1

解答解説のページへ

座標平面上に，中心がそれぞれ点$(0,\ 1)$，点$(2,\ 1)$で，同じ半径 1 をもつ 2 つの円C_1とC_2がある。次の問いに答えよ。

(1)　2 円C_1，C_2と x 軸に接するように円C_3を描く。このとき円C_3の中心の座標を求めよ。

(2)　さらに，2 円C_1，C_3とx軸に接するように円C_2とは異なる円C_4を描く。このとき円C_4の中心の座標を求めよ。

2

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。ただし同じ色の玉は区別できないものとし，空の箱があってもよいとする。

(1)　赤玉 10 個を区別ができない 4 個の箱に分ける方法は何通りあるのか求めよ。

(2)　赤玉 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるのか求めよ。

(3)　赤玉 6 個と白玉 4 個の合計 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるのか求めよ。

3

解答解説のページへ

実数 t に対して，$f(t)$ を $f(t)=\int_0^1|x^2-tx|dx$ と定める。$0\leqq t\leqq 1$ のとき，$f(t)$ の最大値および最小値を求めよ。

4

解答解説のページへ

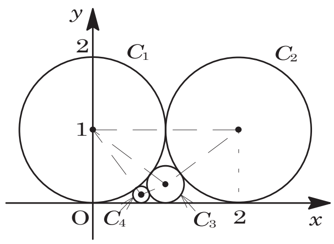
次の問いに答えよ。

(1)　複素数平面上で方程式$|z-3i|=2|z|$が表す図形を求め，図示せよ。

(2)　複素数 z が(1)で求めた図形の上を動くとき，複素数$w=(-1+i)z$が表す点の軌跡を求め，図示せよ。

1

問題のページへ



(1) 円C_3の半径を r とすると，2 円C_1，C_2は同じ半径なので，C_3の中心の座標は$(1,\ r)$となる。

円C_1とC_3が接することより，

$$(1+r)^2=(1-r)^2+1^2,\ 2r=-2r+1$$

よって，$r=\dfrac{1}{4}$より，円C_3の中心の座標は$\left(1,\ \dfrac{1}{4}\right)$である。

(2) 円C_4の中心の座標を$(s,\ t)$とおくと，半径は t となる。

円C_1とC_4が接することより，

$$(1+t)^2=(1-t)^2+s^2,\ 4t=s^2\cdots\cdots\cdots①$$

円C_3とC_4が接することより，

$$\left(\frac{1}{4}+t\right)^2=\left(\frac{1}{4}-t\right)^2+(1-s)^2,\ t=1-2s+s^2\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$4-8s+4s^2=s^2$，$3s^2-8s+4=0$，$(3s-2)(s-2)=0$

$0<s<1$ より $s=\dfrac{2}{3}$ となり，①より $t=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{4}{9}=\dfrac{1}{9}$

よって，円C_4の中心の座標は$\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{9}\right)$である。

［解 説］

頻出問題です。本年度は，名大・文系で同様な問題が出ています。

© 電送数学舎 2002

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　4 個の箱に入っている玉の個数を $a, b, c, d\,(0 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq d)$ とする。

条件より，$a+b+c+d=10$ となり，これを満たす $(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は,

$(0,\ 0,\ 0,\ 10)$，$(0,\ 0,\ 1,\ 9)$，$(0,\ 0,\ 2,\ 8)$，$(0,\ 0,\ 3,\ 7)$

$(0,\ 0,\ 4,\ 6)$，$(0,\ 0,\ 5,\ 5)$，$(0,\ 1,\ 1,\ 8)$，$(0,\ 1,\ 2,\ 7)$

$(0,\ 1,\ 3,\ 6)$，$(0,\ 1,\ 4,\ 5)$，$(0,\ 2,\ 2,\ 6)$，$(0,\ 2,\ 3,\ 5)$

$(0,\ 2,\ 4,\ 4)$，$(0,\ 3,\ 3,\ 4)$，$(1,\ 1,\ 1,\ 7)$，$(1,\ 1,\ 2,\ 6)$

$(1,\ 1,\ 3,\ 5)$，$(1,\ 1,\ 4,\ 4)$，$(1,\ 2,\ 2,\ 5)$，$(1,\ 2,\ 3,\ 4)$

$(1,\ 3,\ 3,\ 3)$，$(2,\ 2,\ 2,\ 4)$，$(2,\ 2,\ 3,\ 3)$

以上より，求める分け方は 23 通りとなる。

(2)4 個の箱に入っている玉の個数を $a, b, c, d\,(a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ c \geqq 0,\ d \geqq 0)$ とする。

