

解答解説のページへ

1

数列 $\{a_n\}$ は次の (i), (ii) を満たすとする。

(i) $a_1 = \frac{1}{2}$

(ii) $n \geq 2$ について, $a_n = \frac{2S_n^2}{2S_n - 1}$

ただし, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ である。

- (1) a_2 を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ に対して, S_n を S_{n-1} で表せ。
- (3) S_n を求めよ。
- (4) $n \geq 2$ に対して, a_n を求めよ。

2

解答解説のページへ

座標空間内の 6 点 $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, 1)$, $C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$, $D(0, 0, 0)$, $E(1, 0, 0)$, $F\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ がある。動点 P は A を出発し, B, C, A の順に $\triangle ABC$ の周を一定の速さで一周する。 P と同時に動点 Q は E を出発し, F, D, E の順に $\triangle DEF$ の周を P と同じ速さで一周する。線分 PQ が動いて作られる図形と $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ によって囲まれる立体を K とする。

- (1) $AP = t$ ($0 \leq t \leq 1$) のとき, 点 Q の座標を t で表せ。
- (2) (1) の P, Q に対して, 線分 PQ と平面 $z = a$ ($0 \leq a \leq 1$) との交点 $R(t)$ の座標を求めよ。
- (3) 平面 $z = a$ ($0 \leq a \leq 1$) による K の切り口の面積 $S(a)$ を求めよ。
- (4) K の体積 V を求めよ。

3

解答解説のページへ

長さ 1 の棒 PQ が座標平面上にある。P は $A(1, 0)$ から出発し、 x 軸上を原点 O まで動き、 Q は O を出発し、 $B(0, 1)$ まで y 軸上を動く。この棒の上に動点 R があり、つねに $PR = AP$ であるとする。

- (1) $\angle OQP = \theta$ としたとき、 R の座標を θ で表せ。
- (2) R が動いてできる曲線と x 軸、 y 軸によって囲まれる図形の面積を求めよ。

4

解答解説のページへ

行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ を X とし, $\begin{pmatrix} 2.1 & 1 \\ -4 & -1.9 \end{pmatrix}$ の逆行列を A とする。

- (1) X^2 を計算せよ。
- (2) A を $pE + qX$ の形で表せ。ただし, E は単位行列とし, p, q は実数とする。
- (3) A^n の 4 つの成分のうちの最大のものが 10^{10} を超える最小の自然数 n を求めよ。

5

解答解説のページへ

s, t は $0 < s < 1, 0 < t < 1$ を満たす実数とし, $\alpha = si, \beta = t$ とおく。ここで, i は虚数単位である。複素数 γ は実部と虚部が正であるものとし, 複素数平面上で, α, β, γ は正三角形をなすとする。

- (1) $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ を求めよ。
- (2) s, t が上記の範囲を動くとき, γ が描く図形を図示せよ。

1

問題のページへ

$$(1) a_n = \frac{2S_n^2}{2S_n - 1} \cdots \cdots \textcircled{1} \text{に } n = 2 \text{ を代入すると, } a_2 = \frac{2S_2^2}{2S_2 - 1} = \frac{2(a_1 + a_2)^2}{2(a_1 + a_2) - 1}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \text{ より, } 2a_2 \left(\frac{1}{2} + a_2 \right) - a_2 = 2 \left(\frac{1}{2} + a_2 \right)^2 \text{ となり, } a_2 = -\frac{1}{4}$$

$$(2) n \geq 2 \text{ で, } a_n = S_n - S_{n-1} \text{ より, } \textcircled{1} \text{ から, } \frac{2S_n^2}{2S_n - 1} = S_n - S_{n-1}$$

$$2S_n^2 = (S_n - S_{n-1})(2S_n - 1), (2S_{n-1} + 1)S_n = S_{n-1} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{ここで, } S_{n-1} = -\frac{1}{2} \text{ とすると } \textcircled{2} \text{ は不成立なので, } S_n = \frac{S_{n-1}}{2S_{n-1} + 1} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

