第１問

解答解説のページへ

O を原点とする座標平面において，方程式 $x^2+y^2-7y+(2x-5y+25)=0$ ……① の表す円を C_1 とする。また，方程式 $x^2+y^2-7y-(2x-5y+25)=0$ ……② の表す円を C_2 とする。

(1) C_1 の中心の座標は($\boxed{アイ}$, $\boxed{ウ}$)である。

C_1 の半径を r_1，C_2 の半径を r_2，C_1 の中心と C_2 の中心の間の距離を d とすると，

$r_1=\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}$，$r_2=\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}$，$d=\sqrt{\boxed{クケ}}$ である。

r_1，r_2 と d の関係から，C_1 と C_2 は 2 点で交わることがわかる。

(2) 不等式 $x^2+y^2-7y+|2x-5y+25|<0$ ……③ の表す領域について考える。

③の左辺は，$2x-5y+25\geqq 0$ のときは①の左辺と一致し，$2x-5y+25<0$ のときは②の左辺と一致する。

(i) 不等式 $2x-5y+25\geqq 0$ の表す領域を D，不等式 $2x-5y+25<0$ の表す領域を E とする。

・原点 O は $\boxed{コ}$ に含まれる。

・C_1 の中心は $\boxed{サ}$ に含まれる。

・C_2 の中心は $\boxed{シ}$ に含まれる。

$\boxed{コ}$～$\boxed{シ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ D	① E

(ii) 方程式 $2x-5y+25=0$ ……④ の表す直線を l とする。

実数 x, y が①と②の両方を満たすとする。①と②の左辺どうし，右辺どうしの差をとると，$2(2x-5y+25)=0$ となる。よって，実数 x, y は④も満たす。

したがって，$\boxed{ス}$。このことから，l は C_1 と C_2 の 2 つの交点を通る直線であることがわかる。

$\boxed{ス}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑤ のうちから 1 つ選べ。

⓪ 点 P を l 上の点とすると，P は C_1 上にあり，かつ C_2 上にもある

① 点 P を l 上の点とすると，P は C_1 上にあるか，または C_2 上にある

② 点 P を C_1 上にあり，かつ C_2 上にある点とすると，P は l 上にある

③ 点 P を C_1 上にあるか，または C_2 上にある点とすると，P は l 上にある

④ 点 P を C_1 上の点，点 Q を C_2 上の点とすると，直線 PQ は l と一致する

⑤ 点 P を C_1 上の点，点 Q を C_2 上の点とすると，直線 PQ は l と交わる

(iii) 不等式 $x^2+y^2-7y+(2x-5y+25)<0$ の表す領域と(i)の領域 D の共通部分を F とする。

また，不等式$x^2+y^2-7y-(2x-5y+25)<0$の表す領域と(i)の領域Eの共通部分をGとする。

不等式③の表す領域は，FとGの和集合である。これを図示すると$\boxed{\text{セ}}$の灰色部分である。ただし，境界線を含まない。

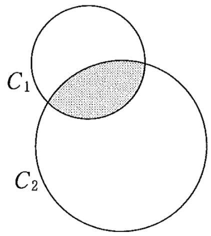
(iv) ③において，$|2x-5y+25|$の前の符号を＋から－に変えた不等式

$x^2+y^2-7y-|2x-5y+25|<0$ ……⑤を考える。⑤の表す領域を図示すると

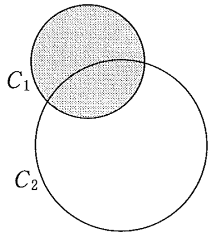
$\boxed{\text{ソ}}$の灰色部分である。ただし，境界線を含まない。

$\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{ソ}}$については，最も適当なものを，次の⓪～⑧のうちから1つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。なお，⓪～⑧では座標軸を省略している。

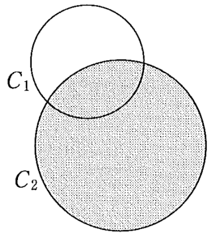
⓪



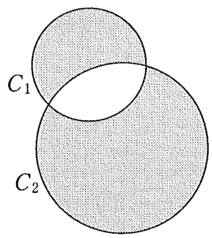
①



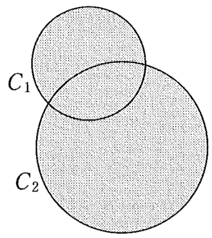
②



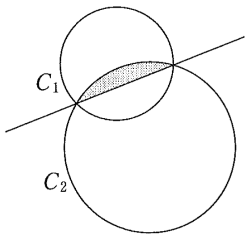
③



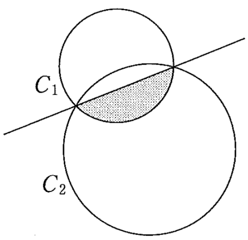
④



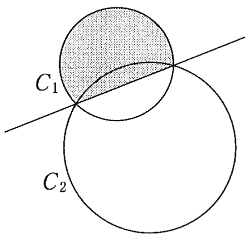
⑤



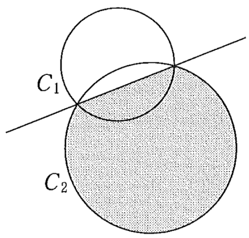
⑥



⑦



⑧



第２問

解答解説のページへ

(1)　2 つの角 A, B に対し，$\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ ……①が成り立つことを示そう。

2 つの角 α，β に対し，加法定理から

$$\sin(\alpha+\beta)=\boxed{\text{ア}}+\cos\alpha\sin\beta \cdots\cdots ②$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\boxed{\text{ア}}-\cos\alpha\sin\beta \cdots\cdots ③$$

である。②と③の左辺どうし，右辺どうしを加え，$\alpha=\boxed{\text{イ}}$, $\beta=\boxed{\text{ウ}}$とすると，①が得られる。

$\boxed{\text{ア}}$の解答群

⓪ $\sin\alpha\sin\beta$	① $\sin\alpha\cos\beta$	② $\cos\alpha\sin\beta$	③ $\cos\alpha\cos\beta$
④ $\sin^2\alpha$	⑤ $\sin^2\beta$	⑥ $\cos^2\alpha$	⑦ $\cos^2\beta$

$\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$については，最も適当なものを，次の ⓪～⑦のうちから 1 つ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ A	① B	② $A+B$	③ $A-B$
④ $\dfrac{A+B}{2}$	⑤ $\dfrac{A-B}{2}$	⑥ $\dfrac{A+B}{4}$	⑦ $\dfrac{A-B}{4}$

(2)　関数 $f(x)$ を，$f(x)=\sin\left(x+\dfrac{5}{12}\pi\right)+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)$ とする。

$0\leqq x<2\pi$ の範囲で $f(x)$ の最大値を考えよう。①を用いると，

$$f(x)=2\sin\left(x+\boxed{\text{エ}}\right)\cos\boxed{\text{オ}}=2\cos\boxed{\text{オ}}\sin\left(x+\boxed{\text{エ}}\right)$$

と変形できる。$2\cos\boxed{\text{オ}}$は正の定数であるから，$0\leqq x<2\pi$ の範囲において，$f(x)$ は$\boxed{\text{カ}}$で最大値$\boxed{\text{キ}}$をとる。

$\boxed{\text{エ}}$～$\boxed{\text{カ}}$については，最も適当なものを，次の ⓪～⑦のうちから 1 つ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ 0	① $\dfrac{\pi}{12}$	② $\dfrac{\pi}{6}$	③ $\dfrac{\pi}{4}$
④ $\dfrac{\pi}{3}$	⑤ $\dfrac{\pi}{2}$	⑥ $\dfrac{3}{4}\pi$	⑦ π

$\boxed{\text{キ}}$の解答群

⓪ $\dfrac{1}{2}$	① 1	② 2	③ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
④ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	⑤ $\sqrt{2}$	⑥ $\sqrt{3}$	⑦ $2\sqrt{2}$

(3)　a を $0<a<\pi$ を満たす定数とし，関数 $g(x)$ を

$$g(x)=\sin(x+a)+\sin(x+2a)+\sin(x+3a)$$

とする。

花子さんと太郎さんは，関数 $y=g(x)$ のグラフをコンピュータを用いて表示させてみた。図 1 は，$a=0.5$，$a=1.0$，$a=1.5$ としたときの $y=g(x)$ のグラフである。これを見て，花子さんと太郎さんは，関数 $g(x)$ について話している。

