第1問（必答問題）

解答解説のページへ

[1] a を実数とするとき，放物線

$$y = x^2 + ax + a - 4 \cdots\cdots\cdots ①$$

と2次方程式

$$x^2 + ax + a - 4 = 0 \cdots\cdots\cdots ②$$

について考える。

(1) 放物線①の頂点の y 座標は

$$-\left(\frac{a - \boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\right)^2 - \boxed{\text{ウ}}$$

である。したがって，2次方程式②は二つの解 α，β をもつ。ここで，$(\alpha - \beta)^2 < 28$ となるのは $\boxed{\text{エオ}} < a < \boxed{\text{カ}}$ のときである。

(2) 放物線①は a の値にかかわらず点 $\left(-\boxed{\text{キ}},\ -\boxed{\text{ク}}\right)$ を通る。また①の頂点は放物線

$$y = -x^2 - \boxed{\text{ケ}}\,x - \boxed{\text{コ}} \cdots\cdots\cdots ③$$

上にある。

(3) 二つの放物線①と③の頂点の y 座標が等しくなるのは

$$a = \boxed{\text{サ}}$$

のときである。

[2] A, B 二人のそれぞれがもつ袋には，次のように点数のついた玉が6個ずつ入っている。

A の袋 ：6点の玉2個, 3点の玉1個, 0点の玉3個

B の袋 ：6点の玉1個, 3点の玉3個, 0点の玉2個

A, B は，各自の袋から玉を1個取り出して元に戻す。このとき，取り出した玉の点数をその人の得点とする。これを2回行って合計得点について考える。

(1) A の合計得点が6点になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ である。

(2) A の合計得点の期待値は $\boxed{\text{タ}}$ である。

(3) A の合計得点と B の合計得点がともに6点になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{チツテ}}}{1296}$ である。

(4) A の合計得点と B の合計得点が等しくなる確率は $\dfrac{\boxed{\text{トナニ}}}{1296}$ である。

第 2 問（必答問題）

解答解説のページへ

[1] x の整式

$$A = x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 1$$

がある。

(1) A を $x^2 - 5x - 2$ で割ったとき

商は $x^2 - \boxed{\text{ア}}\, x + \boxed{\text{イ}}$

余りは $\boxed{\text{ウ}}\, x + \boxed{\text{エ}}$

である。

(2) $x = 2 + \sqrt{3}$ のとき

$x^2 - 4x = \boxed{\text{オカ}}$

であり，そのときの A の値は $\boxed{\text{キ}}$ となる。

[2] 四角形 ABCD は円に内接し，∠ABC は鈍角で

$$\mathrm{AB} = 2,\ \mathrm{BC} = \sqrt{6},\ \sin\angle\mathrm{ABC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

とする。また，線分 AC と BD は直角に交わるとする。

このとき

$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}},\quad \mathrm{AC} = \boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$$

となる。円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ であり

$$\sin\angle\mathrm{CAB} = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}},\quad \sin\angle\mathrm{ACB} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

となる。また, AC と BD の交点を H とおくと，DH = $\boxed{\text{トナ}}$ BH である。

第 3 問（選択問題）

解答解説のページへ

正の偶数を小さいものから順に並べた数列

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots\cdots$$

について考える。

(1) 連続して並ぶ 5 項のうち，初めの 3 項の和が次の 2 項の和に等しければ, 5 項のうちの中央の項は $\boxed{\text{アイ}}$ である。

(2) 連続して並ぶ $2n+1$ 項のうち，初めの $n+1$ 項の和が次の n 項の和に等しければ，$2n+1$ 項のうちの中央の項は

$$\boxed{\text{ウ}}\,n^2+\boxed{\text{エ}}\,n$$

である。

(3) 連続して並ぶ 5 項のうち，初めの 3 項の 2 乗の和が次の 2 項の 2 乗の和に等しければ, 5 項のうちの中央の項は $\boxed{\text{オカ}}$ である。

(4) 連続して並ぶ $2n+1$ 項のうち，初めの $n+1$ 項の 2 乗の和が次の n 項の 2 乗の和に等しければ，$2n+1$ 項のうちの中央の項は

$$\boxed{\text{キ}}\,n^2+\boxed{\text{ク}}\,n$$

である。

第 4 問（選択問題）

解答解説のページへ

三角形 ABC の辺 AB, AC 上にそれぞれ点 D, E を AD : AE = 2 : 3 となるようにとる。直線 DE と直線 BC は点 F で交わるとする。