(3) ある n で $S_n = 0$ とすると, $\textcircled{3}$ より $S_{n-1} = 0$ となり, 帰納的に $S_1 = 0$ となるが, これは $S_1 = a_1 = \frac{1}{2}$ に反する。よって, どんな n に対しても $S_n \neq 0$ である。

$$\textcircled{3} \text{ より, } \frac{1}{S_n} = \frac{2S_{n-1} + 1}{S_{n-1}} = 2 + \frac{1}{S_{n-1}} \text{ なので,}$$

$$\frac{1}{S_n} = \frac{1}{S_1} + 2(n-1) = 2 + 2(n-1) = 2n, S_n = \frac{1}{2n}$$

$$(4) \textcircled{1} \text{ より, } n \geq 2 \text{ で, } a_n = \frac{2 \cdot \frac{1}{4n^2}}{2 \cdot \frac{1}{2n} - 1} = \frac{1}{2n - 2n^2} = \frac{1}{2n(1-n)}$$

[解説]

いわゆる和と一般項の関係を用いる問題です。(1)から(3)まで, 親切すぎるほどの誘導がついています。

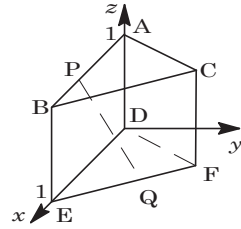
2

問題のページへ

- (1) $\triangle ABC$ および $\triangle DEF$ は 1 辺の長さが 1 の正三角形であり、 $AP = t$ のとき $EQ = t$ となるので、点 Q は EF を $t : 1-t$ に内分する。

$$\overrightarrow{OQ} = (1-t)\overrightarrow{OE} + t\overrightarrow{OF} = \left(1 - \frac{1}{2}t, \frac{\sqrt{3}}{2}t, 0\right)$$

よって、点 $Q\left(1 - \frac{1}{2}t, \frac{\sqrt{3}}{2}t, 0\right)$ となる。



- (2) 条件より $P(t, 0, 1)$ となり、線分 PQ を $1-a : a$ に内分する点が $R(t)$ なので、

$$\overrightarrow{OR}(t) = a\overrightarrow{OP} + (1-a)\overrightarrow{OQ} = \left(1-a + \frac{1}{2}(3a-1)t, \frac{\sqrt{3}}{2}(1-a)t, a\right)$$

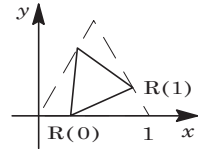
よって、点 $R(t)\left(1-a + \frac{1}{2}(3a-1)t, \frac{\sqrt{3}}{2}(1-a)t, a\right)$ となる。

- (3) (2)より、 $\overrightarrow{OR}(t) = (1-a, 0, a) + \frac{t}{2}(3a-1, \sqrt{3}(1-a), 0)$

これより、点 $R(t)$ は平面 $z = a$ 上で、点 $(1-a, 0, a)$ を通り、方向ベクトル $(3a-1, \sqrt{3}(1-a), 0)$ の直線を描く。

ここで、 $\overrightarrow{OR}(0) = (1-a, 0, a)$ 、 $\overrightarrow{OR}(1) = \left(\frac{a+1}{2}, \frac{\sqrt{3}(1-a)}{2}, a\right)$ となり、 $0 \leq t \leq 1$ のとき点 $R(t)$ は 2 点 $R(0)$ 、 $R(1)$ を両端点とする線分を描く。

さて、点 P が BC 上で点 Q が FD 上のとき、および点 P が CA 上で点 Q が DE 上のときも同様に考えると、平面 $z = a$ による K の切り口は、1 辺の長さが $R(0)R(1)$ の正三角形となる。



$$\{R(0)R(1)\}^2 = \left\{\frac{a+1}{2} - (1-a)\right\}^2 + \left\{\frac{\sqrt{3}(1-a)}{2}\right\}^2 = 3a^2 - 3a + 1$$

よって、 $S(a) = \frac{1}{2}\{R(0)R(1)\}^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}(3a^2 - 3a + 1)$

- (4) (3)より、 $V = \int_0^1 S(a) da = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^1 (3a^2 - 3a + 1) da = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[a^3 - \frac{3}{2}a^2 + a \right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{8}$

[解説]

本問は、数年前までは頻出問題の 1 つでした。記憶を辿って調べたところ、86 年京大で、文理共通問題として全く同じ問題が出ていました。現行課程では消滅したと思って、作成したテキストなどからは削除していたのですが。

3

問題のページへ

(1) $PQ = 1$ より, $OP = \sin \theta$, $OQ = \cos \theta$, $AP = 1 - \sin \theta$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OP} + (1 - \sin \theta) \overrightarrow{PQ} \\ &= (\sin \theta, 0) + (1 - \sin \theta)(-\sin \theta, \cos \theta) \\ &= (\sin^2 \theta, (1 - \sin \theta) \cos \theta)\end{aligned}$$