ここで，$a'=a+1$，$b'=b+1$，$c'=c+1$，$d'=d+1$ とおくと，$a' \geqq 1,\ b' \geqq 1$，$c' \geqq 1,\ d' \geqq 1$ となる。

条件より，$a+b+c+d=10$ なので，$a'+b'+c'+d'=14$ となり，これを満たす $(a',\ b',\ c',\ d')$ の組は，14 個のボールを 1 列に並べて，その間の 13 か所から 3 か所を選んで仕切りを入れる場合の数に等しいので，${}_{13}\mathrm{C}_3=286$ 通りとなる。

$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組の数も同じなので，求める分け方は 286 通りである。

(3)　(2)と同様に考えて，赤玉については，$a+b+c+d=6$ より，

$$a'+b'+c'+d'=10 \quad (a' \geqq 1,\ b' \geqq 1,\ c' \geqq 1,\ d' \geqq 1)$$

この場合の数は，${}_{9}\mathrm{C}_3=84$ 通りである。

また，白玉については，$a+b+c+d=4$ より，

$$a'+b'+c'+d'=8 \quad (a' \geqq 1,\ b' \geqq 1,\ c' \geqq 1,\ d' \geqq 1)$$

この場合の数は，${}_{7}\mathrm{C}_3=35$ 通りである。

以上より，求める分け方は，$84 \times 35 = 2940$ 通りとなる。

［解　説］

(2)と(3)はよく見かけますが，(1)は難問です。というのも，とにかく全部数え上げようと決めるまでに，時間がかかるからです。

© 電送数学舎 2002

3

問題のページへ

$0 \leqq t \leqq 1$ において，$x^2 - tx = x(x-t)$ より，

$$f(t) = \int_0^1 |x^2 - tx|\,dx = \int_0^t |x^2 - tx|\,dx + \int_t^1 |x^2 - tx|\,dx$$
$$= \int_0^t -(x^2 - tx)\,dx + \int_t^1 (x^2 - tx)\,dx = -\left[\frac{x^3}{3} - t\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^t + \left[\frac{x^3}{3} - t\cdot\frac{x^2}{2}\right]_t^1$$
$$= -\frac{t^3}{3} + \frac{t^3}{2} + \frac{1}{3}(1-t^3) - \frac{t}{2}(1-t^2) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}$$

$$f'(t) = t^2 - \frac{1}{2} = \left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$	$\nearrow$	$\frac{1}{6}$

$f(t)$ の値の増減は右表のようになるので，最大値 $f(0) = \frac{1}{3}$，最小値 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$ となる。

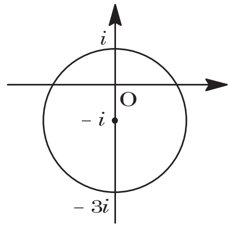
［解 説］

$0 \leqq t \leqq 1$ という条件があるために，場合分けは必要ありません。微積分の基本問題です。

© 電送数学舎 2002

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1)　$z = x + yi$ とおくと，$z - 3i = x + (y-3)i$

条件より，$|z-3i| = 2|z|$なので，$|z-3i|^2 = 4|z|^2$

$$x^2 + (y-3)^2 = 4(x^2+y^2),\ x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$$

$$x^2 + (y+1)^2 = 4$$

よって，点 z は中心 $-i$，半径 2 の円を描く。

(2)　(1)より，$|z+i| = 2$ ………①

条件より，$w = (-1+i)z$ ………②

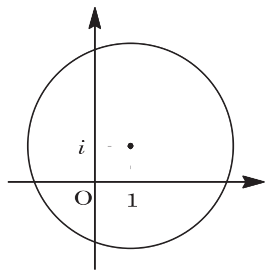
②より $z = \dfrac{w}{-1+i}$ となり，①に代入すると，

$$\left|\frac{w}{-1+i} + i\right| = 2,\ \left|\frac{w-i-1}{-1+i}\right| = 2$$

$$|w-(1+i)| = 2|-1+i|$$

$|-1+i| = \sqrt{2}$ より，$|w-(1+i)| = 2\sqrt{2}$

よって，点 w は中心 $1+i$，半径 $2\sqrt{2}$ の円を描く。



［解 説］

(1)はアポロニウスの円ですが，このことは利用せずに解を作りました。また，(2)の②式は，$-1+i = \sqrt{2}(\cos 135° + i\sin 135°)$ から，点 z を原点中心に $135°$ 回転し $\sqrt{2}$ 倍拡大すると，点 w になることを表します。これを利用して，結論を導くこともできます。

© 電送数学舎 2002