

1

解答解説のページへ

R を平面上の凸六角形とし、その頂点を順に A, B, C, D, E, F とする。 $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ とおく。 R が $\overrightarrow{ED} = \vec{a}$, $\overrightarrow{FE} = \vec{b}$ を満たすとする。

- (1) $\overrightarrow{AF} = \vec{c}$ であることを示せ。
- (2) 三角形 ACE と三角形 BDF の重心が一致するとき、 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} の間の関係を求めよ。
- (3) R が(2)の条件を満たし、さらに内積に関して $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = -1$ を満たすとき、 R の面積を求めよ。

2

解答解説のページへ

実数 t に対して, u の 3 次方程式 $u^3 - 3u + 2t = 0$ の実数解のうちで絶対値が最小のものを $f(t)$ とする。

- (1) 媒介変数 t を用いて, $x = f(t)$, $y = -2t$ (t は実数) と表される曲線を図示せよ。
- (2) 関数 $f(t)$ が連続でない t の値を求め, $f(t)$ のグラフをかけ。

3

解答解説のページへ

関数 $f(x)$ はすべての実数 x に対して定義され、すべての実数 x で微分可能であるとする。このとき、以下の命題について、正しいければ証明し、正しくなければ反例をあげよ。

- (1) $x_1 < x_2$ を満たすすべての実数 x_1, x_2 に対して $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つとする。
このとき、すべての実数 x に対して $f'(x) > 0$ である。
- (2) $f(0) = 0$ かつすべての実数 x に対して $f'(x) > 0$ ならば、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ である。
- (3) $f(0) = 0$ かつすべての実数 x に対して $f'(x) > 0$ ならば、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = +\infty$ である。

4

解答解説のページへ

a は定数とし, n は 2 以上の整数とする。関数 $f(x) = ax^n \log x - ax$ ($x > 0$) の最小値が -1 のとき, 定積分 $\int_1^e f(x) dx$ の値を n と自然対数の底 e を用いて表せ。

5

解答解説のページへ

a を実数とし, z を複素数とする。複素数平面上で, a, z, z^2, z^3 が表す 4 点が, あるひし形の 4 頂点になるとする。ただし, a と z^2 が表す頂点是对角線上にあるとする。このような a と z の値をすべて求めよ。

1

問題のページへ

(1) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$

(2) 条件より, $\triangle ACE$ と $\triangle BDF$ は重心が一致するので,

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF})$$

ここで, $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{b} + \vec{c}$ より,

$$(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + \vec{c}$$

よって, $\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$ ……(*)

(3) (1)より, 対角線 AD の中点を中心として, 四角形 ABCD を 180° 回転すると, 四角形 DEFA に重なるので, 六角形 R の面積は四角形 ABCD の面積の 2 倍である。

さて, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$ なので, (*) から $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = 4$, $|\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{c} = 4$ で, $\vec{a} \cdot \vec{c} = -1$ より,

$$|\vec{a}|^2 = 5, |\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}| = \sqrt{5}$$

$\vec{b} \cdot \vec{c} = 1$ なので, (*) から $(\vec{a} + \vec{c}) \cdot \vec{c} = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = 1$ で, $\vec{a} \cdot \vec{c} = -1$ より,

$$|\vec{c}|^2 = 2, |\overrightarrow{CD}| = |\vec{c}| = \sqrt{2}$$

また, $|\vec{b}|^2 = |\vec{a} + \vec{c}|^2 = 5 + 2 \cdot (-1) + 2 = 5$ より, $|\overrightarrow{BC}| = |\vec{b}| = \sqrt{5}$

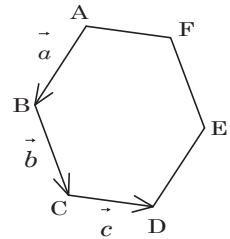
さらに, $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 5 + 2 \cdot 4 + 5 = 18$ より, $|\overrightarrow{AC}| = |\vec{a} + \vec{b}| = 3\sqrt{2}$ となり,

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = -1 + 1 = 0$$

$$\text{よって, } \triangle ABC = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{BA}|^2 |\overrightarrow{BC}|^2 - (\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{5 \times 5 - (-4)^2} = \frac{3}{2}$$

$$\triangle ACD = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{CD}| = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 3$$

以上より, R の面積は, $(\triangle ABC + \triangle ACD) \times 2 = \left(\frac{3}{2} + 3\right) \times 2 = 9$ である。



[解説]