よって, $R(\sin^2 \theta, (1 - \sin \theta) \cos \theta)$ となる。(2) (1)より, 点 $R(x, y)$ の軌跡をパラメータ表示すると,

$$x = \sin^2 \theta, \quad y = (1 - \sin \theta) \cos \theta \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

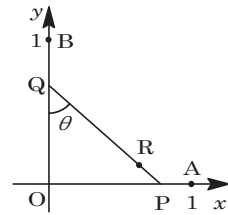
この曲線と x 軸, y 軸によって囲まれる図形の面積を S とすると,

$$\begin{aligned}S &= \int_0^1 y dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) \cos \theta \cdot 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta) d\theta\end{aligned}$$

$$\text{ここで, } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = -\frac{1}{3} [\cos^3 \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3} \cdot (-1) = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\theta) d\theta = \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16}$$

$$\text{よって, } S = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16} \right) = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{8}$$



[解説]

パラメータ曲線ではさまれた領域の面積を求めるという問題です。文中の誘導を利用すれば、スムーズに値が求まります。

4

問題のページへ

$$(1) X^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) B = \begin{pmatrix} 2.1 & 1 \\ -4 & -1.9 \end{pmatrix} \text{ とすると, } |B| = 2.1 \times (-1.9) - 1 \times (-4) = 0.01 \text{ なので,}$$

$$A = B^{-1} = \frac{1}{0.01} \begin{pmatrix} -1.9 & -1 \\ 4 & 2.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -190 & -100 \\ 400 & 210 \end{pmatrix} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } A = pE + qX = p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{ より, } q = -100, p = 10 \text{ となり, } A = 10E - 100X$$

(3) (1)より, $X^2 = O$ なので, $n \geq 2$ で $X^n = O$ となる。

$$\begin{aligned} A^n &= (10E - 100X)^n = 10^n (E - 10X)^n = 10^n (E - {}_n C_1 10X) \\ &= 10^n (E - 10nX) = 10^n \begin{pmatrix} 1 - 20n & -10n \\ 40n & 1 + 20n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

最大の成分を a_n とすると, $a_n = 10^n \cdot 40n = 4n \cdot 10^{n+1}$

$$a_7 = 28 \times 10^8 = 2.8 \times 10^9, a_8 = 32 \times 10^9 = 3.2 \times 10^{10}$$

よって, a_n が 10^{10} を超える最小の自然数 n は 8 である。

[解説]

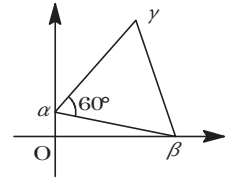
いかにも計算がややこしそうな小数成分の行列が題材となっています。しかし、逆行列を求めた途端、それは杞憂にすぎないことがわかりました。

5

問題のページへ

- (1) 条件より, 点 γ は, 点 α を中心として点 β を 60° 回転した点
 なので,

$$\begin{aligned} \gamma - \alpha &= (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)(\beta - \alpha) \\ \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} &= \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$



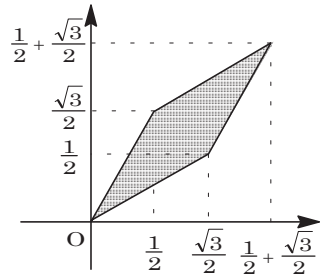
- (2) (1)より, $\gamma = \alpha + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\beta - \alpha) = si + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(t - si)$
 $= \left(\frac{1}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2}s\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{2}s\right)i = s\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + t\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

ここで, $(s, t) = (0, 0)$ のとき $\gamma = 0$, $(s, t) = (1, 0)$ のとき $\gamma_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$,

$(s, t) = (0, 1)$ のとき $\gamma_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $(s, t) = (1, 1)$

のとき $\gamma_3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$

すると, $0 < s < 1, 0 < t < 1$ から, 点 γ は線分 $O\gamma_1$, 線分 $O\gamma_2$ を隣りあう 2 辺とするひし形 $O\gamma_1\gamma_3\gamma_2$ の内部を描き, 図示すると右図の網点部ようになる。なお, 境界は領域に含まない。



[解説]

文系に類題が出題されています。理系の本問では, 独立に変化するパラメータが 2 つあるので, 点 γ が動いてできる図形は 2 次元的な広がりを持ちます。