1

解答解説のページへ

n 枚のカードの表に 1, 2, …, n の数をそれぞれ 1 つずつ書く。この n 枚のカードを裏返しにして，よくまぜ，重ねて，上から順に 1, 2, …, n の数を書く。表と裏に書かれた数が一致するカードが 1 枚もない確率を p_n とする。

(1) p_3 を求めよ。

(2) $n=4$ のとき，表と裏に書かれた数が一致するカードの枚数の期待値を求めよ。

(3) p_5 を求めよ。

2

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$を，$a_1=2$，$a_n=\dfrac{1}{n}+\left(1-\dfrac{1}{n}\right)a_{n-1}$ $(n=2,\ 3,\ \cdots)$で定める。

(1)　一般項a_nを求めよ。

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2a_k$を求めよ。

3

解答解説のページへ

放物線 $C: y = x^2$ 上の 2 点 A, B は，直線 AB と C で囲まれる図形の面積が $\dfrac{1}{6}$ になるという条件を満たしながら C 上を動くとする。このとき，直線 AB が通りうる点の範囲を求め，図示せよ。

4

解答解説のページへ

R を平面上の凸六角形とし，その頂点を順に A，B，C，D，E，F とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とおく。R が $\overrightarrow{\mathrm{ED}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{FE}}=\vec{b}$ を満たすとする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{c}$ であることを示せ。

(2)三角形 ACE と三角形 BDF の重心が一致するとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の間の関係を求めよ。

(3)　R が(2)の条件を満たし，さらに内積に関して $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=-1$ を満たすとき, R の面積を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　3 枚のカードの表と裏の数の組合せは$3!=6$通りであり，この中で，表と裏の数が一致していないのは，右表の 2 通りである。よって，この確率p_3は，$p_3=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$である。

表	1	2	3
裏	3	1	2
裏	2	3	1

(2)　4 枚のカードの表と裏の数が一致する枚数を X とすると，$X=4,\ 2,\ 1,\ 0$の場合がある。

(i)　$X=4$のとき

4 枚とも一致する場合は 1 通りより，この確率は$\dfrac{1}{4!}=\dfrac{1}{24}$である。

(ii)　$X=2$のとき

一致する 2 枚のカードの選び方は${}_4C_2=6$通りで，一致しない 2 枚については表と裏の対応が 1 通りしかないので，この確率は$\dfrac{6\times1}{4!}=\dfrac{6}{24}$である。

(iii)　$X=1$のとき

一致する 1 枚のカードの選び方は${}_4C_1=4$通りで，一致しない 3 枚については表と裏の対応が，(1)より 2 通りなので，この確率は$\dfrac{4\times2}{4!}=\dfrac{8}{24}$である。

以上より，Xの期待値は，$0\times\left(1-\dfrac{8}{24}-\dfrac{6}{24}-\dfrac{1}{24}\right)+1\times\dfrac{8}{24}+2\times\dfrac{6}{24}+4\times\dfrac{1}{24}=1$

(3)　まず，表の数 5 に，裏の数 1 が対応する場合を考える。

(i)　表の数 1 に裏の数 5 が対応するとき

表の数 2, 3, 4 に対して，裏の数は 2, 3, 4 より，(1)から 2 通りの場合がある。

表	1	2	3	4	5
裏	5	＊	＊	＊	1

(ii)　表の数 1 に裏の数 5 が対応しないとき

表の数 2 に裏の数 5 が対応するとき，右表より 3 通りの場合がある。表の数 3 に裏の数 5，表の数 4 に裏の数 5 が対応するときも同様なので，合わせて$3\times3=9$通りの場合がある。

表	1	2	3	4	5
裏	2	5	4	3	1
裏	3	5	4	2	1
裏	4	5	2	3	1

(i)(ii)より，表の数 5 に裏の数 1 が対応する場合は，$2+9=11$通りになる。

よって，表の数 5 に，裏の数 2, 3, 4 が対応する場合も同様に考えると，5 枚のカードの表と裏の数が一致しない確率p_5は，$p_5=\dfrac{11\times4}{5!}=\dfrac{11}{30}$である。

［解 説］

有名な攪乱順列の問題です。ただ，$n\leqq5$ なので，個別に数え上げても，たいしたことはありません。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1) $a_n=\dfrac{1}{n}+\left(1-\dfrac{1}{n}\right)a_{n-1}$ より，$na_n=1+(n-1)a_{n-1}$