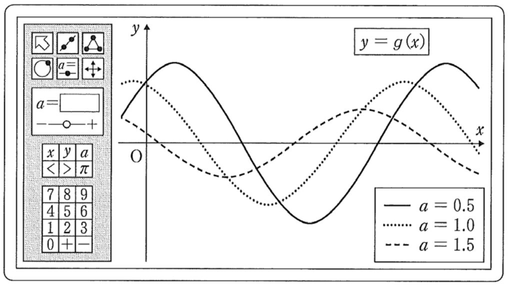


図 1

花子：$g(x)$ は，定数 p, q を用いて $g(x)=p\sin(x+q)$ と変形できそうだね。

太郎：3 つの関数 $\sin(x+a)$，$\sin(x+2a)$，$\sin(x+3a)$ のうちの 2 つの関数の和に①を使うと，残り 1 つの関数の定数倍にできるかな。

(i) ①を用いると，関数 $\sin(x+a)$，$\sin(x+2a)$，$\sin(x+3a)$ のうちの 2 つの関数の和 $\boxed{\text{ク}}$ は，残りの関数 $\sin\left(x+\boxed{\text{ケ}}\right)$ の定数倍となる。したがって，関数 $g(x)$ は，$g(x)=\boxed{\text{コ}}\sin\left(x+\boxed{\text{ケ}}\right)$ と変形することができる。

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

⓪ $\sin(x+a)+\sin(x+2a)$	① $\sin(x+a)+\sin(x+3a)$
② $\sin(x+2a)+\sin(x+3a)$	

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

⓪ a	① $2a$	② $3a$

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

⓪ $2\cos a$	① $-2\cos a$
② $2\cos 2a$	③ $-2\cos 2a$
④ $(2\cos a+1)$	⑤ $(-2\cos a+1)$
⑥ $(2\cos 2a+1)$	⑦ $(-2\cos 2a+1)$

(ii) $a=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき，$0\leqq x<2\pi$ の範囲において，$g(x)$ は $x=\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}\pi$ で最大値 $\boxed{\text{セ}}$ をとる。

$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ -1
④ -2	⑤ $\sqrt{3}$	⑥ $-\sqrt{3}$	⑦ $\sqrt{3}+1$
⑧ $\sqrt{3}-1$	⑨ $-\sqrt{3}+1$		

第３問

解答解説のページへ

(1) k を実数とし，3 次関数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x+k$ を考える。

(i) $f'(x)=\boxed{\text{ア}}$ である。

$x=\boxed{\text{イ}}$ のとき，$f(x)$ は極大値 $\boxed{\text{ウ}}$ をとる。$x=\boxed{\text{エ}}$ のとき，$f(x)$ は極小値 $\boxed{\text{オ}}$ をとる。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{3}x^2-2x+3$	① $\dfrac{1}{3}x^2-2x+3+k$
② x^2-4x+3	③ $x^2-4x+3+k$
④ $\dfrac{1}{12}x^4-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{3}{2}x^2+kx$	⑤ $\dfrac{1}{3}x^4-2x^3+3x^2+kx$

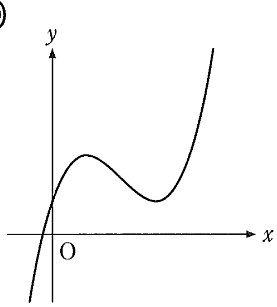
$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ 0	① 1	② 2	③ $\dfrac{2}{3}$	④ $\dfrac{4}{3}$
⑤ k	⑥ $-\dfrac{4}{3}+k$	⑦ $-\dfrac{2}{3}+k$	⑧ $\dfrac{2}{3}+k$	⑨ $\dfrac{4}{3}+k$

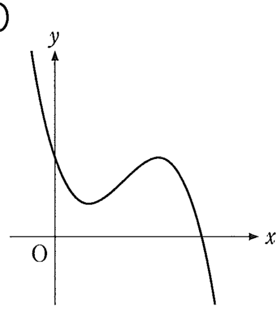
(ii) $y=f(x)$ のグラフの概形は，$k=0$ のとき $\boxed{\text{カ}}$，$k>0$ のとき $\boxed{\text{キ}}$ である。

$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑤ のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

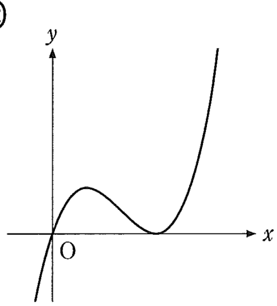
⓪



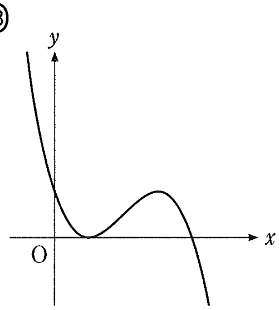
①



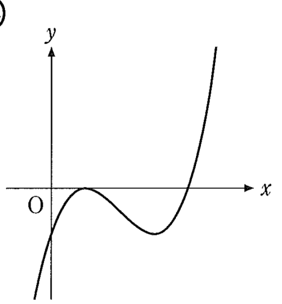
②



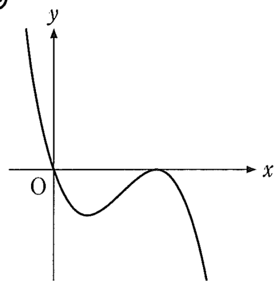
③



④



⑤



(iii) (i)で求めた $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ のうち，小さい方の数を α とする。$f(0) < 0 < f(\alpha)$ を満たすような k の値の範囲は $\boxed{\text{ク}} < k < \boxed{\text{ケ}}$ である。

k は $\boxed{\text{ク}} < k < \boxed{\text{ケ}}$ を満たすとする。$0 \leqq x \leqq \alpha$ の範囲において，$f(x) = 0$ を満たす x の値を β とおく。$0 \leqq x \leqq \beta$ の範囲における $y = f(x)$ のグラフと x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積と，$\beta \leqq x \leqq \alpha$ の範囲における $y = f(x)$ のグラフと x 軸および直線 $x = \alpha$ で囲まれた部分の面積が等しいとする。このとき，$\boxed{\text{コ}}$ が成り立つ。したがって，$k = \dfrac{\boxed{\text{サシス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ である。

$\boxed{\text{ク}}$, $\boxed{\text{ケ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ 0	① $\frac{2}{3}$	② $\frac{3}{4}$	③ $\frac{4}{3}$	④ $\frac{3}{2}$
⑤ $\frac{5}{2}$	⑥ $-\frac{2}{3}$	⑦ $-\frac{3}{4}$	⑧ $-\frac{4}{3}$	⑨ $-\frac{3}{2}$

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

⓪ $\displaystyle\int_0^\beta f(x)dx = \int_\beta^\alpha f(x)dx$	① $\displaystyle\int_0^\alpha f(x)dx = 0$
② $\displaystyle\int_0^\beta f(x)dx = 0$	③ $\displaystyle\int_\beta^\alpha f(x)dx = 0$

(2)　3 次関数 $g(x)$ に対して，与えられた条件のもとで $y = g(x)$ のグラフの概形を考えよう。

・次の条件(a)を考える。

条件(a)　$g(0) = 0$ かつ $g'(0) > 0$ である。

後の ⓪～⑦ のうち，条件(a)を満たす関数 $y = g(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\text{タ}}$, $\boxed{\text{チ}}$, $\boxed{\text{ツ}}$ の 3 つであり，残りの 5 つは条件(a)を満たさない。ただし，$\boxed{\text{タ}}$, $\boxed{\text{チ}}$, $\boxed{\text{ツ}}$ の解答の順序は問わない。

・条件(a)に加えて，次の条件(b)を考える。

条件(b)　$y = g'(x)$ のグラフは直線 $x = 0$ を軸とする放物線である。

後の ⓪〜⑦ のうち，条件(a), (b)をともに満たす関数 $y=g(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\text{テ}}$, $\boxed{\text{ト}}$ の 2 つであり，残りの 6 つは条件(a), (b)の少なくとも一方を満たさない。ただし，$\boxed{\text{テ}}$, $\boxed{\text{ト}}$ の解答の順序は問わない。

