1

解答解説のページへ

$a,\ b$ を整数とする。3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+2bx$ が，$0<x<2$ の範囲で極大値と極小値をもつとき，$a,\ b$ の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$($a,\ b,\ c,\ d$ は実数)に対して，実数 $f(A)$ を $f(A)=a+d$ で定義する。これについて性質

$$f(A\pm B)=f(A)\pm f(B)\ （複号同順）$$

は証明なしで使ってよい。

(1)　2 次正方行列 $A,\ B$ に対して，$f(AB)=f(BA)$ を証明せよ。

(2)　2 次正方行列 $P,\ Q$ が $P=PQ-QP$ を満たしているとする。このとき $f(P)=0$ を証明せよ。

(3)　(2)の P に対して，$f(P^2)=0$ を証明せよ。

(4)　(2)の P に対して，$P^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を証明せよ。

3

解答解説のページへ

Cは，2次関数$y=x^2$のグラフを平行移動した放物線で，頂点が円$x^2+(y-2)^2=1$上にある。原点からCに引いた接線で傾きが正のものをlとおく。このとき，Cとlの接点のx座標が最大および最小になるときのCの頂点の座標をそれぞれ求めよ。

4

解答解説のページへ

a, b を実数, e を自然対数の底とする。すべての実数 x に対して $e^x \geqq ax+b$ が成立するとき, 以下の問いに答えよ。

(1) a, b の満たすべき条件を求めよ。

(2) 次の定積分 $\int_0^1 (e^x - ax - b)\,dx$ の最小値と, そのときの a, b の値を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

iを虚数単位とし，複素数zに共役な複素数を$\overline{z}$で表す。

(1) aを実数の定数とする。条件$1-\overline{z}=(a+i)(z-\overline{z})$を満たす複素数平面上の点$z$の全体が直線であるとき，$a$の値を求めよ。

(2) 実軸上にない複素数αに対して，3 点0，1，αを通る複素数平面上の円の中心をβとする。このとき，βをαと$\overline{\alpha}$を用いて表せ。

(3) α，βを(2)の複素数とする。点αが(1)の直線上を動くとき，$\dfrac{\beta}{\alpha}$は一定であることを証明せよ。

1

問題のページへ

$f(x)=x^3+ax^2+2bx$ より，$f'(x)=3x^2+2ax+2b$

3 次関数 $f(x)$ が $0<x<2$ の範囲に極大値と極小値をもつ条件は，2 次方程式 $f'(x)=0$ が $0<x<2$ の範囲に異なる 2 実数解をもつ条件に一致する。

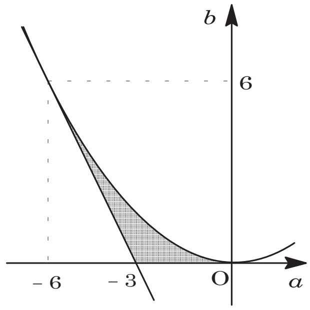
まず，$f'(x)=0$ の判別式 $D>0$ より，$a^2-6b>0$，$b<\dfrac{1}{6}a^2$ ………①

$y=f'(x)$ のグラフの軸が $x=-\dfrac{a}{3}$ より，

$$0<-\frac{a}{3}<2,\ -6<a<0 \text{ ………②}$$

また，$f'(0)=2b>0$ より，$b>0$………③

$f'(2)=12+4a+2b>0$ より，$b>-2a-6$ ………④



①～④を満たす領域を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は含まない。

条件より，a，b は整数なので，この領域内の格子点が求める a, b の値となる。

よって，$(a,\ b)=(-3,\ 1)$ である。

［解 説］

①から④までの不等式は，簡単に求められます。しかし，この不等式を a，b 平面上に図示して，領域内の格子点をさがす過程には時間がかかります。上の解ではその記述を省略しましたが。