(1)　AD : BD = 2 : 3, AE : CE = 3 : 1 であるとき，三角形 ADE の面積を S, 四角形 BCED の面積を T とすれば，$\dfrac{S}{T} = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(2)　BD : CE = 3 : 1 とする。このとき，$\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{CF}} = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

さらに, 4 点 B, C, E, D が同一円周上にあるとき，AD = $2a$，CE = b とおくと，$\boxed{\text{オ}}\,a = \boxed{\text{カ}}\,b$ である。したがって

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}},\quad \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}} = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

である。また，$\dfrac{\mathrm{EF}}{\mathrm{DF}} = \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ となる。

第 5 問（選択問題）

解答解説のページへ

次のプログラムは 2 以上の自然数 N を入力したときに，N 以上の最小の 2 の累乗 2^a を求め，a と $b=2^a$ を表示させるものである。変数 A と変数 B がそれぞれ a と b に対応する。

```
10  INPUT  N
20  A=0
30  B=1
40  A=A[ ア ]1
50  B=B[ イ ]2
60  IF  B[ ウ ]N  THEN  GOTO  [ エオ ]
70  PRINT  "A=" ; A,  "B=" ; B
80  END
```

(1) 上の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪から⑨のうちから選び，$\boxed{\text{エオ}}$ については行番号をいれて，プログラムを完成せよ。

⓪ +　　① −　　② *　　③ /　　④ =

⑤ <>　　⑥ >　　⑦ <　　⑧ >=　　⑨ <=

(2) N に 5 を入力したとき, 40 行は $\boxed{\text{カ}}$ 回実行され，画面には A として $\boxed{\text{キ}}$ が表示され, B として $\boxed{\text{ク}}$ が表示される。

(3) N に 1998 を入力したとき，画面には A として $\boxed{\text{ケコ}}$ が表示され, B として $\boxed{\text{サシスセ}}$ が表示される。

第１問 [1]

問題のページへ

(1) $y = x^2 + ax + a - 4 \cdots\cdots$①より，

$$y = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + a - 4 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(a-2)^2 - 3$$

頂点の y 座標は，$-\dfrac{1}{4}(a-2)^2 - 3 = -\left(\dfrac{a-2}{2}\right)^2 - 3$

ここで，$x^2 + ax + a - 4 = 0 \cdots\cdots$②の 2 つの解は $x = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4(a-4)}}{2}$

$\alpha = \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 4a + 16}}{2}$，$\beta = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 4a + 16}}{2}$ とすると，

$$(\alpha - \beta)^2 = \left(-\sqrt{a^2 - 4a + 16}\right)^2 = a^2 - 4a + 16$$

条件より，$a^2 - 4a + 16 < 28$，よって，$-2 < a < 6$

(2) ①より，$a(x+1) + x^2 - 4 - y = 0$

a の値にかかわらず成立する条件は，$x + 1 = 0$，$x^2 - 4 - y = 0$

これより，$x = -1$，$y = -3$，よって，放物線①は点 $(-1,\ -3)$ を通過する。

また，①の頂点を $(x,\ y)$ とすると，

$$x = -\frac{a}{2} \cdots\cdots④,\quad y = -\frac{a^2}{4} + a - 4 \cdots\cdots⑤$$

④から $a = -2x$，⑤に代入して $y = -x^2 - 2x - 4 \cdots\cdots$③

(3) ③より，$y = -(x+1)^2 - 3$

条件より, (1)の結果と合わせて，$-\left(\dfrac{a-2}{2}\right)^2 - 3 = -3$，よって，$a = 2$

［解 説］

(1) $(\alpha - \beta)^2$ を求めるには，上の解のように，解の公式で行うのが簡明ですが，数学 B の「解と係数の関係」を利用してもできます。昨年もこれと同じタイプの問題が出題されています。

(2) この設問は数学Ⅱの「図形と式」の分野に属するもので，数学Ⅰの範囲から逸脱しています。規制緩和なのでしょうか。

(3) (2)ができれば簡単です。

第１問　[2]