(3)では, $AB = BC$ であることが気になりましたが, この点は無視して, 普通に三角形の面積を計算しました。

2

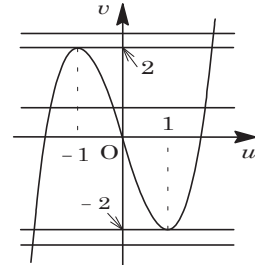
問題のページへ

(1) $u^3 - 3u + 2t = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$ より、 $u^3 - 3u = -2t$ と変形すると、条件より、 uv 平面上で $v = u^3 - 3u \cdots \cdots \textcircled{2}$ と $v = -2t \cdots \cdots \textcircled{3}$ の共有点のうち、 u 座標の絶対値の最小のものが $f(t)$ である。

u	\cdots	-1	\cdots	1	\cdots
v'	+	0	-	0	+
v	\nearrow	2	\searrow	-2	\nearrow

$\textcircled{2}$ より、 $v' = 3u^2 - 3 = 3(u+1)(u-1)$

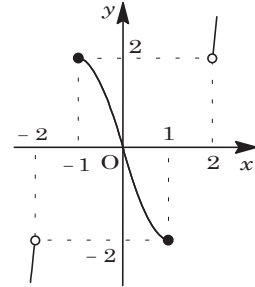
すると、 $\textcircled{2}$ のグラフは右図のようになり、 $\textcircled{3}$ との共有点の様子から、次のように場合分けをする。



(i) $-2t < -2$, $2 < -2t$ のとき $\textcircled{2}$ と $\textcircled{3}$ は1つの共有点しかもたないので、その共有点が $(f(t), -2t)$ である。

(ii) $-2t = \pm 2$ のとき $\textcircled{2}$ と $\textcircled{3}$ は2つの共有点をもつが、 u 座標の絶対値が小さいのは接点の方で、 $(f(t), -2t) = (\mp 1, \pm 2)$ (複号同順)となる。

(iii) $-2 < -2t < 2$ のとき $\textcircled{2}$ と $\textcircled{3}$ は3つの共有点をもつが、 u 座標の絶対値が小さいのは $-1 < u < 1$ の範囲にある共有点であり、その点が $(f(t), -2t)$ である。

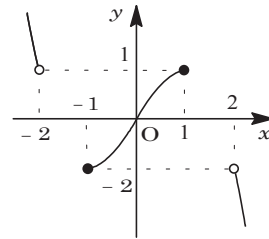


以上より、 $(x, y) = (f(t), -2t)$ と表される曲線は、 $y = x^3 - 3x$ ($x < -2$, $-1 \leq x \leq 1$, $2 < x$) であり、図示すると右図のようになる。

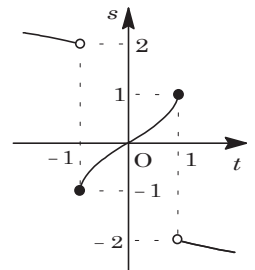
(2) (1)と同様にして、 $\textcircled{1}$ より $-\frac{1}{2}u^3 + \frac{3}{2}u = t$ と変形すると、 $v = -\frac{1}{2}u^3 + \frac{3}{2}u \cdots \cdots \textcircled{4}$ と $v = t$ の共有点のうち、 u 座標の絶対値の最小のものが $f(t)$ である。

$\textcircled{4}$ より、 $v' = -\frac{3}{2}u^2 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}(u+1)(u-1)$

すると、 $t = \pm 1$ で $f(t)$ は不連続で、 $(x, y) = (f(t), t)$ は、 $y = -\frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{2}x$ ($x < -2$, $-1 \leq x \leq 1$, $2 < x$) $\cdots \cdots \textcircled{5}$ で表される曲線を描き、図示すると右上図のようになる。



これより、点 $(t, f(t))$ の描く曲線は、 $\textcircled{5}$ の曲線を直線 $y = x$ に関して対称移動したものであり、これを $s = f(t)$ とおくと、 $t = -\frac{3}{2}s^3 + \frac{3}{2}s$ ($s < -2$, $-1 \leq s \leq 1$, $2 < s$) である。



よって、このグラフは右図のようになる。

[解説]

おもしろい問題ですが、(1)の誘導は少し使いにくいものです。

3

問題のページへ

(1) $f(x) = x^3$ とすると, $x_1 < x_2$ を満たすすべての実数 x_1, x_2 に対して $f(x_1) < f(x_2)$ であるが, $f'(0) = 0$ となる。

よって, (1)の命題は正しくない。

(2) $f(x) = 1 - e^{-x}$ とすると, $f(0) = 0$ かつ $f'(x) = e^{-x} > 0$ であるが, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ となる。

よって, (2)の命題は正しくない。

(3) $f'(x) > 0$ より, $x > 0$ に対して, $f(x) > f(0) = 0$ である。

ここで, 十分大きな整数 n に対して, $n \leq x < n+1$ とすると,

$$\int_0^x f(t) dt \geq \int_0^n f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t) dt \cdots \cdots \textcircled{1}$$

さて, $S_k = \int_k^{k+1} f(t) dt$ とおくと, $f(x)$ が単調増加より,

$$0 < S_0 < S_1 < S_2 < \cdots < S_{n-1}$$

よって, $\sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t) dt > nS_0 \cdots \cdots \textcircled{2}$

①②より, $\int_0^x f(t) dt > nS_0$

$x \rightarrow +\infty$ のとき $n \rightarrow +\infty$ となるので, $nS_0 \rightarrow +\infty$ から $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = +\infty$ である。

以上より, (3)の命題は正しい。

[解説]

