1

解答解説のページへ

2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ について以下の問いに答えよ。ただし, $a<0$ とする。

(1)　$f(x)$ を x で割った余りと $x+1$ で割った余りとが一致しているとする。このとき, $a = b$ になることを示せ。

(2)　(1)の関数が, さらに次の(i), (ii)を満たすとき, $f(x)$ を求めよ。

(i)　曲線 $y = f(x)$ が直線 $y = x$ と接する。

(ii)　曲線 $y = f(x)$ と 3 直線 $y = 0$, $x = -1$, $x = 0$ で囲まれた部分の面積は $\dfrac{5}{6}$ である。

2　　解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$は次の(i), (ii)を満たすとする。

(i)　$a_1=\dfrac{1}{2}$

(ii)　$n\geqq 2$ について，$a_n=\dfrac{2{S_n}^2}{2S_n-1}$

ただし，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ である。

(1)　a_2を求めよ。

(2)　$n\geqq 2$ に対して，S_n を S_{n-1} で表せ。

(3)　S_n を求めよ。

(4)　$n\geqq 2$ に対して，a_n を求めよ。

3

解答解説のページへ

三角形 ABC において，辺 BC 上に点 D があり，$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{CAD} = 30^\circ$ である。$\mathrm{AB} = p$，$\mathrm{AC} = q$ とおく。

(1) AD の長さを p, q で表せ。

(2) $p + q = 1$ を満たすとき，△ABD の面積と△ACD の面積の差の絶対値が最大になる p の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

t は $0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数とし，$\alpha = ti$，$\beta = 1$ とおく。ここで，i は虚数単位である。複素数 γ はその実部と虚部が正であるものとし，複素数平面上で，α，β，γ は正三角形をなすとする。

(1) $\dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ を求めよ。

(2) t が 0 から 1 まで変わるとき，γ が描く図形を図示せよ。

1

問題のページへ

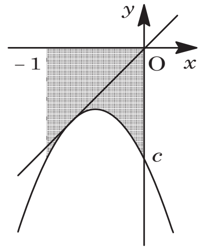
(1)　剰余の定理を利用して，$f(0)=f(-1)$，$c=a-b+c$ から，$a=b$

(2)　(1)より，$f(x)=ax^2+ax+c$

ここで，条件(i)より，$y=f(x)$ と $y=x$ と接するので，

$ax^2+ax+c=x$，$ax^2+(a-1)x+c=0$

$D=(a-1)^2-4ac=0$ ………①



条件(ii)より，$-\int_{-1}^{0}(ax^2+ax+c)\,dx=\dfrac{5}{6}$

$-\left[\dfrac{a}{3}x^3+\dfrac{a}{2}x^2+cx\right]_{-1}^{0}=\dfrac{5}{6}$

$-\dfrac{a}{3}+\dfrac{a}{2}-c=\dfrac{5}{6}$，$c=\dfrac{a}{6}-\dfrac{5}{6}$ ………②

①②より，$(a-1)^2-4a\left(\dfrac{a}{6}-\dfrac{5}{6}\right)=0$，$a^2+4a+3=0$ から，$a=-1,\ -3$

$a=-1$ のとき，②より $c=-1$ となり，$f(x)=-x^2-x-1$

$a=-3$ のとき，②より $c=-\dfrac{4}{3}$ となり，$f(x)=-3x^2-3x-\dfrac{4}{3}$

［解 説］

(1)の条件から，$y=f(x)$ の軸が $x=-\dfrac{1}{2}$ であることを見抜けば，場合分けなしに $f(x)$ が決定できます。

2

問題のページへ

(1) $a_n=\dfrac{2{S_n}^2}{2S_n-1}$ ……①に $n=2$ を代入すると，$a_2=\dfrac{2{S_2}^2}{2S_2-1}=\dfrac{2(a_1+a_2)^2}{2(a_1+a_2)-1}$

$a_1=\dfrac{1}{2}$ より，$2a_2\left(\dfrac{1}{2}+a_2\right)-a_2=2\left(\dfrac{1}{2}+a_2\right)^2$ となり，$a_2=-\dfrac{1}{4}$

(2) $n\geqq 2$ で，$a_n=S_n-S_{n-1}$ より，①から，$\dfrac{2{S_n}^2}{2S_n-1}=S_n-S_{n-1}$

$$2{S_n}^2=(S_n-S_{n-1})(2S_n-1),\ (2S_{n-1}+1)S_n=S_{n-1}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，$S_{n-1}=-\dfrac{1}{2}$ とすると②は不成立なので，$S_n=\dfrac{S_{n-1}}{2S_{n-1}+1}$ ………③