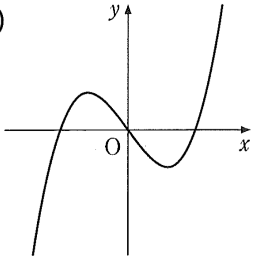
・条件(a), (b)に加えて，次の条件(c)を考える。

条件(c)　$y=g'(x)$ のグラフは下に凸の放物線である。

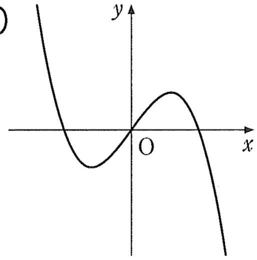
後の ⓪〜⑦ のうち，条件(a), (b), (c)のすべてを満たす関数 $y=g(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\text{ナ}}$ の 1 つだけである。

$\boxed{\text{タ}}$ 〜 $\boxed{\text{ナ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪〜⑦ のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

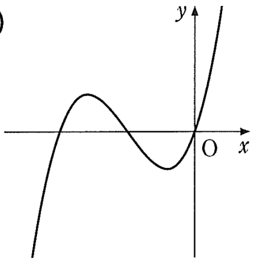
⓪



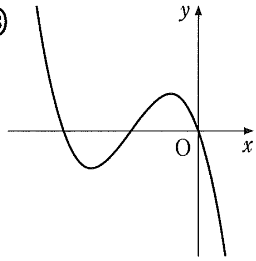
①



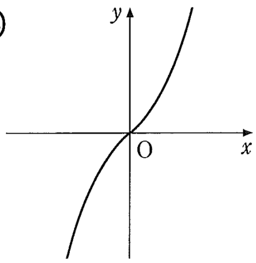
②



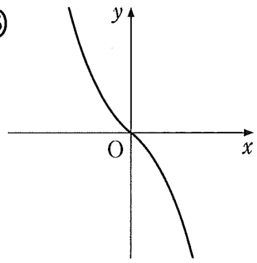
③



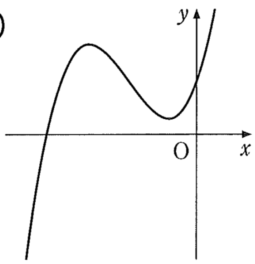
④



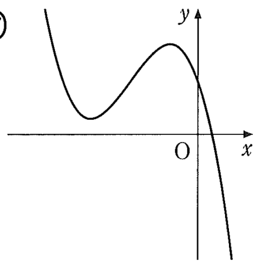
⑤



⑥



⑦



第４問

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$に対して，$b_n=a_{n+1}-a_n$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) で定められる数列$\{b_n\}$を，$\{a_n\}$の階差数列という。

(1)　$\{a_n\}$の初項は 1 とする。また，$\{a_n\}$の階差数列$\{b_n\}$の一般項が，$b_n=4n-1$で表されるとする。

(i)　$b_1=\boxed{\text{ア}}$であるから，$a_2=\boxed{\text{イ}}$となる。さらに，$b_2=\boxed{\text{ウ}}$であるから，$a_3=\boxed{\text{エオ}}$となる。

(ii)　nを 2 以上の自然数とする。このとき$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{\boxed{\text{カ}}}b_k$ ……①が成り立つことから，

$a_n=\boxed{\text{キ}}n^2-\boxed{\text{ク}}n+\boxed{\text{ケ}}$であることがわかる。

$\boxed{\text{カ}}$の解答群

⓪　$n-1$	①　n	②　$n+1$	③　$n+2$

(2)　太郎さんは，①を変形すると$\sum_{k=1}^{\boxed{\text{カ}}}b_k=a_n-a_1$となることから，数列の和を求めるために次のことを考えた。

発想

ある数列$\{d_n\}$の和を求めたいときは，数列$\{c_n\}$で，$\{c_n\}$の階差数列が$\{d_n\}$となるものを見つければよい。

太郎さんは，この**発想**に基づいて，一般項が$d_n=(2n+1)\cdot 2^n$で表される数列$\{d_n\}$の和を求めることにした。

数列$\{c_n\}$で，$\{c_n\}$の階差数列が$\{d_n\}$となるもの，すなわち

$$(2n+1)\cdot 2^n=c_{n+1}-c_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\cdots\cdots\cdots②$$

となるものを見つけたい。太郎さんは，$\{d_n\}$の一般項が n の 1 次式と2^nの積であることから，$\{c_n\}$の一般項が$c_n=(pn+q)\cdot 2^n$と表されるのではないかと考えた。ここで，p, qは定数である。このとき$c_{n+1}-c_n$をn, p, qを用いて表すと

$$c_{n+1}-c_n=\left\{\boxed{\text{コ}}n+\boxed{\text{サ}}\right\}\cdot 2^n$$

となる。よって，$p=\boxed{\text{シ}}$，$q=\boxed{\text{スセ}}$のとき②が成り立つ。

以上のことから，すべての自然数nについて，数列$\{d_n\}$の初項から第n項での和は，$\sum_{k=1}^{n}d_k=\left(\boxed{\text{ソ}}\right)\cdot 2^{n+1}+\boxed{\text{タ}}$となることがわかる。

$\boxed{\text{コ}}$，$\boxed{\text{サ}}$の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪　p	①　q	②　$2p$	③　$2q$
④　$(p+q)$	⑤　$(2p+q)$	⑥　$(p+2q)$	⑦　$2(p+q)$

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

⓪ $n-1$	① $n+1$	② $2n-3$
③ $2n-1$	④ $2n+1$	⑤ $2n+3$

(3) 花子さんは，一般項が $d_n=(n^2-n-1)\cdot 2^n$ で表される数列 $\{d_n\}$ の和を求めることにした。(2)の**発想**に基づいて考えると，すべての自然数 n について，$\{d_n\}$ の初項から第 n 項までの和は，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} d_k = \left(\boxed{\text{チ}}\right)\cdot 2^{n+1} - \boxed{\text{ツ}}$ となることがわかる。

$\boxed{\text{チ}}$ の解答群

⓪ $3n-3$	① $3n+3$	② $5n-7$
③ $5n+7$	④ n^2-n-1	⑤ n^2+n+1
⑥ n^2+3n-3	⑦ n^2-3n+3	⑧ n^2+5n-7
⑨ n^2-5n+7		

第５問

解答解説のページへ

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 13 ページの正規分布表を用いてもよい。

ある自治体では，地域の知識を問う資格試験 (以下，資格試験) を毎年実施しており，200 点満点のうち 120 点以上である受験者を合格としている。

(1)　今年実施した資格試験 (以下，今年の資格試験) における受験者全体の得点の平均は 116 点，標準偏差は 25 点であることが公表された。今年の資格試験の受験者の得点は正規分布に従うとし，得点を表す確率変数を X とする。このとき，X は正規分布 $N(116,\ 25^2)$ に従うから，$Y=\boxed{\text{ア}}$ とおくと，Y は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。したがって，今年の受験者全体のうち，120 点以上である受験者の割合 $P(X \geqq 120)$ はおよそ $\boxed{\text{イ}}$ である。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{X-116}{5}$	① $\dfrac{X-116}{25}$	② $\dfrac{X-116}{25^2}$
③ $\dfrac{X-120}{5}$	④ $\dfrac{X-120}{25}$	⑤ $\dfrac{X-120}{25^2}$

$\boxed{\text{イ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑦ のうちから１つ選べ。

⓪ 0.16	① 0.21	② 0.29	③ 0.34
④ 0.41	⑤ 0.44	⑥ 0.50	⑦ 0.84

(2)　この自治体の A 地域では，多くの住民がこの資格試験を受験し，過去 10 年間における合格率が毎年 40% (0.4) を超えていた。太郎さんたちは，今年の資格試験の合格率についても 0.4 より高いと判断してよいかを調べるために，A 地域における住民の受験者の中から n 人を無作為に選び，その合否を調査することにした。

(i)　A 地域における住民の今年の資格試験 (以下，A 地域における今年の資格試験) の受験者全体を母集団とし，母集団の大きさは十分に大きいとする。そして，A 地域における今年の資格試験の合格率を p とする。無作為に選ぶ n 人のうち i 番目の受験者が合格している場合は 1，合格していない場合は 0 の値をとる確率変数を W_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ と定義する。このとき，W_i の確率分布は表 1 のとおりである。