問題のページへ

1 回目の得点を x, 2 回目の得点を y とする。

(1)　6 点となるのは，$(x,\ y)=(0,\ 6),\ (6,\ 0),\ (3,\ 3)$

その確率は，$\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{6}\times2+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{13}{36}$

(2)　A の合計得点は 0 点, 3 点, 6 点, 9 点, 12 点の場合がある。

(i)　A の合計得点が 0 点のとき，$(0,\ 0)$ より $\dfrac{3}{6}\times\dfrac{3}{6}=\dfrac{9}{36}$

(ii)　A の合計得点が 3 点のとき，$(0,\ 3),\ (3,\ 0)$ より $\dfrac{3}{6}\times\dfrac{1}{6}\times2=\dfrac{6}{36}$

(iii)　A の合計得点が 6 点のとき, (1)より $\dfrac{13}{36}$

(iv)　A の合計得点が 9 点のとき，$(3,\ 6),\ (6,\ 3)$ より $\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{6}\times2=\dfrac{4}{36}$

(v)　A の合計得点が 12 点のとき，$(6,\ 6)$ より $\dfrac{2}{6}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{4}{36}$

以上より，期待値は，$0\times\dfrac{9}{36}+3\times\dfrac{6}{36}+6\times\dfrac{13}{36}+9\times\dfrac{4}{36}+12\times\dfrac{4}{36}=5$

(3)　(1)と同様にして, B の合計得点が 6 点となる確率は，$\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{6}\times2+\dfrac{3}{6}\times\dfrac{3}{6}=\dfrac{13}{36}$

A, B ともに 6 点となる確率は，$\dfrac{13}{36}\times\dfrac{13}{36}=\dfrac{169}{1296}$

(4)　B の合計得点は, (2)と同様にして,

(i)　B の合計得点が 0 点のとき，$\dfrac{2}{6}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{4}{36}$

(ii)　B の合計得点が 3 点のとき，$\dfrac{2}{6}\times\dfrac{3}{6}\times2=\dfrac{12}{36}$

(iii)　B の合計得点が 6 点のとき, (3)より $\dfrac{13}{36}$

(iv)　B の合計得点が 9 点のとき，$\dfrac{3}{6}\times\dfrac{1}{6}\times2=\dfrac{6}{36}$

(v)　B の合計得点が 12 点のとき，$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$

(2)と合わせて，$\dfrac{9}{36}\times\dfrac{4}{36}+\dfrac{6}{36}\times\dfrac{12}{36}+\dfrac{13}{36}\times\dfrac{13}{36}+\dfrac{4}{36}\times\dfrac{6}{36}+\dfrac{4}{36}\times\dfrac{1}{36}=\dfrac{305}{1296}$

［解 説］

(1)　これは場合分けだけです。

(2)　期待値の計算は，このようにどうしても計算量が多くなります。

(3)　(1)でミスをしなければ，できるでしょう。

(4)　内容的には簡単なので，正確な計算力が第一という問題です。

第２問 [1]

問題のページへ

(1) A を x^2-5x-2 で割って，

$$A=(x^2-5x-2)(x^2-3x+1)+7x+1$$

商は x^2-3x+1，余りは $7x+1$

	1	-8	14	8	-1
2			2	-6	2
5		5	-15	5	
	1	-3	1	7	1

(2) $x^2-4x=(2+\sqrt{3})^2-4(2+\sqrt{3})=-1$

よって，$x^2-4x+1=0$ の解の１つが

$x=2+\sqrt{3}$ より，A を x^2-4x+1 で割って，

$$A=(x^2-4x+1)(x^2-4x-3)+2$$

	1	-8	14	8	-1
-1			-1	4	3
4		4	-16	-12	
	1	-4	-3	0	2

上式の両辺に $x=2+\sqrt{3}$ を代入すると，$x^2-4x+1=0$ から，

このときの A の値は，$A=2$

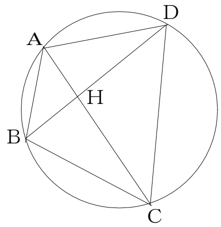
［解 説］

(1) 整式の割り算の計算です。上の解では組立除法を用いましたが，普通にやってももちろん結構です。

(2) (1)の計算結果が利用できない問題です。初めにこの問題を解いたとき，$x^2-4x+1=0$ が出た段階で(1)が使えないので計算ミスをしたのではないかと疑い，もう一度計算し直したぐらいです。これまでのセンター特有の誘導形式では考えにくいことで，「新傾向」と言うべきかもしれません。なお，内容的には，数学Aの「整式の除法」の問題というよりは，数学Bの「剰余定理の応用」という問題です。ここでも規制緩和です。

