第１問（必答問題）

解答解説のページへ

[1]　正の定数 a に対して，方程式

$$5\cdot 2^{-x}+2^{x+3}=2a \cdots\cdots\cdots ①$$

を考える。$t=2^x$ とおくと，方程式①は

$$t^2-\frac{a}{\boxed{ア}}t+\frac{\boxed{イ}}{8}=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

となり，さらに

$$\left(t-\frac{a}{\boxed{ウ}}\right)^2+\frac{\boxed{エオ}-a^2}{\boxed{カキ}}=0$$

と変形される。したがって，$a>\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケコ}}$ のとき方程式②は２個の解をもつ。

また，$a=\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケコ}}$ のとき方程式①は，ただ一つの解

$$x=\frac{1}{\boxed{サ}}(\log_2\boxed{シ}-\boxed{ス})$$

をもつ。

[2]　$0°\leqq\theta\leqq 90°$ の範囲で，関数

$$f(\theta)=\sqrt{6}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta$$
$$g(\theta)=\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{6}\sin\theta$$

を考える。

(1)　$f(60°)=\sqrt{\boxed{セ}}$ である。

(2)　$\theta=\boxed{ソタ}°$ のとき，$f(\theta)$ は最小値 $\sqrt{\boxed{チ}}$ をとる。

(3)　$g(\theta)=\boxed{ツ}\sqrt{\boxed{テ}}\cos(\theta+\boxed{トナ}°)$ と表せる。とくに，

$g(\theta)=-\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$ ならば，

$$f(\theta)=\frac{\boxed{ニ}\sqrt{\boxed{ヌ}}}{\boxed{ネ}},\quad \sin\theta=\frac{\boxed{ノ}+\boxed{ハ}\sqrt{\boxed{ヒ}}}{10}$$

となる。

第 2 問（必答問題）

解答解説のページへ

$a>0$ とし，直線 $y=2ax$ を l とする。

(1)　点 $(-1,\ 0)$ で x 軸に接する放物線 C_1 が直線 l にも接しているとする。その接点 P の座標は($\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イウ}}$)であり，C_1 の方程式は

$$y=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}(x+1)^2$$ である。

次に, x 軸に接する放物線 $C_2:y=p(x-q)^2$ が点 P を通り，点 P での接線が直線 l と直交しているとする。このとき，点 P での C_2 の接線の傾きは $\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ であり, p と q は

$$p=\frac{1}{\boxed{\text{コサ}}\,a^{\boxed{\text{シ}}}},\quad q=\boxed{\text{ス}}+\boxed{\text{セ}}\,a^{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。

(2)　放物線 C_1，x 軸，直線 $x=\boxed{\text{ア}}$ で囲まれる部分の面積を S_1 とし，また放物線 C_2, x 軸，直線 $x=\boxed{\text{ア}}$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1，S_2 は a を用いてそれぞれ

$$S_1=\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}a,\quad S_2=\frac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}}a^{\boxed{\text{ナ}}}$$

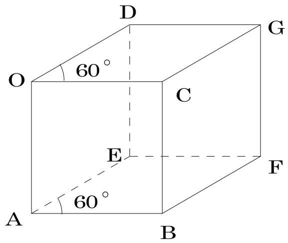
と表される。

したがって，$3S_1=S_2$ となるのは，$a=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ のときである。

第 3 問（選択問題）

解答解説のページへ

次の図のように向かい合う面が平行である六面体 OABC-DEFG がある。ただし，面 OABC, CBFG は一辺の長さが 1 の正方形であり，面 OCGD は $\angle COD = 60°$ のひし形である。



このとき

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \boxed{\text{ア}}$$

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = \frac{1}{\boxed{\text{イ}}}$$

である。

a を $0<a<1$ を満たす数とする。線分 EB を 2 : 1 に内分する点を P, 線分 GE を $a:(1-a)$ に内分する点を Q とすると

$$\overrightarrow{PG} = -\overrightarrow{OA} + \frac{1}{\boxed{\text{ウ}}}\overrightarrow{OC} + \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\overrightarrow{OD}$$

$$\overrightarrow{PQ} = (a-1)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{1}{\boxed{\text{オ}}} - \boxed{\text{カ}}\right)\overrightarrow{OC} + \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\overrightarrow{OD}$$

である。

線分 PQ の長さは，$a = \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{サシ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ をとる。