表　1

W_i	0	1	計
確　率	$1-p$	p	1

表 1 から，W_i の平均 (期待値) $E(W_i)$ は $\boxed{\text{ウ}}$ となる。また，W_i の分散 $V(W_i)$ について $V(W_i)=\{0-E(W_i)\}^2(1-p)+\{1-E(W_i)\}^2 p$ から，$V(W_i)$ は $\boxed{\text{エ}}$ となる。

$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ p	① $1-p$	② p^2
③ $p(1-p)$	④ $p^2(1-p)^2$	⑤ $p^3+(1-p)^3$

(ii) (i)の W_1, W_2, …, W_n を，表 1 の確率分布をもつ母集団から抽出した大きさ n の無作為標本とみなす。このとき，標本平均を $\overline{W}=\dfrac{W_1+W_2+\cdots+W_n}{n}$ とおくと，n が十分に大きいとき，$\overline{W}$ は近似的に正規分布 $N\left(p,\ \boxed{\text{オ}}\right)$ に従う。

この $\overline{W}$ の確率分布を利用して，p が 0.4 より高いといえるかを，有意水準 5%(0.05)で仮説検定を行い検証したい。ここで，統計的に検証したい仮説を「対立仮説」，対立仮説に反する仮定として設けた仮説を「帰無仮説」とする。このとき，帰無仮説は「$p=0.4$」，対立仮説は「$p>0.4$」である。これらの仮説に対して，有意水準5%で帰無仮説が棄却 (否定) されるかどうかを判断する。

無作為に選ばれた 400 人のうち，184 人が合格者であった。いま，帰無仮説が正しいと仮定する。標本の大きさ $n=400$ は十分に大きいので，標本平均 $\overline{W}$ は近似的に平均が 0.4，標準偏差が $\boxed{\text{カ}}$ の正規分布に従う。

$\sqrt{6}=2.45$ として用いると，$P\left(\overline{W}\geqq\dfrac{184}{400}\right)=P(\overline{W}\geqq 0.46)$ の値は $\boxed{\text{キ}}$ となる。よって，この値をパーセント表示した値は有意水準 5%より $\boxed{\text{ク}}$。したがって，有意水準 5%で A 地域における今年の資格試験の合格率は 0.4 より $\boxed{\text{ケ}}$。

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

⓪ p	① $1-p$	② $p(1-p)$	③ $\dfrac{p}{\sqrt{n}}$
④ $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$	⑤ $\dfrac{p(1-p)}{\sqrt{n}}$	⑥ $\dfrac{\sqrt{1-p}}{n}$	⑦ $\dfrac{p(1-p)}{n}$

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$	① $\dfrac{6}{25}$	② $\dfrac{\sqrt{6}}{100}$	③ $\dfrac{3}{250}$	④ $\dfrac{3}{500}$	⑤ $\dfrac{\sqrt{6}}{2000}$

$\boxed{\text{キ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑦ のうちから 1 つ選べ。

⓪ 0.0046	① 0.0062	② 0.0071	③ 0.0987
④ 0.1112	⑤ 0.3888	⑥ 0.4013	⑦ 0.4929

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

⓪ 小さいから，帰無仮説は棄却されない

① 小さいから，帰無仮説は棄却される

② 大きいから，帰無仮説は棄却されない

③ 大きいから，帰無仮説は棄却される

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

⓪ 高いと判断できる	① 高いとは判断できない

(3) 太郎さんと花子さんは，(2)の仮説検定の結果について話している。

太郎：無作為に選ばれた 100 人のうち 46 人が合格者でも，比率は同じ 0.46 になるから，仮説検定の結果は同じになるのかな。

花子：試しに計算して調べてみようよ。

A 地域における今年の資格試験の受験者の中から無作為に選ばれた 100 人のうち，46 人が合格者である場合について考える。

(2)の(ii)と同じ帰無仮説と対立仮説に対し，有意水準 5%で帰無仮説が棄却されるかどうかを調べる。標本の大きさ $n=100$ は十分に大きいから，(2)の(ii)と同様に，$\overline{W}$ は近似的に正規分布 $N\left(p,\ \boxed{\text{オ}}\right)$ に従う。帰無仮説が正しいと仮定する。このとき，$\sqrt{6}=2.45$ として用いると，$P\left(\overline{W} \geqq \dfrac{46}{100}\right)=P(\overline{W} \geqq 0.46)$ の値をパーセント表示した値は有意水準 5%より $\boxed{\text{コ}}$。

したがって，有意水準 5%で帰無仮説は $\boxed{\text{サ}}$。

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

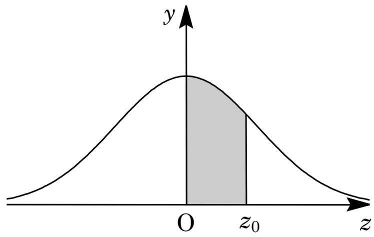
⓪ 小さい	① 大きい

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪ 棄却される	① 棄却されない

正 規 分 布 表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998

第６問

解答解説のページへ

平面上に，△ABC と点 M がある。

(1) 次の等式を満たす点 P を考える。

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}+2\overrightarrow{\mathrm{MB}}-\overrightarrow{\mathrm{MC}} \cdots\cdots\cdots ①$$

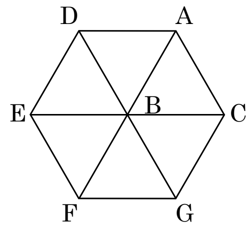


図 1

3 点 A, B, C を図 1 の位置にとる。ただし，図 1 における△ABC は正三角形，六角形 DEFGCA は正六角形である。

・M が A と一致するとき，P は $\boxed{\text{ア}}$ と一致する。

・M が D と一致するとき，P は $\boxed{\text{イ}}$ と一致する。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ A	① B	② C	③ D	④ E	⑤ F	⑥ G

(2) a, b, c を実数とする。次の等式を満たす点 P を考える。

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=a\overrightarrow{\mathrm{MA}}+b\overrightarrow{\mathrm{MB}}+c\overrightarrow{\mathrm{MC}} \cdots\cdots\cdots ②$$

花子さんと太郎さんは，(1)の考察から，P の位置について話している。

> 花子：①は $a=1$，$b=2$，$c=-1$ の場合だね。(1)で考えた 2 つの場合では，M の位置によって P の位置が異なるね。
>
> 太郎：でも，$a=1$，$b=0$，$c=0$ の場合だと，②は $\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ となるから，M がどの位置にあっても，P は A と一致するよ。
>
> 花子：P の位置が変わらないのは，どのようなときかな。

ここでは「M がどの位置にあっても，②を満たす P の位置が変わらない」ための a, b, c の条件を調べよう。

②の両辺を，A を始点とするベクトルを用いて表すと，左辺は $\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\boxed{\text{ウ}}$ となり，右辺は $a\overrightarrow{\mathrm{MA}}+b\overrightarrow{\mathrm{MB}}+c\overrightarrow{\mathrm{MC}}=\boxed{\text{エ}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\boxed{\text{オ}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\boxed{\text{カ}}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ となる。したがって，②は $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boxed{\text{キ}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\boxed{\text{ク}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\boxed{\text{ケ}}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ と変形できる。

よって，M がどの位置にあっても，②を満たす P の位置が変わらないための必要十分条件は $\boxed{\text{コ}}$ である。

$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

⓪ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AM}}$	① $-\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AM}}$	② $\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}$	③ $-\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}$

$\boxed{\text{エ}}$ ～ $\boxed{\text{ケ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

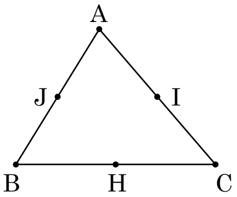
⓪ a	① b	② c
③ $(a+b+c)$	④ $(-a+b+c)$	⑤ $(a-b+c)$
⑥ $(a+b-c)$	⑦ $(-a-b-c)$	⑧ $(1+a+b+c)$
⑨ $(1-a-b-c)$		

