqq 0$ において，$x=-1$ で最大値 3 をとるので，グラフは上に凸の放物線で，頂点の座標は $(-1,\ 3)$ である。

ここで，$p<0$ として，$f(x)=p(x+1)^2+3$ とおくと，$x=-3$ で最小値 -5 をとるので，$f(-3)=-5$ より $4p+3=-5$ となり，$p=-2$ から，

$$f(x)=-2(x+1)^2+3=-2x^2-4x+1$$

(ii) $a>0$ として，2 次関数 $y=g(x)$ の $0\leqq x\leqq a$ における最大値を M，最小値を m とすると，まず $m\geqq -2$，$M\geqq 7$ から，$y=g(x)$ のグラフは下に凸の放物線である。

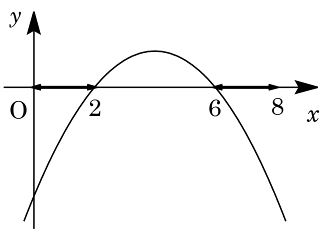
そして，$0<a<3$ ならば $m>-2$，$a\geqq 3$ ならば $m=-2$ より $y=g(x)$ のグラフの頂点の座標は $(3,\ -2)$ となる。さらに，$0<a\leqq 6$ ならば $M=7$，$a>6$ ならば $M>7$ から $y=g(x)$ のグラフは点 $(6,\ 7)$ を通る。

ここで，$q>0$ として，$g(x)=q(x-3)^2-2$ とおくと，$g(6)=7$ より $9q-2=7$ となり，$q=1$ から，

$$g(x)=(x-3)^2-2=x^2-6x+7$$

(3) 2 次関数 $y=h(x)$ の $b-1\leqq x\leqq b+1$ における最大値を M とすると，$1\leqq b\leqq 7$ ならば $M\geqq 0$，$b<1$ または $7<b$ ならば $M<0$ であることから，グラフは上に凸の放物線である。

これより，区間幅が 2 である x の範囲が，$0\leqq x\leqq 2$ から $6\leqq x\leqq 8$ まで動くときつねに $M\geqq 0$ であり，それ以外のときは $M<0$ となるので，$y=h(x)$ のグラフは右図のようになる。



すると，$y=h(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は，$x=2,\ 6$ となる。

[2] (1) $T_{前}$ が 470 秒未満である選手について，$T_{後}$ が 460 秒以上である選手は図 1 から 7 人，$T_{前後}$ が 460 秒以上である選手は図 2 から 3 人であり，(a)は誤り。

選手 A について，図 2 から $T_{前}$ の値は $T_{前後}$ の値より小さく，図 1 と図 2 から $T_{後}$ の値は $T_{前後}$ の値より大きい。これより(b)は正しい。

(2) $T_{前}$ と $T_{前後}$ の相関係数は，表 1 から，$\dfrac{72.9}{8.3\times 9.3}\fallingdotseq 0.94$

(3) (i) 第 1 四分位数を Q_1，第 3 四分位数を Q_3 とおくと，

$$Q_1-1.5(Q_3-Q_1)=29.315\cdots\cdots①,\quad Q_3+1.5(Q_3-Q_1)=29.835\cdots\cdots②$$

②－①より，$(Q_3-Q_1)+3(Q_3-Q_1)=0.52$，$4(Q_3-Q_1)=0.52$

これより，四分位範囲 $Q_3-Q_1=0.13$ である。

(ii) 26 位と 21 位の選手は，外れ値でない 26 秒より速いタイムがあり，(a)は誤り。

22 位と 11 位の選手を比べると，分散は 11 位の方が大きいが，四分位範囲は 11 位の方が小さい。これより(b)は正しい。

(iii) 順位が 1 位から 8 位の決勝進出グループで，分散が小さい方から 14 番目までの選手は，1 位，6 位，4 位，3 位，2 位，8 位，5 位の選手より，$n=7$ である。

すると，決勝進出グループにおいて分散が小さい方から 14 番目までの選手が占める割合を P とすると，$P=\dfrac{7}{8}$ である。また，予選敗退グループにおいて分散が小さい方から 14 番目までの選手が占める割合を Q とすると，$Q=\dfrac{7}{20}$ である。