第 2 問　[2]

問題のページへ



$\angle \mathrm{ABC} > 90°$ より，$\cos\angle \mathrm{ABC} < 0$

$$\cos\angle \mathrm{ABC} = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{-\sqrt{6}}{3}$$

このとき，$\triangle \mathrm{ABC}$ に余弦定理を適用して，

$$\mathrm{AC}^2 = 2^2 + (\sqrt{6})^2 - 2\cdot 2\cdot\sqrt{6}\cdot\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 18$$

$$\mathrm{AC} = 3\sqrt{2}$$

また，円の半径を R として，$\triangle \mathrm{ABC}$ に正弦定理を適用して，

$$\frac{3\sqrt{2}}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}} = 2R,\quad R = \frac{3}{2}\sqrt{6}$$

ここで，$\angle \mathrm{CAB} = \theta$，$\angle \mathrm{ACB} = \varphi$ とおき，$\triangle \mathrm{ABC}$ に正弦定理を適用して，

$$\frac{\sqrt{6}}{\sin\theta} = \frac{2}{\sin\varphi} = 2\cdot\frac{3}{2}\sqrt{6}$$，これより，$\sin\theta = \frac{1}{3}$，$\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{9}$

さて，$\angle \mathrm{DAH} = 90° - \angle \mathrm{ADB} = 90° - \varphi$ から，

$$\mathrm{BH} : \mathrm{HD} = \tan\theta : \tan(90° - \varphi) = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} : \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \sin\theta\sin\varphi : \cos\theta\cos\varphi$$

$0° < \theta < 90°$，$0° < \varphi < 90°$ より，

$$\cos\theta = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{2},\quad \cos\varphi = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{9}\right)^2} = \frac{5}{9}\sqrt{3}$$

$$\mathrm{BH} : \mathrm{HD} = \left(\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{9}\right) : \left(\frac{2}{3}\sqrt{2}\times\frac{5}{9}\sqrt{3}\right) = 1 : 10$$，よって $\mathrm{DH} = 10\,\mathrm{BH}$

[解 説]

よくある構図の問題です。最後の DH と BH の長さの比を求める設問以外は基本的です。しかしこの最後の設問は難問です。実際，上の解でも，この部分だけで解のほぼ半分の分量になっていることからもわかります。これ以外の別解があるかもしれませんが，この設問の直前の設問の結論を用いて解くとこのようになります。なお，配点が難しい割にはたったの 5 点でしたので，あまり差はつかなかったのではないかと思えます。それに答が 10 ですので，山勘で当たったという人もいましたし。