第 4 問（選択問題）

解答解説のページへ

この問題では，複素数の偏角はすべて $0°$ 以上 $360°$ 未満とする。

$\alpha = 2\sqrt{2}(1+i)$ とし，等式

$$|z-\alpha| = 2$$

を満たす複素数 z を考える。

(1)　z の中で絶対値が最大となるものは

$$\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}\,(\boxed{\text{ウ}}+i)$$

である。

(2)　z の中で偏角が最大となるものを β とおくと，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ の絶対値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$ で，偏角は $\boxed{\text{カキ}}°$ である。また

$$\beta = \frac{\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}-\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}} + \frac{\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}+\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}\,i$$

である。さらに，β の偏角は $\boxed{\text{タチ}}°$ である。

$1 \leqq n \leqq 100$ の範囲で，β^n が実数になる整数 n は $\boxed{\text{ツ}}$ 個ある。

第 5 問（選択問題）

解答解説のページへ

[1] 円いテーブルのまわりに 12 個の席がある。そこに二人が座るとき，その二人の間にある席の数のうち少ない方を X として確率変数 X を定める。ただし，二人の間にある席の数が同数の場合には，その数を X とする。このとき

$$P(X=0)=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}},\quad P(X=1)=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}},\quad P(X=5)=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$$

である。

期待値（平均）は $E(X)=\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ であり，分散は $V(X)=\dfrac{\boxed{\text{セソタ}}}{\boxed{\text{チツテ}}}$ である。

[2] $a,\ b$ を 4 以上の整数とし，a 個の席のある円いテーブルと b 個の席のある円いテーブルがある。そこに二人が座るとき，二人がそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ でどちらかのテーブルを選んで座るものとする。二人が同じテーブルでとなりあって座る確率を $p(a,\ b)$ とする。

いつ $p(a,\ b)=\dfrac{1}{14}$ となるかを調べてみよう。$p(a,\ b)=\dfrac{1}{14}$ を変形すると

$$(a-\boxed{\text{ト}})(b-\boxed{\text{ナ}})=\boxed{\text{ニヌ}}$$

となる。

したがって，$a=b$ ならば $a=\boxed{\text{ネノ}}$ のとき，$p(a,\ b)=\dfrac{1}{14}$ となる。

また，$a>b$ ならば $a=\boxed{\text{ハヒ}}$，$b=\boxed{\text{フ}}$ のとき，$p(a,\ b)=\dfrac{1}{14}$ となる。

第 6 問（選択問題）

解答解説のページへ

100 未満の正の整数 a に対して，正の整数 x, y で

$$\frac{2}{a}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\quad x \leqq y$$

を満たすもののうち y をすべて求めるプログラムを作った。ただし，INT(X)は X を越えない最大の整数を表す関数とする。

```
110  INPUT "a=";A
120  B=INT(A/2+1)
130  FOR X=B TO A
140      Y=[    ]
150      IF Y=INT(Y) THEN PRINT "y=";Y
160  NEXT X
170  END
```

このプログラムにおいて，行番号 140 の行の$\boxed{}$内は次の①の右辺に対応した式を書くものとする。

(1)　y を x の式で表すと

$$y=\frac{\boxed{ア}x}{\boxed{イ}x-\boxed{ウ}}\quad\cdots\cdots\cdots①$$

となる。

(2)　a=? に対して 7 を入力したとき y=$\boxed{エオ}$および y=$\boxed{カ}$がこの順に表示される。このとき，各 y に対応した x はそれぞれ$\boxed{キ}$と$\boxed{ク}$である。

(3)　a=? に対して 12 を入力したとき y=$\boxed{ケコ}$, y=$\boxed{サシ}$, y=$\boxed{スセ}$,
y=$\boxed{ソタ}$，y=$\boxed{チツ}$がこの順に表示される。

第１問　[1]

問題のページへ

$5\cdot 2^{-x}+2^{x+3}=2a$……①より，$5\cdot\dfrac{1}{2^x}+8\cdot 2^x=2a$

$2^x=t$ とおくと，$\dfrac{5}{t}+8t=2a$，変形して，$t^2-\dfrac{a}{4}t+\dfrac{5}{8}=0$……②

$$\left(t-\frac{a}{8}\right)^2-\frac{a^2}{64}+\frac{5}{8}=0,\ \left(t-\frac{a}{8}\right)^2+\frac{40-a^2}{64}=0$$

$\left(t-\dfrac{a}{8}\right)^2=\dfrac{a^2-40}{64}$ として，②が２個の解をもつのは $a^2-40>0$ のときである。