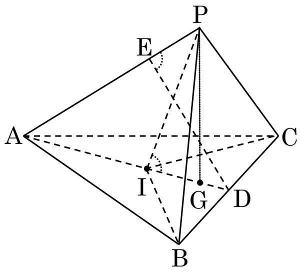
したがって，$P>Q$ となる。

［解 説］

[1]は 2 次関数の最大・最小についての問題です。グラフをイメージして解いていきますが，(2)(ii)以降は記述がやや雑です。[2]はデータの分析の基本題です。設問を見ながら，図や表を読み取っていけばよく，計算はメインではありません。

第３問

問題のページへ

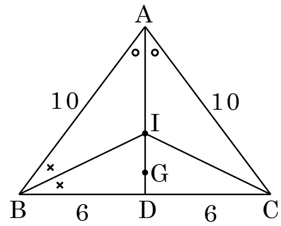


$AB=AC=10$，$BC=12$である$\triangle ABC$の内心 I に対して，$\triangle IBC$の重心を G とする。G を通り，$\triangle ABC$と垂直な直線上に点 P をとり，三角錐 PABC を作る。また，直線 AI と辺 BC の交点を D とし，$\angle PED=\angle PID$を満たすように辺 PA 上の点 E をとる。

(1) 点 I は$\triangle ABC$の内心より，点 D は辺 BC の中点となり，

$BD=DC=6$，また直線 BI は$\angle ABC$を 2 等分するので，

$$AI:ID=BA:BD=10:6=5:3$$



ここで，$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{100-36}=8$なので，

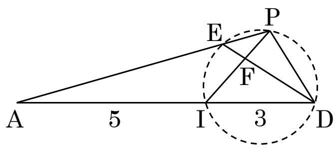
$$AI=\frac{5}{8}\cdot 8=5,\ ID=\frac{3}{8}\cdot 8=3$$

また，$\angle PED=\angle PID$から，4 点 E, I, D, P は同一円周上にあり，方べきの定理から，

$$AE\cdot AP=AI\cdot AD=5\cdot 8=40\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2) 線分 PI と DE の交点を F とする。

(i) 仮定 1 から，$IF:FP=3:2$のとき，$\triangle PAI$と直線 ED にメネラウスの定理を適用すると，



$$\frac{AD}{DI}\cdot\frac{IF}{FP}\cdot\frac{PE}{EA}=1,\ \frac{PE}{EA}=\frac{DI}{AD}\cdot\frac{FP}{IF}=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$$

すると，$PE:EA=1:4$となり，①から，

$$\frac{4}{5}AP\cdot AP=40,\ AP^2=50,\ AP=5\sqrt{2}$$

G は$\triangle IBC$の重心より$AG=AD-GD=8-\frac{1}{3}\cdot 3=7$となり，$PG\perp AG$から，

$$PG=\sqrt{AP^2-AG^2}=\sqrt{50-49}=1\ \cdots\cdots\cdots②$$

また，$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 8=48$なので，仮定 1 のとき三角錐 PABC の体積$V_1$は，

$$V_1=\frac{1}{3}\cdot 48\cdot 1=16$$

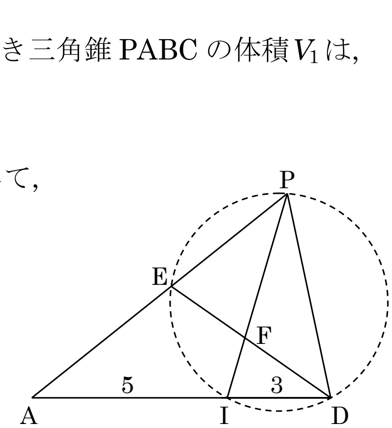
(ii) 仮定 2 から，$IF:FP=1:3$のとき，(i)と同様にして，

$$\frac{PE}{EA}=\frac{DI}{AD}\cdot\frac{FP}{IF}=\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{1}=\frac{9}{8}$$

$PE:EA=9:8$となり，①から，

$$\frac{8}{17}AP^2=40,\ AP^2=85$$

すると，$PG=\sqrt{85-49}=6\ \cdots\cdots\cdots③$



仮定 2 のとき三角錐 PABC の体積をV_2とすると，②③から，$V_2:V_1=6:1$

したがって，V_2はV_1より大きい。

［解 説］

立体の断面を考えて計量するタイプの問題です。具体的には，方べきの定理やメネラウスの定理などを利用して，与えられた条件を満たす三角錐の体積を求めるという構成になっています。