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

⓪ $a=b$	① $b=c$	② $c=a$
③ $a+b-c=0$	④ $a-b+c=1$	⑤ $-a+b+c=-1$
⑥ $a+b+c=0$	⑦ $a+b+c=1$	⑧ $a+b+c=-1$

(3) a, b, c を，$\boxed{\text{コ}}$ を満たす実数とする。様々な条件のもとで，②を満たす点 P が存在する範囲を調べよう。

(i) a, b, c が，$\boxed{\text{コ}}$ と $a=\dfrac{1}{2}$ を満たすとき，P が存在する範囲は $\boxed{\text{サ}}$ である。ただし，△ABC の辺 BC の中点を H，辺 CA の中点を I，辺 AB の中点を J とする。



参考図

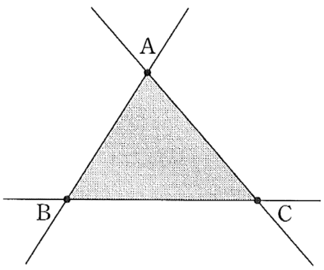
$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪ 直線 AH	① 直線 BI	② 直線 CJ
③ 直線 HI	④ 直線 IJ	⑤ 直線 JH

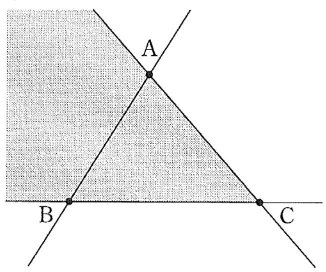
(ii) a, b, c が，$\boxed{\text{コ}}$ と $c<0$ を満たすとき，P が存在する範囲を図示すると，$\boxed{\text{シ}}$ の灰色部分となる。ただし，境界線を含まない。

$\boxed{\text{シ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪〜⑤ のうちから 1 つ選べ。

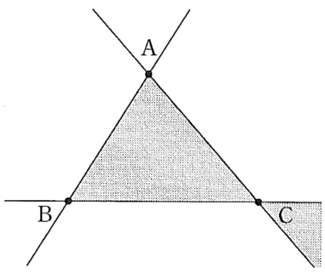
⓪



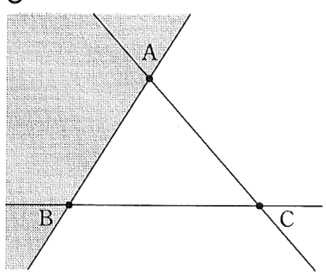
①



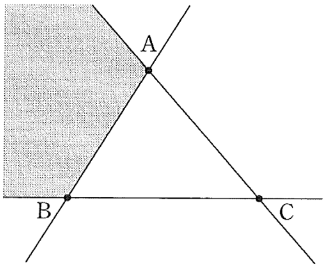
②



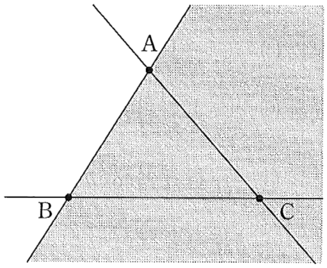
③



④



⑤



第７問

解答解説のページへ

z を 0 でない複素数とし，$w=z+\dfrac{1}{z}$ とする。また，r を正の実数とし，複素数平面上で，原点 O を中心とする半径 r の円を C とする。

(1)　$z=\sqrt{3}+i$ のとき，$|z|=\boxed{\text{ア}}$ であり

$$w=\frac{\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}+\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}i$$

である。

(2)　z が C 上を動くとき，w が複素数平面上で描く図形を考える。

実数 θ を z の偏角とし，極形式を用いて $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ と表す。

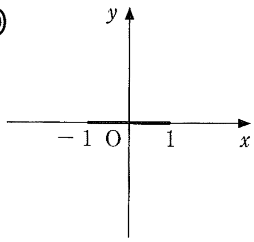
(i)　$w=z+\dfrac{1}{z}$ を r，θ を用いて表すと，$w=\boxed{\text{キ}}+i\boxed{\text{ク}}$ ……①である。したがって，θ の値によらず $\boxed{\text{ク}}=0$ となるような r の値は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

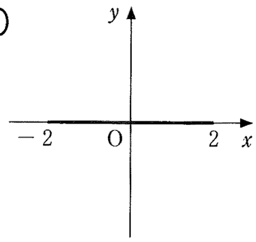
$\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

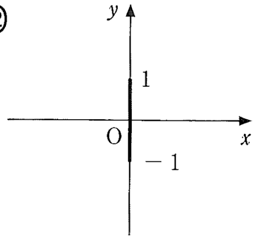
⓪　$2r\cos\theta$	①　$2r\sin\theta$
②　$(r+1)\cos\theta$	③　$(r+1)\sin\theta$
④　$(r-1)\cos\theta$	⑤　$(r-1)\sin\theta$
⑥　$\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta$	⑦　$\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta$
⑧　$\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta$	⑨　$\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta$

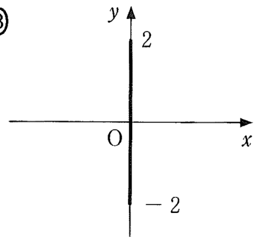
(ii)　$r=\boxed{\text{ケ}}$ とする。z が C 上を動くとき，w が描く図形は $\boxed{\text{コ}}$ である。

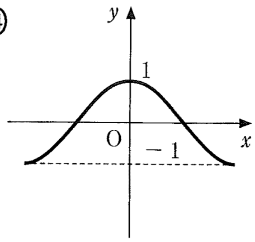
$\boxed{\text{コ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑤ のうちから１つ選べ。

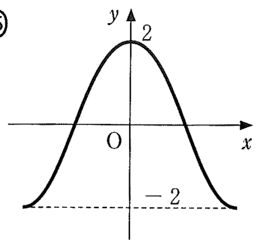
⓪


①


②


③


④


⑤


(iii) $r \neq$ $\boxed{\text{ケ}}$ とする。x, y を実数として $w = x + yi$ とおくと，①から，$x =$ $\boxed{\text{キ}}$，$y =$ $\boxed{\text{ク}}$ ……②が成り立つ。②の 2 つの式から θ を消去すると，x, y は $\boxed{\textbf{サ}}$ を満たし，z が C 上を動くとき，$w = x + yi$ は $\boxed{\text{サ}}$ の表す図形を描く。

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = 1$	① $\dfrac{x^2}{r^2} - \dfrac{y^2}{r^2} = 1$
② $\dfrac{x^2}{\left(r + \dfrac{1}{r}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(r - \dfrac{1}{r}\right)^2} = 1$	③ $\dfrac{x^2}{\left(r + \dfrac{1}{r}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(r - \dfrac{1}{r}\right)^2} = 1$
④ $\dfrac{x^2}{\left(r - \dfrac{1}{r}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(r + \dfrac{1}{r}\right)^2} = 1$	⑤ $\dfrac{x^2}{\left(r - \dfrac{1}{r}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(r + \dfrac{1}{r}\right)^2} = 1$

(3) $r \neq$ $\boxed{\text{ケ}}$ とする。z が C 上を動くとき，w^2 が描く図形を考えよう。

(i) w^2 を z を用いて表すと，$w^2 =$ $\boxed{\textbf{シ}}$ である。

$\boxed{\text{シ}}$ の解答群

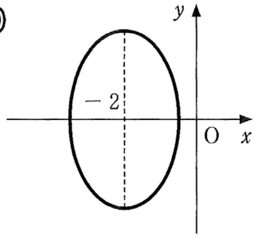
⓪ $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$	① $z^2 + \dfrac{1}{z^2} + 1$	② $z^2 + \dfrac{1}{z^2} - 1$
③ $z^2 + \dfrac{1}{z^2} + 2$	④ $z^2 + \dfrac{1}{z^2} - 2$	⑤ $z^2 + \dfrac{1}{z^2} + 2i$

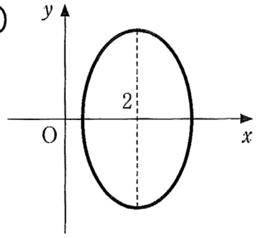
(ii) z が C 上を動くとき，$z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ が描く図形の方程式を考える。このとき，z^2 は原点 O を中心とする半径 r^2 の円を描く。このことから，X, Y を実数として $z^2 + \dfrac{1}{z^2} = X + Yi$ とおくと，X, Y は $\boxed{\textbf{ス}}$ を満たす。以上を踏まえると，w^2 が描く図形は $\boxed{\textbf{セ}}$ であることがわかる。