(3) ある n で $S_n=0$ とすると，③より $S_{n-1}=0$ となり，帰納的に $S_1=0$ となるが，これは $S_1=a_1=\dfrac{1}{2}$ に反する。よって，どんな n に対しても $S_n\neq 0$ である。

③より，$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{2S_{n-1}+1}{S_{n-1}}=2+\dfrac{1}{S_{n-1}}$ なので，

$$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{S_1}+2(n-1)=2+2(n-1)=2n,\ S_n=\frac{1}{2n}$$

(4) ①より, $n\geqq 2$ で，$a_n=\dfrac{2\cdot\dfrac{1}{4n^2}}{2\cdot\dfrac{1}{2n}-1}=\dfrac{1}{2n-2n^2}=\dfrac{1}{2n(1-n)}$

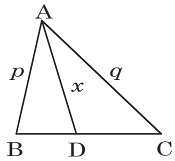
［解 説］

いわゆる和と一般項の関係を用いる問題です。(1)から(3)まで，親切すぎるほどの誘導がついています。

3

問題のページへ

(1)　$\mathrm{AD}=x$ とすると，$\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{ACD}=\triangle\mathrm{ABC}$ となるので，



$$\frac{1}{2}px\sin 30^\circ+\frac{1}{2}qx\sin 30^\circ=\frac{1}{2}pq\sin 60^\circ$$

$$px+qx=\sqrt{3}pq\,,\quad x=\frac{\sqrt{3}pq}{p+q}$$

(2)　$S=\left|\triangle\mathrm{ABD}-\triangle\mathrm{ACD}\right|$ とおくと, (1)より,

$$S=\left|\frac{1}{2}px\sin 30^\circ-\frac{1}{2}qx\sin 30^\circ\right|=\frac{1}{4}\left|p-q\right|x=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\left|pq(p-q)\right|}{p+q}$$

条件より，$q=1-p$ なので，$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left|p(1-p)(2p-1)\right|$

ここで, $0<p<1$ で $f(p)=p(1-p)(2p-1)=-2p^3+3p^2-p$ とすると,

$$f'(p)=-6p^2+6p-1$$

$f'(p)=0$ の解は，$p=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{6}$

この解を $p=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと,

p	0	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	1
$f'(p)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(p)$	0	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0

$0<\alpha<\beta<1$ となり，$f(p)$ の増減は上表のようになる。

さて，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$ であり，$f(1-p)=(1-p)p(1-2p)=-f(p)$ より，$y=f(p)$ のグラフは点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ に関して対称となり，$-f(\alpha)=f(\beta)$ である。

すると，$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left|f(p)\right|$ のグラフは，直線 $p=\dfrac{1}{2}$ に関して対称となるので，S の最大値は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left|f(\alpha)\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left|f(\beta)\right|$ である。

したがって, S が最大となる p は $p=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{6}$ となる。

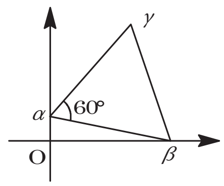
[解 説]

S の最大値は求める必要がないので, 対称性を利用した解を書きました。もし最大値を求めるのであれば，$f(p)$ を $f'(p)$ で割った余りを利用します。

4

問題のページへ

(1)　条件より，点γは，点αを中心として点βを$60°$回転した点なので，

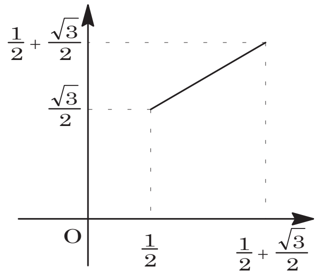


$$\gamma-\alpha=(\cos 60°+i\sin 60°)(\beta-\alpha)$$

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos 60°+i\sin 60°=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(2)　(1)より，$\gamma=\alpha+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\beta-\alpha)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}t+\left(\frac{t}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+t\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$



すると，$t=0$のとき$\gamma_0=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$t=1$のとき$\gamma_1=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$から，$0\leqq t\leqq 1$のとき，点$\gamma$は両端点が$\gamma_0$，$\gamma_1$となる線分を描く。

［解　説］

複素数平面における直線のパラメータ表示が題材となっています。基本事項を確認するための問題です。