2

問題のページへ

(1)　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$とおくと,

$$f(AB)=(ap+br)+(cq+ds),\ f(BA)=(pa+qc)+(rb+sd)$$

よって，$f(AB)=f(BA)$

(2)　$P=PQ-QP$ より，$f(P)=f(PQ-QP)$

条件より，$f(PQ-QP)=f(PQ)-f(QP)$

すると, (1)より $f(PQ)-f(QP)=0$ なので，$f(P)=0$ となる。

(3)　$P^2=P^2Q-PQP$ より, (2)と同様にして,

$$f(P^2)=f(P^2Q-PQP)=f(P^2Q)-f(PQP)=f(P^2Q)-f(P^2Q)=0$$

(4)　$P=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$とおくと，ハミルトン・ケーリーの定理より,

$$P^2-f(P)P+(ad-bc)E=O$$

(2)より $f(P)=0$ なので，$P^2+(ad-bc)E=O$

$$P^2=-(ad-bc)E=-\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

(3)より $f(P^2)=0$ なので，$-2(ad-bc)=0$，$ad-bc=0$

以上より，$P^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$となる。

［解 説］

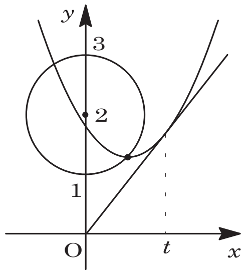
行列のトレースについての問題です。(4)がメインですが, (1)から(3)までのていねいな誘導にのれば，論証の方向性が見えてきます。

3

問題のページへ

$0 \leqq \theta < 2\pi$ として，円 $x^2 + (y-2)^2 = 1$ 上の点を $(\cos\theta,\ \sin\theta + 2)$ とする。

この点が，放物線 $y = x^2$ を平行移動した放物線の頂点とすると，その方程式は，



$$y = (x - \cos\theta)^2 + \sin\theta + 2$$

ここで，接点を $(t,\ (t-\cos\theta)^2 + \sin\theta + 2)\ (t > 0)$ とおく。

すると，$y' = 2(x - \cos\theta)$ なので，条件より，

$$\frac{(t-\cos\theta)^2 + \sin\theta + 2}{t} = 2(t - \cos\theta)$$

$$(t-\cos\theta)^2 + \sin\theta + 2 = 2t(t - \cos\theta)$$

まとめて，$t^2 = \cos^2\theta + \sin\theta + 2 = -\sin^2\theta + \sin\theta + 3 = -\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$

$t > 0$ より，$t = \sqrt{-\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}}$

$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より，t が最大となるのは $\sin\theta = \frac{1}{2}$ のとき，すなわち $\theta = \frac{\pi}{6}$ または $\theta = \frac{5\pi}{6}$ のときである。このとき頂点の座標は，$\left(\cos\frac{\pi}{6},\ \sin\frac{\pi}{6} + 2\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ または $\left(\cos\frac{5\pi}{6},\ \sin\frac{5\pi}{6} + 2\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ となる。

また，t が最小となるのは $\sin\theta = -1$ のとき，すなわち $\theta = \frac{3\pi}{2}$ のときである。このとき頂点の座標は，$\left(\cos\frac{3\pi}{2},\ \sin\frac{3\pi}{2} + 2\right) = (0,\ 1)$ となる。

［解 説］

円周上の点をパラメータ表示して，放物線の方程式を作りました。なお，最大となる場合が 2 つありましたが，問題文を読んだときには見抜けませんでした。

4　　　　問題のページへ

(1)　$f(x)=e^x-ax-b$ とおくと，$f'(x)=e^x-a$

(i)　$a<0$ のとき

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^x-ax-b)=-\infty$ より，$f(x)\geqq 0$ は，すべての実数 x に対しては成立しない。

(ii)　$a=0$ のとき

$f(x)=e^x-b$ より，すべての実数 x に対して $f(x)\geqq 0$ が成立する条件は，$-b\geqq 0$ すなわち $b\leqq 0$ である。

(iii) $a>0$ のとき

$f'(x)=e^x-a=0$ の解は $x=\log a$ より，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	$\log a$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

よって，すべての実数 x に対して $f(x)\geqq 0$ が成立する条件は，$f(\log a)\geqq 0$ である。

$$e^{\log a}-a\log a-b\geqq 0,\ b\leqq e^{\log a}-a\log a=a(1-\log a)$$

(i)(ii)(iii)より，求める条件は，$a=0$ かつ $b\leqq 0$，または $a>0$ かつ $b\leqq a(1-\log a)$

(2)　$I=\displaystyle\int_0^1(e^x-ax-b)\,dx=\left[e^x-\frac{a}{2}x^2-bx\right]_0^1=e-1-\frac{a}{2}-b$