数列$\{na_n\}$は，公差 1 の等差数列なので，

$$na_n=1\cdot a_1+(n-1)\cdot 1=2+n-1=n+1$$

よって，$a_n=\dfrac{n+1}{n}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2a_k=\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot\frac{k+1}{k}=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1+3)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

［解 説］

落とすことのできない漸化式の基本問題です。

3

問題のページへ

$\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)\ (\alpha<\beta)$ とおくと，直線 AB の方程式は，

$$y-\alpha^2=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha),\quad y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta\ \cdots\cdots\cdots①$$

条件より，$\displaystyle\int_\alpha^\beta\{(\alpha+\beta)x-\alpha\beta-x^2\}dx=\frac{1}{6}$，$\displaystyle -\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}$

$$-\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6},\quad \beta-\alpha=1,\quad \beta=\alpha+1\ \cdots\cdots\cdots②$$

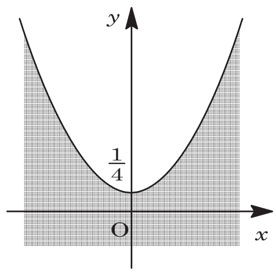
②を①に代入して，$y=(2\alpha+1)x-\alpha(\alpha+1)\ \cdots\cdots\cdots③$

α が任意の実数値をとるとき，直線③が通過する点$(x,\ y)$は，③を α についての 2 次方程式としてみたとき，実数解をもつ$(x,\ y)$の条件として求められる。

③から，$y=2\alpha x+x-\alpha^2-\alpha$，$\alpha^2+(1-2x)\alpha-x+y=0$

$$D=(1-2x)^2-4(-x+y)=1+4x^2-4y\geqq 0$$

よって，$y\leqq x^2+\dfrac{1}{4}$ より，直線 AB が通りうる点の領域は右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。

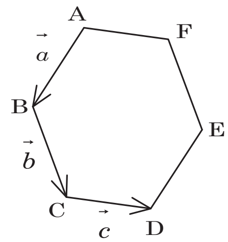


［解 説］

直線の通過領域を求める頻出問題です。なお，③で x の値を固定して y の値の範囲を考えるときは，③を $y=-\alpha^2+(2x-1)\alpha+x=-\left(\alpha-\dfrac{2x-1}{2}\right)^2+x^2+\dfrac{1}{4}$ と変形をして，$y\leqq x^2+\dfrac{1}{4}$ を導きます。

4

問題のページへ



(1)　$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$

(2)　条件より，$\triangle$ACE と$\triangle$BDF は重心が一致するので，

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AF})$$

ここで，$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{b}+\vec{c}$ より，

$$(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+\vec{c}$$

よって，$\vec{b}=\vec{a}+\vec{c}$ ………(＊)

(3)　(1)より，対角線 AD の中点を中心として，四角形 ABCD を180°回転すると，四角形 DEFA に重なるので，六角形 R の面積は四角形 ABCD の面積の 2 倍である。

さて，$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ なので，(＊)から $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{c})=4$，$|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{c}=4$ で，$\vec{a}\cdot\vec{c}=-1$ より，

$$|\vec{a}|^2=5,\ |\overrightarrow{AB}|=|\vec{a}|=\sqrt{5}$$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=1$ なので，(＊)から $(\vec{a}+\vec{c})\cdot\vec{c}=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=1$ で，$\vec{a}\cdot\vec{c}=-1$ より，

$$|\vec{c}|^2=2,\ |\overrightarrow{CD}|=|\vec{c}|=\sqrt{2}$$

また，$|\vec{b}|^2=|\vec{a}+\vec{c}|^2=5+2\cdot(-1)+2=5$ より，$|\overrightarrow{BC}|=|\vec{b}|=\sqrt{5}$

さらに，$|\vec{a}+\vec{b}|^2=5+2\cdot4+5=18$ より，$|\overrightarrow{AC}|=|\vec{a}+\vec{b}|=3\sqrt{2}$ となり，

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=-1+1=0$$

よって，$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{BA}|^2|\overrightarrow{BC}|^2-(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{5\times5-(-4)^2}=\dfrac{3}{2}$

$$\triangle ACD=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{CD}|=\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=3$$

以上より，R の面積は，$(\triangle ABC+\triangle ACD)\times2=\left(\dfrac{3}{2}+3\right)\times2=9$ である。

［解 説］

(3)では，AB＝BC であることが気になりましたが，この点は無視して，普通に三角形の面積を計算しました。