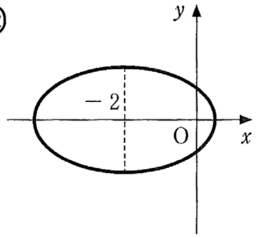
$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

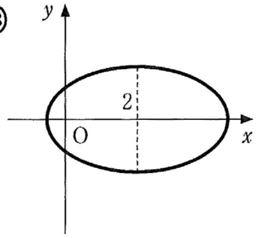
⓪ $\dfrac{X}{r^2 + \dfrac{1}{r^2}} + \dfrac{Y}{r^2 - \dfrac{1}{r^2}} = 1$	① $\dfrac{X^2}{r^4} + \dfrac{Y^2}{r^4} = 1$
② $\dfrac{X^2}{\left(r^2 + \dfrac{1}{r^2}\right)^2} + \dfrac{Y^2}{\left(r^2 - \dfrac{1}{r^2}\right)^2} = 1$	③ $\dfrac{X^2}{\left(r^2 + \dfrac{1}{r^2}\right)^2} - \dfrac{Y^2}{\left(r^2 - \dfrac{1}{r^2}\right)^2} = 1$
④ $\dfrac{X^2}{\left(r^2 - \dfrac{1}{r^2}\right)^2} + \dfrac{Y^2}{\left(r^2 + \dfrac{1}{r^2}\right)^2} = 1$	⑤ $\dfrac{X^2}{\left(r^2 - \dfrac{1}{r^2}\right)^2} - \dfrac{Y^2}{\left(r^2 + \dfrac{1}{r^2}\right)^2} = 1$

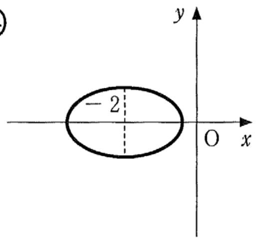
$\boxed{\text{セ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪ 〜 ⑦ のうちから１つ選べ。

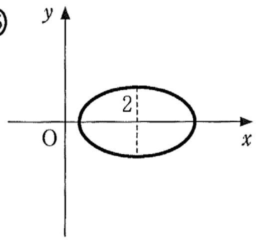
⓪


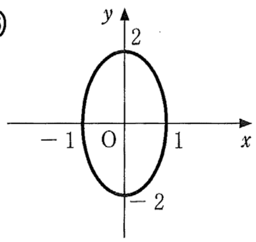
①


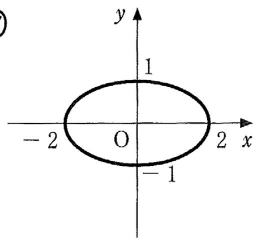
②


③


④


⑤


⑥


⑦


第１問

問題のページへ

(1)　円 $C_1 : x^2+y^2-7y+(2x-5y+25)=0$ ……①に対して，

$$x^2+y^2+2x-12y+25=0,\ (x+1)^2+(y-6)^2=12$$

これより，中心の座標は$(-1,\ 6)$，半径 $r_1=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ となる。

円 $C_2 : x^2+y^2-7y-(2x-5y+25)=0$ ……②に対して，

$$x^2+y^2-2x-2y-25=0,\ (x-1)^2+(y-1)^2=27$$

これより，中心の座標は$(1,\ 1)$，半径 $r_2=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$ となる。

C_1 と C_2 の中心間距離 d は，$d=\sqrt{2^2+(-5)^2}=\sqrt{29}$ となり，$r_2-r_1<d<r_2+r_1$ から，C_1 と C_2 は 2 点で交わる。

(2)　不等式 $x^2+y^2-7y+|2x-5y+25|<0$ ……③の表す領域に対し，

・$2x-5y+25\geqq 0$ のとき　①から $(x+1)^2+(y-6)^2<12$

・$2x-5y+25<0$ のとき　②から $(x-1)^2+(y-1)^2<27$

(i)　領域 $D : 2x-5y+25\geqq 0$，領域 $E : 2x-5y+25<0$ に対して，

$$f(x,\ y)=2x-5y+25$$

このとき，$f(0,\ 0)=25>0$ から原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ は D に含まれる。また，$f(-1,\ 6)=-7<0$ から C_1 の中心 $(-1,\ 6)$ は E に含まれ，$f(1,\ 1)=22>0$ から C_2 の中心 $(1,\ 1)$ は D に含まれる。

(ii)　直線 $l : 2x-5y+25=0$ ……④とする。

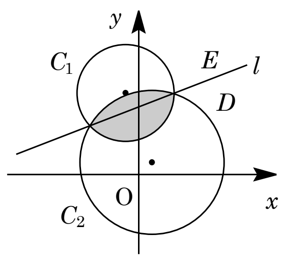
①－②から，$2(2x-5y+25)=0$ となり，④を満たす。すなわち，①と②の両方を満たす x, y は，④も満たすことになる。

したがって，点 P を C_1 上にあり，かつ C_2 上にある点とすると，P は l 上にある。

(iii)　$x^2+y^2-7y+(2x-5y+25)<0$ は円 C_1 の内部を表し，$x^2+y^2-7y-(2x-5y+25)<0$ は円 C_2 の内部を表す。

そこで，領域 F を「領域 D と円 C_1 の内部の共通部分」，領域 G を「領域 E と円 C_2 の内部の共通部分」とおく。

すると，不等式③の表す領域は，(2)から F と G の和集合となり，図示すると右図の網点部 ⓪ である。

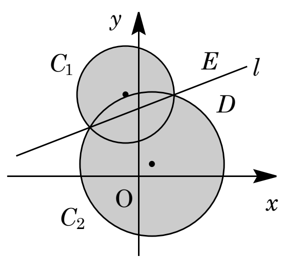


(iv)　不等式 $x^2+y^2-7y-|2x-5y+25|<0$ ……⑤に対し，

・$2x-5y+25\geqq 0$ のとき　②から $(x-1)^2+(y-1)^2<27$

・$2x-5y+25<0$ のとき　①から $(x+1)^2+(y-6)^2<12$

すると，不等式⑤の表す領域は，「領域 D と円 C_2 の内部の共通部分」と「領域 E と円 C_1 の内部の共通部分」の和集合となり，図示すると右図の網点部 ④ である。



[解 説]

交わる 2 円を題材に, 領域を絡めた有名問題です。誘導が非常に丁寧です。

第２問

問題のページへ

(1) $\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ ……①の証明のために，加法定理から，

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \cdots\cdots ②$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \cdots\cdots ③$$

②＋③から，$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$

$A=\alpha+\beta$，$B=\alpha-\beta$ とおくと，$\alpha=\dfrac{A+B}{2}$，$\beta=\dfrac{A-B}{2}$ となり，①が得られる。

(2) $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{5}{12}\pi\right)+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)$ に対して，①から，

$$f(x)=2\sin\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{12}\pi+x+\frac{\pi}{12}\right)\cos\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{12}\pi-x-\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{6}=2\cos\frac{\pi}{6}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$0\leqq x<2\pi$ の範囲で，$f(x)$ は $x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ $\left(x=\dfrac{\pi}{4}\right)$ で最大値 $\sqrt{3}$ をとる。

(3) (i) $g(x)=\sin(x+a)+\sin(x+2a)+\sin(x+3a)$ $(0<a<\pi)$ に対し，①から，

$$\sin(x+a)+\sin(x+3a)=2\sin\frac{x+3a+x+a}{2}\cos\frac{x+3a-x-a}{2}$$

$$=2\sin(x+2a)\cos a$$

すると，$g(x)=2\sin(x+2a)\cos a+\sin(x+2a)=(2\cos a+1)\sin(x+2a)$

(ii) $a=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき，$g(x)=\left(2\cos\dfrac{5}{6}\pi+1\right)\sin\left(x+\dfrac{5}{3}\pi\right)=-(\sqrt{3}-1)\sin\left(x+\dfrac{5}{3}\pi\right)$