第４問

問題のページへ

リーグ戦形式で行われる競技の大会で, A が対戦相手に勝つ確率は$\dfrac{2}{3}$, A 以外の 2 人が対戦するとき勝つ確率はどちらも$\dfrac{1}{2}$であるとする。また, 優勝者は, 勝ち数が一番多い人が 1 人のときはその人, 勝ち数が一番多い人が複数のときはその中から 1 人を抽選で選ぶ。

(1) A, B, C の 3 人でリーグ戦を行うとき, A が優勝する確率について,

(i) A が 2 勝 0 敗で優勝する確率は, $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$ である。

(ii) A が 1 勝 1 敗で優勝するには, B, C も 1 勝 1 敗であることが必要である。

例えば, A の勝つ相手が B のとき, 対戦結果は右表のようになり, その確率は, $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{9}$ である。そして, A が抽選により優勝者に選ばれる確率は, $\dfrac{1}{9}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{27}$ である。

	A	B	C	勝ち数	負け数	抽選
A		○	×	1	1	√
B	×		○	1	1	√
C	○	×		1	1	√

A の勝つ相手は, B, C の 2 通りあることから, A が 1 勝 1 敗で優勝する確率は, $\dfrac{1}{27}\times 2=\dfrac{2}{27}$ である。

(i)と(ii)から, A が優勝する確率は$\dfrac{4}{9}+\dfrac{2}{27}=\dfrac{14}{27}$ である。

(2) A, B, C, D の 4 人でリーグ戦を行うとき, A が優勝する確率について,

まず, A が 3 勝 0 敗で優勝する確率は, $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{27}$ である。

次に, A が 2 勝 1 敗で優勝する確率について, 全敗する人がいるか, いないかで場合分けをして求める。

(i) 全敗する人がいる場合

D が全敗するとき, 右表のようになり, 確率は$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$ である。

このとき, A の B, C との対戦結果は 1 勝 1 敗となり, A が優勝する確率は, (1)(ii)の結果から$\dfrac{2}{27}$ である。

	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A				○	2	1	√
B				○	2	1	√
C				○	2	1	√
D	×	×	×		0	3	−

そして, 全敗する人は B, C, D の 3 通りあることから, A が 2 勝 1 敗で優勝する確率は, $\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{27}\times 3=\dfrac{1}{27}$ である。

(ii)　全敗する人がいない場合

Aが2勝1敗で優勝するとき，Aが負ける相手はB, C, Dの3通りある。例えば，Aが負ける相手がBであるとき右表のようになり，Aが優勝するためには，Bは2勝1敗か1勝2敗であることが必要である。

	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A	＼	×	○	○	2	1	
B	○	＼					
C	×		＼				
D	×			＼			

・Bが2勝1敗であるとき

BがCに勝つ場合は右表のようになり，AとBは2勝1敗，CとDは1勝2敗となる。また，BがDに勝つ場合も同様で，合わせると2通りの場合がある。

	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A	＼	×	○	○	2	1	√
B	○	＼	○	×	2	1	√
C	×	×	＼	○	1	2	−
D	×	○	×	＼	1	2	−

・Bが1勝2敗であるとき

CがDに勝つ場合は右表のようになり，Cが2勝1敗，Dが1勝2敗となる。また，DがCに勝つ場合も同様で，合わせると2通りの場合がある。

	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A	＼	×	○	○	2	1	√
B	○	＼	×	×	1	2	−
C	×	○	＼	○	2	1	√
D	×	○	×	＼	1	2	−

よって，AがBに負けCとDに勝って優勝するときの対戦結果は，合わせて$2+2=4$通りある。

したがって，Aが負ける相手はB, C, Dの3通りより，Aが2勝1敗で優勝する確率は，抽選がいずれの場合も2人で行うことを考えると，その確率は，

$$\left\{\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}\right\}\times\frac{1}{2}\times4\times3=\frac{1}{9}$$

(i)(ii)より，Aが2勝1敗で優勝する確率は$\frac{1}{27}+\frac{1}{9}=\frac{4}{27}$である。

以上より，4人でリーグ戦を行うときAが優勝する確率は$\frac{8}{27}+\frac{4}{27}=\frac{4}{9}$となり，3人でリーグ戦を行うときにAが優勝する確率$\frac{14}{27}$より$\frac{14}{27}-\frac{4}{9}=\frac{2}{27}$だけ小さい。

［解　説］

誘導の詳しい確率問題ですが，膨大な問題文を読んで理解し，表をかいて計算を進めなくてはなりません。配点比で考えると所要時間は14分ですが，ちょっと難しいでしょう。