命題(2)と命題(3)の仮定が同じことから, 出題者の心理を考えると, 一方が真, 他方が偽であると予想できます。実際そのとおりでした。

4

問題のページへ

$f(x) = ax^n \log x - ax = a(x^n \log x - x)$ に対して,

$$f'(x) = a(nx^{n-1} \log x + x^{n-1} - 1) = a\{x^{n-1}(n \log x + 1) - 1\}$$

ここで, $g(x) = x^{n-1}(n \log x + 1) - 1$ とおくと, $f'(x) = ag(x)$ となり,

$$g'(x) = (n-1)x^{n-2}(n \log x + 1) + nx^{n-2} = x^{n-2}\{n(n-1) \log x + 2n - 1\}$$

$x > 0$ において, $g'(x) = 0$ の解は, $n \geq 2$ より,

$$\log x = -\frac{2n-1}{n(n-1)}, \quad x = e^{-\frac{2n-1}{n(n-1)}}$$

この値を $x = \alpha$ とおくと, $g(x)$ の増減は右表のようになり, $\lim_{x \rightarrow +0} g(x) = -1$, $g(1) = 0$ に注意すると, $0 < x < 1$ のとき $g(x) < 0$, $x > 1$ のとき $g(x) > 0$ である。

x	0	...	α	...
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$		↘		↗

(i) $a > 0$ のとき

$f(x)$ の増減は, 右表のようになり, 最小値は $f(1) = -a$ となる。

条件から, $-a = -1$, $a = 1$ となり, $a > 0$ も満たす。

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	$-a$	↗

(ii) $a = 0$ のとき

$f(x) = 0$ より, 最小値が -1 にはならない。

(iii) $a < 0$ のとき

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ より, 最小値は存在しない。

(i)(ii)(iii)より, $f(x) = x^n \log x - x$ である。

このとき, $\int_1^e f(x) dx = \int_1^e (x^n \log x - x) dx$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n+1} [x^{n+1} \log x]_1^e - \frac{1}{n+1} \int_1^e x^n dx - \frac{1}{2} [x^2]_1^e \\ &= \frac{1}{n+1} e^{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} [x^{n+1}]_1^e - \frac{1}{2} (e^2 - 1) \\ &= \frac{n}{(n+1)^2} e^{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

[解説]

$g(1) = 0$ は式の形から見つけます。ただ, $g(x)$ の増減について, チェックが少々面倒です。なお, $\lim_{x \rightarrow +0} x^n \log x = 0$ は証明なしで用いています。

5

問題のページへ

4点 a, z, z^2, z^3 がひし形の頂点となるので、まず 2点 a, z^2 の中点と、2点 z, z^3 の中点が一致する。

$$\frac{a+z^2}{2} = \frac{z+z^3}{2} \dots\dots\dots ①$$

さらに、辺 z^2z^3 と辺 z^2z の長さが等しいので、

$$|z^3 - z^2| = |z^2 - z| \dots\dots\dots ②$$

$$②より、|z|^2|z-1| = |z||z-1|$$

z が実数のとき、ひし形はできないので、 $z \neq 0, z \neq 1$ となり、

$$|z| \neq 0, |z-1| \neq 0$$

よって、 $|z|=1$ から $z = \cos \theta + i \sin \theta$ ($0 < \theta < \pi, \pi < \theta < 2\pi$) とおくことができる。

$$①に代入して、a + \cos 2\theta + i \sin 2\theta = \cos \theta + i \sin \theta + \cos 3\theta + i \sin 3\theta$$

$$a + \cos 2\theta = \cos \theta + \cos 3\theta \dots\dots\dots ③, \sin 2\theta = \sin \theta + \sin 3\theta \dots\dots\dots ④$$

$$④より、\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta, \sin 2\theta (2 \cos \theta - 1) = 0$$

$\sin 2\theta = 0, \cos \theta = \frac{1}{2}$ となり、 $0 < \theta < \pi, \pi < \theta < 2\pi$ から、

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

$$(i) \theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき}$$

$$z = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i \text{ となり、} ③ \text{ より } a = \cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{3\pi}{2} - \cos \pi = 1$$

$$(ii) \theta = \frac{3\pi}{2} \text{ のとき}$$

$$z = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i \text{ となり、} ③ \text{ より } a = \cos \frac{3\pi}{2} + \cos \frac{9\pi}{2} - \cos 3\pi = 1$$

$$(iii) \theta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき}$$

$$z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ となり、} ③ \text{ より } a = \cos \frac{\pi}{3} + \cos \pi - \cos \frac{2\pi}{3} = 0$$

$$(iv) \theta = \frac{5\pi}{3} \text{ のとき}$$

$$z = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ となり、} ③ \text{ より } a = \cos \frac{5\pi}{3} + \cos 5\pi - \cos \frac{10\pi}{3} = 0$$

[解説]

ひし形を、平行四辺形の中で隣りあう 2 辺の長さが等しい四角形という条件で定義しています。 a の入っていない②の関係式がポイントです。