$0\leqq x<2\pi$ のとき，$\dfrac{5}{3}\pi\leqq x+\dfrac{5}{3}\pi<2\pi+\dfrac{5}{3}\pi$ から，$g(x)$ は $x+\dfrac{5}{3}\pi=2\pi+\dfrac{3}{2}\pi$ すなわち $x=\dfrac{11}{6}\pi$ で最大値 $\sqrt{3}-1$ をとる。

［解 説］

誘導に従って，三角関数の最大値を求める頻出の基本題です。(3)の問題文中の図 1 を見たとき，別のことを考えたのですが……。

第３問

問題のページへ

(1)　(i)　3 次関数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x+k$ に対して，

$$f'(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$$

これより，$f(x)$ は増減が右表のようになり，$x=1$ のとき極大値 $\dfrac{4}{3}+k$，$x=3$ のとき極小値 k をとる。

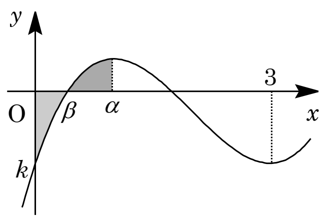
x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

(ii)　$y=f(x)$ のグラフは，(i)から $x=1$ のとき極大，$x=3$ のとき極小となる。

$k=0$ のときは原点を通ることより，その概形は ②，また $k>0$ のときは y 軸の正の部分と交わることより，その概形は ⓪である。

(iii) 条件より $\alpha=1$ なので，$f(0)<0<f(\alpha)$ から $k<0<\dfrac{4}{3}+k$ となる。

すると，$-\dfrac{4}{3}<k<0$ である。



さて，$f(\beta)=0\ (0\leqq\beta\leqq\alpha)$ として，$0\leqq x\leqq\beta$ における $y=f(x)$ のグラフと x 軸，y 軸で囲まれた部分の面積と，$\beta\leqq x\leqq\alpha$ における $y=f(x)$ のグラフと x 軸，直線 $x=\alpha$ で囲まれた部分の面積が等しいことより，

$$\int_0^\beta -f(x)dx=\int_\beta^\alpha f(x)dx\,,\ \int_0^\beta f(x)dx+\int_\beta^\alpha f(x)dx=0$$

すると，$\displaystyle\int_0^\alpha f(x)dx=0$ となり，$\displaystyle\int_0^1\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+k\right)dx=0$ から，

$$\frac{1}{12}-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+k=0\,,\ \frac{11}{12}+k=0$$

したがって，$k=-\dfrac{11}{12}$ である。なお，この値は $-\dfrac{4}{3}<k<0$ を満たしている。

(2)　3 次関数 $g(x)$ について，次の各条件のもとで，$y=g(x)$ のグラフの概形は，

条件(a)「$g(0)=0$ かつ $g'(0)>0$」を満たすとき，グラフは原点を通り，しかも原点における接線の傾きが正より，その概形は ①または ②または ④である。

条件(a)と条件(b)「$y=g'(x)$ のグラフは直線 $x=0$ を軸とする放物線」を満たすとき，$g'(0)>0$ から $g'(x)=px^2+q\ (p\neq0,\ q>0)$ とおくことができる。すると，$g(0)=0$ から $g(x)=\dfrac{1}{3}px^3+qx$ となり，$g(x)$ は奇関数すなわち $y=g(x)$ のグラフは原点対象である。その概形を ①, ②, ④のうちから選ぶと, ①または ④である。

条件(a)と条件(b)と条件(c)「$y=g'(x)$ のグラフは下に凸の放物線」を満たすとき，$p>0$ となり，$q>0$ と合わせると $g'(x)>0$ であるので，$g(x)$ は単調に増加する。その概形を ①, ④のうちから選ぶと ④である。

［解　説］

微積分の総合題で，基本を確認する内容になっています。(2)は段階的な誘導に従えば，難しくはないでしょう。

第４問

問題のページへ

(1) $a_1=1$ で，$\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の一般項が，$b_n=a_{n+1}-a_n=4n-1$ のとき，

(i) $b_1=3$ から $a_2=a_1+b_1=4$ となり，$b_2=7$ から $a_3=a_2+b_2=11$ となる。

(ii) $n\geqq 2$ で，$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$ ……①が成り立つことから，

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-1)=1+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)=2n^2-3n+2$$

(2) ①から $\sum_{k=1}^{n-1}b_k=a_n-a_1$ となるので，数列の和を階差数列を利用して求める。

さて，数列 $\{c_n\}$ の階差数列 $\{d_n\}$ の一般項が，$d_n=(2n+1)\cdot 2^n$ とき，

$$(2n+1)\cdot 2^n=c_{n+1}-c_n \text{………②}$$

ここで，p, q を定数として $c_n=(pn+q)\cdot 2^n$ とおくと，

$$\begin{aligned}c_{n+1}-c_n&=\{p(n+1)+q\}\cdot 2^{n+1}-(pn+q)\cdot 2^n\\&=\{(2pn+2p+2q)-(pn+q)\}\cdot 2^n=(pn+2p+q)\cdot 2^n\end{aligned}$$

②より，$p=2$，$2p+q=1$ から $q=-3$ となり，$c_n=(2n-3)\cdot 2^n$ なので，

$$\sum_{k=1}^{n}d_k=c_{n+1}-c_1=\{2(n+1)-3\}\cdot 2^{n+1}-(2-3)\cdot 2^1=(2n-1)\cdot 2^{n+1}+2$$

(3) $d_n=(n^2-n-1)\cdot 2^n$ のとき，$c_n=(pn^2+qn+r)\cdot 2^n$ とおくと，

$$\begin{aligned}c_{n+1}-c_n&=\{p(n+1)^2+q(n+1)+r\}\cdot 2^{n+1}-(pn^2+qn+r)\cdot 2^n\\&=\{(2pn^2+4pn+2p+2qn+2q+2r)-(pn^2+qn+r)\}\cdot 2^n\\&=\{pn^2+(4p+q)n+(2p+2q+r)\}\cdot 2^n\end{aligned}$$

すると，$d_n=c_{n+1}-c_n$ より，$p=1$，$4p+q=-1$，$2p+2q+r=-1$ となり，

$$p=1,\ q=-5,\ r=7$$

これから，$c_n=(n^2-5n+7)\cdot 2^n$ なので，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}d_k&=c_{n+1}-c_1=\{(n+1)^2-5(n+1)+7\}\cdot 2^{n+1}-(1-5+7)\cdot 2^1\\&=(n^2-3n+3)\cdot 2^{n+1}-6\end{aligned}$$

［解 説］

数列の和を求めるのに，その階差数列を利用するという有名な方法が題材になっています。誘導が詳しく付いていますので，初めてでも計算を進めていけるでしょう。ただ，計算量は多めです。

第５問

問題のページへ

(1)　今年の資格試験における得点を表す確率変数を X とすると，X は $N(116,\ 25^2)$ に従うから，$Y=\dfrac{X-116}{25}$ とおくと，Y は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従い，

$$P(X\geqq 120)=P\left(Y\geqq\frac{4}{25}\right)=P(Y\geqq 0.16)=0.5-0.063\fallingdotseq 0.44$$

(2)　(i)　A 地域における今年の資格試験の合格率を p とする。

このとき，無作為に選ぶ n 人のうち i 番目の受験者が合格している場合は 1，合格していない場合は 0 の値をとる確率変数を W_i と定義すると，

W_i	0	1	計
確　率	$1-p$	p	1

$$E(W_i)=0\cdot(1-p)+1\cdot p=p$$
$$V(W_i)=(0-p)^2(1-p)+(1-p)^2p=p(1-p)\{p+(1-p)\}=p(1-p)$$

(ii)　標本平均を $\overline{W}=\dfrac{W_1+W_2+\cdots+W_n}{n}$ とおくと，

$$E(\overline{W})=\frac{1}{n}\cdot np=p\ ,\ V(\overline{W})=\frac{1}{n^2}\cdot np(1-p)=\frac{p(1-p)}{n}$$

n が十分に大きいとき，$\overline{W}$ は近似的に正規分布 $N\left(p,\ \dfrac{p(1-p)}{n}\right)$ に従う。

さて，p が 0.4 より高いといえるかを，有意水準 5% で仮説検定を行い検証する。

ここで，帰無仮説 H_0「$p=0.4$」，対立仮説 H_1「$p>0.4$」として，400 人のうち 184 人が合格者であったとき，帰無仮説が正しいと仮定する。

