1

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1) n を自然数とする。このとき，n^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 であることを証明せよ。

(2) 3 つの自然数 a, b, c が，$a^2 + b^2 = c^2$ を満たしている。このとき，a, b の少なくとも一方は偶数であることを証明せよ。

2

解答解説のページへ

実数 a に対して，$f(x)=ax^2-2ax+a^2+1$ とおく。

(1) 定積分 $I(a)=\int_1^2 f(x)\,dx$ を a を用いて表せ。

(2) $f(x)$ が条件 $f(1)\leqq 1$ を満たすような a の範囲を求めよ。

(3) a が(2)の範囲を動くとき，$I(a)$ の最大値および最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ

a, b を整数とする。3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+2bx$ が, $0<x<2$ の範囲で極大値と極小値をもつとき, a, b の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

iを虚数単位とし，複素数zに共役な複素数を$\overline{z}$で表す。

(1)　aを実数の定数とする。条件$1-\overline{z}=(a+i)(z-\overline{z})$を満たす複素数平面上の点$z$の全体が直線であるとき，$a$の値を求めよ。

(2)　実軸上にない複素数αに対して，3 点0，1，αを通る複素数平面上の円の中心をβとする。このとき，βをαと$\overline{\alpha}$を用いて表せ。

(3)　α，βを(2)の複素数とする。点αが(1)の直線上を動くとき，$\dfrac{\beta}{\alpha}$は一定であることを証明せよ。

1

問題のページへ

(1)　n を偶数と奇数で分類する。

(i)　$n=2k\ (k\geqq 1)$ のとき

$n^2=4k^2$ より，n^2 を 4 で割った余りは 0 である。

(ii)　$n=2k-1\ (k\geqq 1)$ のとき

$n^2=4k^2-4k+1=4(k^2-k)+1$ より，n^2 を 4 で割った余りは 1 である。

(i)(ii)より，n^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 である。

(2)　$a^2+b^2=c^2$ において, $a,\ b$ がともに奇数と仮定する。

すると，(1)より，左辺の a^2+b^2 を 4 で割った余りは $1+1=2$ である。しかし，右辺の c^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 である。

よって，$a^2+b^2=c^2$ は成立しない。

以上より, $a,\ b$ の少なくとも一方は偶数である。

［解 説］

整数の余りによる分類という分野の基本問題です。(2)も(1)の誘導があるため，方針はすぐに決まります。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$I(a)=\int_1^2 (ax^2-2ax+a^2+1)\,dx=\Big[\frac{a}{3}x^3-ax^2+(a^2+1)x\Big]_1^2$

$=\frac{7a}{3}-3a+a^2+1=a^2-\frac{2}{3}a+1$

(2)　$f(1)=a-2a+a^2+1=a^2-a+1$ なので，$f(1)\leqq 1$ より，$a^2-a+1\leqq 1$

$a^2-a\leqq 0$，$0\leqq a\leqq 1$

(3)　(1)より，$I(a)=\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}$

すると，(2)より $0\leqq a\leqq 1$ なので，$I(a)$ の最大値は $I(1)=\frac{4}{3}$ であり，最小値は $I\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{9}$ である。

［解　説］

計算がすべてという超基本レベルの問題です。

3

問題のページへ

$f(x)=x^3+ax^2+2bx$ より，$f'(x)=3x^2+2ax+2b$

3 次関数 $f(x)$ が $0<x<2$ の範囲に極大値と極小値をもつ条件は，2 次方程式 $f'(x)=0$ が $0<x<2$ の範囲に異なる 2 実数解をもつ条件に一致する。

まず，$f'(x)=0$ の判別式 $D>0$ より，$a^2-6b>0$，$b<\frac{1}{6}a^2$ ………①

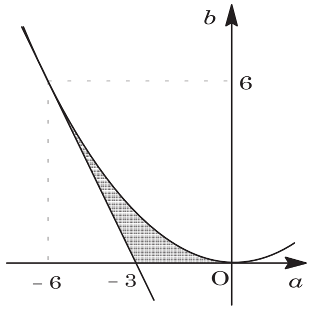
$y=f'(x)$ のグラフの軸が $x=-\frac{a}{3}$ より，

$0<-\frac{a}{3}<2$，$-6<a<0$ ………②

また，$f'(0)=2b>0$ より，$b>0$ ………③

$f'(2)=12+4a+2b>0$ より，$b>-2a-6$ ………④

①～④を満たす領域を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は含まない。



条件より，a，b は整数なので，この領域内の格子点が求める a, b の値となる。

よって，$(a,\ b)=(-3,\ 1)$ である。

［解 説］

①から④までの不等式は，簡単に求められます。しかし，この不等式を a，b 平面上に図示して，領域内の格子点をさがす過程には時間がかかります。上の解ではその記述を省略しましたが。

4

問題のページへ

(1) x, y を実数として，$z = x + yi$ とおくと，$1 - \overline{z} = (\alpha + i)(z - \overline{z})$ より，

$$1 - (x - yi) = (\alpha + i) \cdot 2yi,\ 1 - x + yi = -2y + 2\alpha yi$$

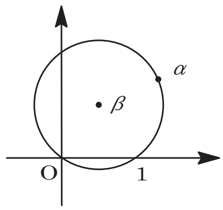
よって，$1 - x = -2y$ ……①，$y = 2\alpha y$ ……②

②より，$(2\alpha - 1)y = 0$

$y = 0$ のとき，①より $x = 1$ となり, z は 1 点だけを表すので不適である。

よって，$y \neq 0$ より $\alpha = \dfrac{1}{2}$ となり，このとき点 z は①で表される直線を描く。

(2) 条件より，$|\beta| = |\beta - 1|$ ……③，$|\beta| = |\beta - \alpha|$ ……④



③より，$|\beta|^2 = |\beta - 1|^2$，$\beta\overline{\beta} = (\beta - 1)(\overline{\beta} - 1)$

$$\beta + \overline{\beta} = 1 \text{ ………⑤}$$

④より，$|\beta|^2 = |\beta - \alpha|^2$，$\beta\overline{\beta} = (\beta - \alpha)(\overline{\beta} - \overline{\alpha})$

$$\alpha\overline{\alpha} - \beta\overline{\alpha} - \alpha\overline{\beta} = 0 \text{ ………⑥}$$

⑤より $\overline{\beta} = 1 - \beta$ となり，⑥に代入して $\alpha\overline{\alpha} - \beta\overline{\alpha} - \alpha(1 - \beta) = 0$

$$\alpha\overline{\alpha} - \beta\overline{\alpha} - \alpha + \alpha\beta = 0,\ (\alpha - \overline{\alpha})\beta = \alpha(1 - \overline{\alpha})$$

α は実数でないので $\alpha \neq \overline{\alpha}$ となり，$\beta = \dfrac{\alpha(1 - \overline{\alpha})}{\alpha - \overline{\alpha}}$ ………⑦

(3) (1)より，$z = \alpha$ として，$1 - \overline{\alpha} = \left(\dfrac{1}{2} + i\right)(\alpha - \overline{\alpha})$

$$\frac{1 - \overline{\alpha}}{\alpha - \overline{\alpha}} = \frac{1}{2} + i$$

⑦を代入すると，$\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{1}{2} + i$ となり，一定の値をとる。

［解 説］

特別な技巧は必要なく，誘導に従って解いていくことができます。(2)では，共役複素数を利用した解法を考えなさいという出題者の意向が，問題文から伝わってきます。