すなわち，$a>0$ から，$a>2\sqrt{10}$

また，$a=2\sqrt{10}$ のとき，②は重解 $t=\dfrac{a}{8}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$ をもつ。

このとき，$2^x=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$，$x=\log_2\dfrac{\sqrt{10}}{4}=\dfrac{1}{2}\log_2(2\cdot 5)-2\log_2 2=\dfrac{1}{2}(\log_2 5-3)$

[解 説]

難易としては，基本事項の確認程度ですが，不適切な設問が入っています。

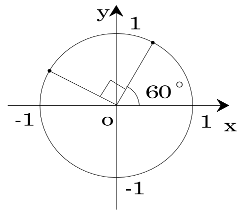
したがって，$a>\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}$ のとき方程式②は２個の解をもつというところです。この表現の意味するところについては，２つの解釈が考えられます。１つは，考えるべきなのは２次方程式②だけであり，その元となっている指数方程式①は考慮しなくてよいという解釈であり，もう１つは，やはり元の指数方程式①から考え，$2^x=t>0$ から２次方程式②が正の２解をもつという解釈です。結果としては，$a>0$ のためどちらの解釈でも同じ結論になりますが，題意が不明瞭と言わざるを得ません。それとも「方程式②は２個の解をもつ」は「方程式①は２個の解をもつ」の出題ミスなのでしょうか。こう考えた方がスッキリします。というのも，こうすると虚数解については考慮しなくてもよいことになりますので。

さらに，「方程式は２個の解をもつ」というときは，その２個に重解の場合を含むというのが普通の立場なのですが，ここではそうなっていません。それは答の形式が，$a>$ ……となっていて，$a\geqq$ ……となっていないからです。問題文を「方程式は異なる２個の解をもつ」と書き換えなくては，首尾一貫とは言えません。この点も「問題」です。

このように次々と疑問の湧いてくる本問は，いままでのセンター試験ではあまり見られなかったような雑な出題となっており，「玉」ではなく「石」と言ってもよい内容です。

第1問　[2]

問題のページへ



(1)　$f(60°) = \sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{2} + \sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$

(2)　$f(\theta) = \sqrt{2}\sin\theta + \sqrt{6}\cos\theta = 2\sqrt{2}\sin(\theta + 60°)$

$0° \leqq \theta \leqq 90°$ より，$60° \leqq \theta + 60° \leqq 150°$

これより，$\theta + 60° = 150°$，すなわち，$\theta = 90°$ のとき，
$f(\theta)$ は最小値 $f(90°) = \sqrt{6}\cdot 0 + \sqrt{2}\cdot 1 = \sqrt{2}$ をとる。

(3)　$g(\theta) = \sqrt{2}(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta) = \sqrt{2}\cdot 2\left(\cos\theta\cdot\dfrac{1}{2} - \sin\theta\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ここで，$\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$，$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす α として，$\alpha = 60°$ がとれるので，

$$g(\theta) = 2\sqrt{2}(\cos\theta\cos 60° - \sin\theta\sin 60°) = 2\sqrt{2}\cos(\theta + 60°)$$

とくに，$g(\theta) = -\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$ ならば，$2\sqrt{2}\cos(\theta + 60°) = -\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$，$\cos(\theta + 60°) = -\dfrac{4}{5}$

$60° \leqq \theta + 60° \leqq 150°$ より，$\sin(\theta + 60°) > 0$ から，

$$\sin(\theta + 60°) = \sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

(2)より，$f(\theta) = 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{3}{5} = \dfrac{6\sqrt{2}}{5}$

このとき，$f(\theta) = \sqrt{6}\cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta = \dfrac{6\sqrt{2}}{5}$……①

$$g(\theta) = \sqrt{2}\cos\theta - \sqrt{6}\sin\theta = -\frac{8\sqrt{2}}{5}\text{……②}$$

①$\times\sqrt{2}$ − ②$\times\sqrt{6}$ より，

$$(2+6)\sin\theta = \frac{6\cdot 2}{5} + \frac{8\cdot 2\sqrt{3}}{5}\text{，よって，}\sin\theta = \frac{3+4\sqrt{3}}{10}$$