標本の大きさ $n=400$ は十分に大きいので，標本平均 $\overline{W}$ は近似的に平均が 0.4，標準偏差が $\sqrt{\dfrac{0.4\cdot 0.6}{400}}=\sqrt{\dfrac{0.06}{100}}=\dfrac{\sqrt{6}}{100}$ の正規分布に従う。

そこで，$Z=\dfrac{\overline{W}-0.4}{\frac{\sqrt{6}}{100}}=\dfrac{100(\overline{W}-0.4)}{\sqrt{6}}$ とおくと，Z は $N(0,\ 1)$ に従い，

$$P\left(\overline{W}\geqq\frac{184}{400}\right)=P(\overline{W}\geqq 0.46)=P\left(Z\geqq\frac{6}{\sqrt{6}}\right)=P(Z\geqq\sqrt{6})$$

$\sqrt{6}=2.45$ とすると，$P(Z\geqq\sqrt{6})=P(Z\geqq 2.45)=0.5-0.4929=0.0071$

この値は有意水準 5%(0.05) より小さいから，帰無仮説 H_0 は棄却される。

したがって，有意水準 5% で A 地域における今年の資格試験の合格率は，0.4 より高いと判断できる。

(3)　100 人のうち 46 人が合格者であったとき，(2)(ii) と同様に H_0 と H_1 を設定して，有意水準 5% で帰無仮説が棄却されるかどうかを調べる。

まず，$n=100$ は十分に大きいから，$\overline{W}$ は近似的に平均が 0.4，標準偏差が $\sqrt{\dfrac{0.4\cdot 0.6}{100}}=\dfrac{\sqrt{6}}{50}$ の正規分布に従う。

そこで，$Z=\dfrac{\overline{W}-0.4}{\frac{\sqrt{6}}{50}}=\dfrac{50(\overline{W}-0.4)}{\sqrt{6}}$ とおくと，Z は $N(0,\ 1)$ に従い，

$$P\left(\overline{W}\geqq\frac{46}{100}\right)=P(\overline{W}\geqq 0.46)=P\left(Z\geqq\frac{3}{\sqrt{6}}\right)=P\left(Z\geqq\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$=P(Z\geqq 1.225)\fallingdotseq P(Z\geqq 1.23)=0.5-0.3907=0.1093$$

この値は有意水準 5%(0.05) より大きいから，帰無仮説 H_0 は棄却されない。

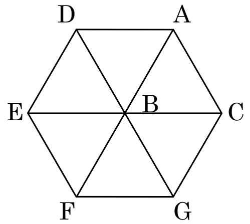
［解 説］

誘導が非常に詳しい仮説検定の問題です。(3)は(2)(ii)と同様な計算をするだけですが，結論は予測通りでした。なお，$\sqrt{6}=2.45$ をどこで適用するかで，値が少し異なってくる箇所があります。ただ，結論の選択肢は同じですが。

第６問

問題のページへ

(1)　右図のように，△ABCは正三角形，六角形 DEFGCA は正六角形であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}+2\overrightarrow{\mathrm{MB}}-\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ ……①とする。



まず, M が A と一致するとき，①から,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AA}}+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

これより, P は E と一致する。

また, M が D と一致するとき，①から,

$$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\overrightarrow{\mathrm{DA}}+2\overrightarrow{\mathrm{DB}}-\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DG}}-\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DB}}$$

これより, P は B と一致する。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=a\overrightarrow{\mathrm{MA}}+b\overrightarrow{\mathrm{MB}}+c\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ ……②を満たす点 P について,「M がどの位置にあっても, ②を満たす P の位置が変わらない」ための a, b, c の条件は, 始点を A にして,

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$

$$\begin{aligned}a\overrightarrow{\mathrm{MA}}+b\overrightarrow{\mathrm{MB}}+c\overrightarrow{\mathrm{MC}}&=-a\overrightarrow{\mathrm{AM}}+b(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}})+c(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}})\\&=b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(-a-b-c)\overrightarrow{\mathrm{AM}}\end{aligned}$$

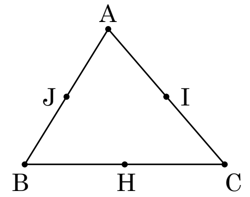
これより, ②は, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}=b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(-a-b-c)\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ となり,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(1-a-b-c)\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$

よって, 求める必要十分条件は, $1-a-b-c=0$ $(a+b+c=1)$ である。

(3)　$a+b+c=1$ のとき, ②は $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となり,

(i)　$a=\dfrac{1}{2}$ のとき, $b+c=\dfrac{1}{2}$ から $2b+2c=1$ となる。

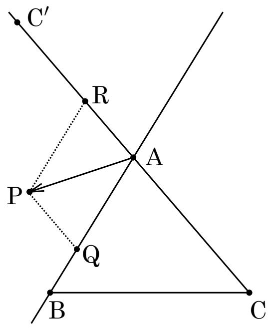


ここで, 辺 CA の中点を I, 辺 AB の中点を J とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=2b\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2c\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2b\overrightarrow{\mathrm{AJ}}+2c\overrightarrow{\mathrm{AI}}$$

すると, P が存在する範囲は直線 IJ である。

(ii)　$c=1-a-b<0$ のとき, $b\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$, $c\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ とおく。



b は任意の値をとるので, Q は直線 AB 上の点となり, 点 C の点 A に関する対称点を点 C′ とおくと, $c<0$ から R は半直線 AC′ 上の点である。

すると, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ から, P が存在する範囲は ③ の灰色部分となる。

[解 説]

平面ベクトルの図形への応用題です。軌跡や領域についての(3)がポイントです。

第７問

問題のページへ

(1) $z=\sqrt{3}+i$ のとき，$|z|=\sqrt{3+1}=2$ であり，

$$w=z+\frac{1}{z}=\sqrt{3}+i+\frac{1}{\sqrt{3}+i}=\sqrt{3}+i+\frac{\sqrt{3}-i}{4}=\frac{5}{4}\sqrt{3}+\frac{3}{4}i$$

(2) z が O を中心とする半径 r の円 C 上を動くとき，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと，

(i) $w=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\dfrac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\dfrac{\cos\theta-i\sin\theta}{r}$

$$=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta\ \cdots\cdots\cdots①$$

θ の値によらず $\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta=0$ となるのは，$r-\dfrac{1}{r}=0$ $(r=1)$ のときである。

(ii) $r=1$ のとき，①は $w=2\cos\theta$ となり，$w=x+yi$ とおくと，$x=2\cos\theta$，$y=0$

$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ から，w が描く図形は実軸上の線分 $-2\leqq x\leqq2$ であり，図示すると ① である。

(iii) $r\neq1$ のとき，①から $x=\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta$，$y=\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta\ \cdots\cdots\cdots②$

すると，$\cos\theta=\dfrac{x}{r+\frac{1}{r}}$，$\sin\theta=\dfrac{y}{r-\frac{1}{r}}$ より，$\dfrac{x^2}{\left(r+\frac{1}{r}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}=1$ である。

(3) (i) $r\neq1$ のとき，$w^2=\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2=z^2+\dfrac{1}{z^2}+2\ \cdots\cdots\cdots③$

(ii) $z^2=r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)$ となり，$z^2+\dfrac{1}{z^2}=X+Yi$ とおくと，

$$X+Yi=r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)+\frac{1}{r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)}$$

$$=r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)+\frac{\cos2\theta-i\sin2\theta}{r^2}$$

$$=\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)\cos2\theta+i\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)\sin2\theta$$

これより，$X=\left(r^2+\dfrac{1}{r^2}\right)\cos2\theta$，$Y=\left(r^2-\dfrac{1}{r^2}\right)\sin2\theta$ となり，

$$\frac{X^2}{\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)^2}+\frac{Y^2}{\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)^2}=1\ \cdots\cdots\cdots④$$

③から $w^2=X+Yi+2$ なので，w^2 が描く図形は，長軸が実軸と平行な楕円④を実軸に平行に 2 だけ移動したものとなり，図示すると ③ である。

［解 説］

複素数平面上の軌跡に楕円が絡んだ問題で，詳細な誘導がついています。