第 3 問

問題のページへ

(1) 中央の項を a とすると，連続する 5 項は，

$a-4,\ a-2,\ a,\ a+2,\ a+4$

条件より，$(a-4)+(a-2)+a=(a+2)+(a+4)$

よって，$a=12$

(2) 中央の項を a とすると，連続する $2n+1$ 項は，

$a-2n,\cdots\cdots,a-2,\ a,\ a+2,\cdots\cdots,a+2n$

条件より，$(a-2n)+\cdots\cdots+(a-2)+a=(a+2)+\cdots\cdots+(a+2n)$

よって，$a=2(2+4+\cdots\cdots+2n)=2\cdot\dfrac{2+2n}{2}\cdot n=2n^2+2n$

(3) (1)と同様にして，条件より，

$(a-4)^2+(a-2)^2+a^2=(a+2)^2+(a+4)^2$

$-8a-4a+a^2=4a+8a$，$a^2=2(4a+8a)$

$a>0$ より，$a=24$

(4) (2)と同様にして，条件より，

$(a-2n)^2+\cdots\cdots+(a-2)^2+a^2=(a+2)^2+\cdots\cdots+(a+2n)^2$

$(-4na)+\cdots\cdots+(-4a)+a^2=4a+\cdots\cdots+4na$，$a^2=2(4a+\cdots\cdots+4na)$

$a>0$ より，$a=2(4+\cdots\cdots+4n)=4n^2+4n$

［解 説］

(1) この問題はどんな解き方をしても，簡単に解けます。

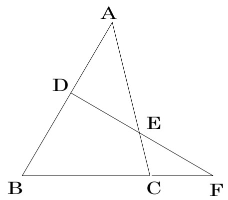
(2) (1)の議論を一般化したのが本問です。具体的なものから帰納的に推測していき，一般的な規則性を発見していくというタイプの問題で，現行の高校数学の指導要領で特に強調されている点を具現化したものです。このような新しい誘導形式が本年度だけで終わるとはとうてい考えられません。一番注目すべき問題です。

(3) (1)と同様な設問で, (4)への誘導問題です。

(4) (3)の議論を一般化したものです。なお，(2)と(4)の結論で $n=2$ とすると，それぞれ(1)と(3)の結論になります。この点を確認するくらいの心の余裕は必要です。

第 4 問

問題のページへ



条件より，$\mathrm{AD}=2a$，$\mathrm{AE}=3a$ とおく。

(1)　$\mathrm{AD}:\mathrm{BD}=2:3$ より，$\mathrm{BD}=3a$

$\mathrm{AE}:\mathrm{CE}=3:1$ より，$\mathrm{CE}=a$

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\mathrm{AB}\right)\left(\frac{3}{4}\mathrm{AC}\right)\sin A=\frac{3}{10}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{3}{10}(S+T)$$

これより，$7S=3T$ となり，$\dfrac{S}{T}=\dfrac{3}{7}$

(2)　$\mathrm{BD}:\mathrm{CE}=3:1$ より，$\mathrm{BD}=3b$，$\mathrm{CE}=b$ とおく。

ここで，$\triangle\mathrm{ABC}$ と直線 DE について，メネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1\text{，よって，}\frac{2a}{3b}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{b}{3a}=1,\ \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{CF}}=\frac{9}{2}$$

さらに, 4 点 B, C, E, D を通る円と，線分 AB, AC について，方べきの定理より，

$$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AB}=\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AC}\text{，よって，}2a(2a+3b)=3a(3a+b),\ 5a=3b$$

したがって，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{2a+3b}{3a+b}=\dfrac{2a+3\cdot\frac{5}{3}a}{3a+\frac{5}{3}a}=\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}}=\dfrac{2a}{3b}=\dfrac{2a}{5a}=\dfrac{2}{5}$

また，$\triangle\mathrm{BFD}$ と直線 AC について，メネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{CB}}\cdot\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AD}}\cdot\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EF}}=1\text{，よって，}\frac{2}{7}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EF}}=1,\ \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EF}}=1\text{，}$$

すなわち，$\dfrac{\mathrm{EF}}{\mathrm{DF}}=\dfrac{1}{2}$

［解　説］

(1)　二辺夾角のタイプの三角形の面積比を問うもので，頻出題です。

(2)　メネラウスの定理と方べきの定理を利用する問題です。誘導に乗っていけば，そのまま最後まで行き着くという往年のセンター試験の誘導見本のようなものです。

第５問

問題のページへ

(1) 40 行 : A は値が 1 つずつ増えていくので, A=A+1

50 行 : B は値が 2 倍ずつになっていくので, B=B＊2

60 行 : B が N より小であれば, 次に A の値を 1 つ増やし, B の値を 2 倍するので, B<N であれば, 40 行にうつる。

(2) N に 5 を入れたとき, 40 行の実行回数と A, B の値を表にすると,

	初め	1 回	2 回	3 回
A	0	1	2	3
B	1	2	4	8

40 行は 3 回実行され, A として 3, B として 8 が表示される。

(3) N が 1998 のとき, N 以上の最小の 2 の累乗は, $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$ より, 2^{11} となる。そのため, A として 11, B として 2048 が表示される。

［解 説］

(1) 簡単に空所補充のできる問題です。

(2) 実行回数の問題は, あわてて数えると, ±1 回の間違いをよくおかしてしまいます。上の解のように表でも作って慎重に数えましょう。

(3) この問いはプログラムとは無関係で, 何か裏でもあるのではないかと勘ぐってしまいます。じつは昨年も最後の設問がこのタイプで, 同じ心境になっていたのを思い出したぐらいです。