［解 説］

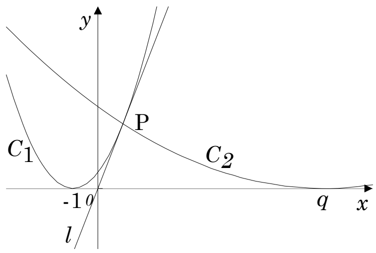
(1)　これは数値計算だけです。

(2)　三角関数の合成の問題です。上の解では普通にサインで合成しています。コサインの方でも構いませんが，そうすると次の(3)が途中からしんどくなってしまいます。

(3)　コサインでの合成がまず出てきます。サインでの合成と同じように加法定理をもとに変形すればよいのですが，サインでの合成を機械的に暗記していただけでは，てこずってしまいます。知識の隙間をねらった問題です。なお，これができれば，後は誘導に乗っていけます。

第 2 問

問題のページへ



(1)　$C_1 : y = k(x+1)^2 \cdots\cdots$ ①，$l : y = 2ax \cdots\cdots$ ②として，

①と②が接することより，

$$k(x+1)^2 = 2ax$$

$$kx^2 + 2(k-a)x + k = 0 \cdots\cdots ③$$

③が重解をもつことより，

$$D/4 = (k-a)^2 - k^2 = 0，\ a>0 \text{より，} k = \frac{a}{2}$$

このとき，接点 P の x 座標は，③より $x = -\dfrac{k-a}{k} = -\left(1 - \dfrac{a}{k}\right) = -1 + a\cdot\dfrac{2}{a} = 1$

②より，$y = 2a$ なので，P$(1,\ 2a)$，また $C_1 : y = \dfrac{a}{2}(x+1)^2 \cdots\cdots$ ①′

次に，$C_2 : y = p(x-q)^2 \cdots\cdots$ ④の P における接線と②が直交することより，

C_2 の P における接線の傾きは $\dfrac{-1}{2a}$，また④から $y' = 2p(x-q) \cdots\cdots$ ⑤

C_2 は $x = 1$ のとき，$y = 2a$ なので，④から，$2a = p(1-q)^2 \cdots\cdots$ ⑥

C_2 は $x = 1$ のとき，$y' = \dfrac{-1}{2a}$ なので，⑤から，$\dfrac{-1}{2a} = 2p(1-q) \cdots\cdots$ ⑦

⑦より，$1 - q = \dfrac{-1}{4ap}$，⑥に代入して，$2a = p\cdot\dfrac{1}{16a^2p^2}$，$p = \dfrac{1}{32a^3}$

また，⑦より $q = 1 + \dfrac{1}{4ap} = 1 + \dfrac{1}{4a\cdot\dfrac{1}{32a^3}} = 1 + 8a^2$

(2)　(1)より，$C_1 : y = \dfrac{a}{2}(x+1)^2$，$C_2 : y = \dfrac{1}{32a^3}(x-q)^2$　$(q = 1 + 8a^2)$

$$S_1 = \int_{-1}^{1} \frac{a}{2}(x+1)^2 dx = \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{3}\Big[(x+1)^3\Big]_{-1}^{1} = \frac{a}{6}\cdot 2^3 = \frac{4}{3}a$$

$$S_2 = \int_{1}^{q} \frac{1}{32a^3}(x-q)^2 dx = \frac{1}{32a^3}\cdot\frac{1}{3}\Big[(x-q)^3\Big]_{1}^{q} = \frac{1}{96a^3}(q-1)^3 = \frac{16}{3}a^3$$

したがって，$3S_1 = S_2$ となるのは，$3\cdot\dfrac{4}{3}a = \dfrac{16}{3}a^3$，$a>0$ より，$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

［解　説］

(1)　上の解の⑤を導くところは，数学Ⅲの範囲の公式です。これを用いなくてもできますが，計算の方向性が見えにくくなります。

(2)　(1)と同じく，積分計算で数学Ⅲの範囲の公式を用いています。ただ(1)と異なり，(2)では，時間内（18 分）に最後の設問の答まで行き着くにはどうしてもこの公式を利用せざるを得ません。本問もまた規制緩和の 1 つとなっています。

第 3 問

問題のページへ

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=1\cdot1\cdot\cos 90^\circ=0\cdots\cdots$①, $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=1\cdot1\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}\cdots\cdots$②

また, $\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OP}=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})-\dfrac{1}{3}(2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE})$

$$=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}-\frac{2}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})-\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})=-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}$$

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PG}+a\overrightarrow{GE}=-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}+a\overrightarrow{CA}$$

$$=-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}+a(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})=(a-1)\overrightarrow{OA}+\left(\frac{1}{3}-a\right)\overrightarrow{OC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}$$

ここで, $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OD}|=1\cdots\cdots$③, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=0\cdots\cdots$④