(i)　$a=0$ かつ $b\leqq 0$ のとき

$I=e-1-b$ より，$b=0$ のとき最小値 $e-1$ をとる。

(ii)　$a>0$ かつ $b\leqq a(1-\log a)$ のとき

$$I=e-1-\frac{a}{2}-b\geqq e-1-\frac{a}{2}-a+a\log a=a\log a-\frac{3}{2}a+e-1$$

ここで，$g(a)=a\log a-\dfrac{3}{2}a+e-1$ とおくと，

$$g'(a)=\log a+1-\frac{3}{2}=\log a-\frac{1}{2}$$

a	0	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$g'(a)$		$-$	0	$+$
$g(a)$		$\searrow$		$\nearrow$

右表より，$a=\sqrt{e}$ のとき最小値をとり，

$$g(\sqrt{e})=e-\sqrt{e}-1$$

すると，このとき $b=\sqrt{e}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{e}}{2}$ であり, I は最小値 $e-\sqrt{e}-1$ をとる。

(i)(ii)より，$a=\sqrt{e}$，$b=\dfrac{\sqrt{e}}{2}$ のとき, I は最小値 $e-\sqrt{e}-1$ をとる。

［解 説］

(2)の(ii)では，まず a を $a>0$ で固定し，b を $b\leqq a(1-\log a)$ の条件のもとで動かして最小となる場合を考え，次にその状態で a を $a>0$ で動かして最小値を求めています。いわゆる 1 文字固定という方法を利用しています。

5

問題のページへ

(1)　x, y を実数として，$z = x + yi$ とおくと，$1 - \overline{z} = (a + i)(z - \overline{z})$ より，

$$1 - (x - yi) = (a + i) \cdot 2yi,\ 1 - x + yi = -2y + 2ayi$$

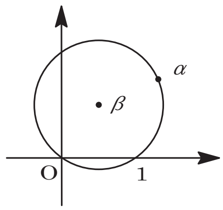
よって，$1 - x = -2y$ ……①，$y = 2ay$ ……②

②より，$(2a - 1)y = 0$

$y = 0$ のとき，①より $x = 1$ となり，z は 1 点だけを表すので不適である。

よって，$y \neq 0$ より $a = \dfrac{1}{2}$ となり，このとき点 z は①で表される直線を描く。

(2)　条件より，$|\beta| = |\beta - 1|$ ……③，$|\beta| = |\beta - \alpha|$ ……④



③より，$|\beta|^2 = |\beta - 1|^2$，$\beta\overline{\beta} = (\beta - 1)(\overline{\beta} - 1)$

$$\beta + \overline{\beta} = 1 \text{ ………⑤}$$

④より，$|\beta|^2 = |\beta - \alpha|^2$，$\beta\overline{\beta} = (\beta - \alpha)(\overline{\beta} - \overline{\alpha})$

$$\alpha\overline{\alpha} - \beta\overline{\alpha} - \alpha\overline{\beta} = 0 \text{ ………⑥}$$

⑤より $\overline{\beta} = 1 - \beta$ となり，⑥に代入して $\alpha\overline{\alpha} - \beta\overline{\alpha} - \alpha(1 - \beta) = 0$

$$\alpha\overline{\alpha} - \beta\overline{\alpha} - \alpha + \alpha\beta = 0,\ (\alpha - \overline{\alpha})\beta = \alpha(1 - \overline{\alpha})$$

α は実数でないので $\alpha \neq \overline{\alpha}$ となり，$\beta = \dfrac{\alpha(1 - \overline{\alpha})}{\alpha - \overline{\alpha}}$ ………⑦

(3)　(1)より，$z = \alpha$ として，$1 - \overline{\alpha} = \left(\dfrac{1}{2} + i\right)(\alpha - \overline{\alpha})$

$$\frac{1 - \overline{\alpha}}{\alpha - \overline{\alpha}} = \frac{1}{2} + i$$

⑦を代入すると，$\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{1}{2} + i$ となり，一定の値をとる。

［解 説］

特別な技巧は必要なく，誘導に従って解いていくことができます。(2)では，共役複素数を利用した解法を考えなさいという出題者の意向が，問題文から伝わってきます。