①〜④を用いて,

$$|\overrightarrow{PQ}|^2=(a-1)^2|\overrightarrow{OA}|^2+\left(\frac{1}{3}-a\right)^2|\overrightarrow{OC}|^2+\frac{4}{9}|\overrightarrow{OD}|^2+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}-a\right)\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$$

$$=(a-1)^2+\left(\frac{1}{3}-a\right)^2+\frac{4}{9}+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}-a\right)\cdot\frac{1}{2}=2a^2-\frac{10}{3}a+\frac{16}{9}$$

すると, $|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{2a^2-\dfrac{10}{3}a+\dfrac{16}{9}}=\sqrt{2\left(a-\dfrac{5}{6}\right)^2+\dfrac{7}{18}}$ から,

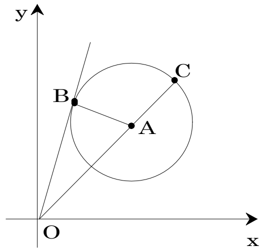
$a=\dfrac{5}{6}$ のとき, $|\overrightarrow{PQ}|$ は最小値 $\sqrt{\dfrac{7}{18}}=\dfrac{\sqrt{14}}{6}$ をとる。

［解 説］

空間ベクトルの内容で, うまく誘導がついています。この誘導に乗っていけば, 最後の設問が少々計算が複雑ですが, 12 分間で完答できる内容となっています。数学Ⅰ・数学 A の第 4 問のようなオーソドックスな出題です。

第 4 問

問題のページへ



(1)　原点 O と点 A(α)との距離は,

$$\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=4$$

点 A(α)を中心とし，半径 2 の円周上にある点で，
点 O との距離が最大になるものを C(γ)とすると，

$$|\gamma|=|\alpha|+2=4+2=6,\ \arg\gamma=\arg\alpha=45^\circ$$

$$\gamma=6(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)=3\sqrt{2}(1+i)$$

(2)　偏角が最大となる点を B(β)とすると，

$\mathrm{OA}=4$，$\mathrm{AB}=2$，$\angle\mathrm{ABO}=90^\circ$ より，

$$\sin\angle\mathrm{AOB}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\ \angle\mathrm{AOB}=30^\circ,\ \mathrm{OB}=2\sqrt{3}$$

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|=\frac{|\beta|}{|\alpha|}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \arg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=\arg\beta-\arg\alpha=30^\circ$$

これより，$\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}+i)$

$$\beta=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}+i)\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}+i)\cdot 2\sqrt{2}(1+i)=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}+\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}i$$

また，$\arg\beta=\arg\alpha+30^\circ=45^\circ+30^\circ=75^\circ$，これより，$\arg\beta^n=75^\circ\times n$

β^n が実数となるのは，偏角が $180^\circ\times m$（m は整数）のときなので，

$$75^\circ\times n=180^\circ\times m,\ 5n=12m$$

5 と 12 は互いに素なので，$m=5k$，$n=12k$（k は整数）と表せる。

$$1\leqq n\leqq 100 \text{ より，} 1\leqq 12k\leqq 100,\ \frac{1}{12}\leqq k\leqq 8+\frac{1}{3}$$

k は整数なので，$k=1,\ 2,\cdots\cdots,8$ となり，求める n の個数は 8 である。

［解 説］

(1)　絶対値が最大となる複素数を，図形的に考えられるかどうかが問われています。昨年のセンター試験の問題よりはかなり難しくなっています。

(2)　偏角が最大となる複素数を求めるもので，(1)と同じく，計算だけで押し通していくのではなく，円と接線の関係を利用し，図形的な処理をするものです。さらに，最後の設問で，ド・モアブルの定理や整数問題が絡み合って複雑さが増しています。そのため本問は，2 次試験レベルの問題といっても差し支えありません。なお，この第 4 問だけでなく，次の第 5 問，第 6 問に整数問題が出ているのは注目すべきことです。これで教科書には載っていない整数問題が 3 年連続で出題されたことになります。

第5問

問題のページへ

[1] 二人を A, B として, A の位置を固定して考える。すると, B の座り方の 11 通りを同様に確からしいとする。

$X=0$ となるのは, A, B が隣りあって座る場合より, $P(X=0)=\dfrac{2}{11}$

$X=1$ となるのは, A, B が 1 つおいて座る場合より, $P(X=1)=\dfrac{2}{11}$

$X=5$ となるのは, A, B が対面の位置に座る場合より, $P(X=5)=\dfrac{1}{11}$

また $X=2,\ 3,\ 4$ の場合は, $X=0,\ 1$ の場合と同じく,

$$P(X=2)=P(X=3)=P(X=4)=\frac{2}{11}$$

よって, $E(X)=0\times\dfrac{2}{11}+1\times\dfrac{2}{11}+2\times\dfrac{2}{11}+3\times\dfrac{2}{11}+4\times\dfrac{2}{11}+5\times\dfrac{1}{11}=\dfrac{25}{11}$

また, $E(X^2)=0^2\times\dfrac{2}{11}+1^2\times\dfrac{2}{11}+2^2\times\dfrac{2}{11}+3^2\times\dfrac{2}{11}+4^2\times\dfrac{2}{11}+5^2\times\dfrac{1}{11}=\dfrac{85}{11}$

以上より, $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\dfrac{85}{11}-\left(\dfrac{25}{11}\right)^2=\dfrac{310}{121}$

[2] a 個の席のあるテーブルで隣りあって座る確率は, 二人がともにこのテーブルを選んでしかも隣りあう場合より, [1] の結果を用いて,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{2}{a-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a-1}$$

b 個の席のあるテーブルで隣りあって座る確率も同様にして,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{2}{b-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{b-1}$$

これより, $p(a,\ b)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{b-1}$

ここで, $p(a,\ b)=\dfrac{1}{14}$ となるのは, $\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{1}{b-1}=\dfrac{1}{7}$, $\dfrac{(a-1)+(b-1)}{(a-1)(b-1)}=\dfrac{1}{7}$

$$(a-1)(b-1)-7(a-1)-7(b-1)=0$$

$$(a-1-7)(b-1-7)=49,\ (a-8)(b-8)=49$$

したがって, $a=b$ ならば, $(a-8)^2=49$, $a-8=\pm7$, $a\geqq 4$ より, $a=15$

また, $a>b$ ならば, $a-8$, $b-8$ はともに 49 の約数で, $a-8>b-8\geqq -4$ より,

$a-8=49$, $b-8=1$, よって, $a=57$, $b=9$

[解 説]

[1] 個々の確率は簡単に求まりますので, 計算ミスをしないことが肝要です。

[2] [1]の考え方を一部使うものの, 大部分は整数問題です。上の解の式変形が初めてであれば, 誘導に乗っていくことさえも難しいでしょう。

第 6 問

問題のページへ

$0<x\leqq y$ より，$\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{x}$，これから，$\dfrac{2}{a}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{x}$，$x\leqq a$

$y>0$ より，$\dfrac{2}{a}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}>\dfrac{1}{x}$，$2x>a$，$x>\dfrac{a}{2}$, x は整数なので，$x\geqq\left[\dfrac{a}{2}+1\right]$

以上まとめて，$\left[\dfrac{a}{2}+1\right]\leqq x\leqq a$

(1)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{a}$ より，$\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{a}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x-a}{ax}$，$y=\dfrac{ax}{2x-a}$……①

(2)　$a=7$ のとき，$\left[\dfrac{a}{2}+1\right]=4$ より，$4\leqq x\leqq 7$，このとき①より，$y=\dfrac{7x}{2x-7}$

x, y の値の変化を表にすると，

x	4	5	6	7
y	28	$\dfrac{35}{3}$	$\dfrac{42}{5}$	7

表示される y は，順に y=28，y=7 となる。

対応する x は，それぞれ 4 と 7 である。

(3)　$a=12$ のとき，$\left[\dfrac{a}{2}+1\right]=7$ より，$7\leqq x\leqq 12$，このとき①より，

$$y=\frac{12x}{2x-12}=\frac{6x}{x-6}$$

x, y の値の変化を表にすると，

x	7	8	9	10	11	12
y	42	24	18	15	$\dfrac{66}{5}$	12

表示される y は，順に y=42，y=24，y=18，y=15，y=12 となる。

［解　説］

(1)　これはプログラムを読む問題ではなく，単なる式変形です。

(2)　整数問題が題材となっています。これは上の解のようにプログラムを読まなくても，次のような式変形をすれば空所はすべて埋まります。

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{7},\ 2xy-7x-7y=0,\ 4xy-14x-14y=0,\ (2x-7)(2y-7)=49$$

あとは前問の［2］と同様にして, 49 の約数を調べるわけです。

(3)　この問題も(2)と同じく，次のような式変形をしてもよいでしょう。

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6},\ xy-6x-6y=0,\ (x-6)(y-6)=36$$

つまり，コンピュータの問題として出題されながら，それとは無関係に整数問題として解くことができるわけです。