1

解答解説のページへ

24 枚からなるカードの組がある。この組のそれぞれのカードには 1 から 6 までの数がひとつ書かれており，各数についてそれぞれ 4 枚ずつある。この組から 2 枚のカードを同時に引く。

(1)　2 枚のカードの数が同じになる確率を求めよ。

(2)　2 枚のカードの数の差が 3 以上となる確率を求めよ。

(3)　2 枚のカードの数の和の期待値を求めよ。

2

解答解説のページへ

1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC がある。辺 BC の中点 M を中心とする半径 r の円が辺 AB および辺 AC と共有点をもつとき，AB との共有点のうち頂点 A に近い方の点を D とし, AC との共有点のうち頂点 A に近い方の点を E とする。

(1) AD の長さが $\dfrac{3}{4}$ であるとき, r の値を求めよ。

(2) AD の長さを x とおくとき，r^2 を x の式で表せ。

(3) $\angle\mathrm{DME} = \theta$ とおくとき，$\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ となる r の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

3 次関数 $f(x)$ および 2 次関数 $g(x)$ を，$f(x)=x^3$，$g(x)=ax^2+bx+c$ とし，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフが点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{8}\right)$ で共通の接線をもつとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $b,\ c$ を a を用いて表せ。

(2) $f(x)-g(x)$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最小値を a を用いて表せ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

xyz 空間内に点 $A(1,\ 1,\ 2)$ と点 $B(-5,\ 4,\ 0)$ がある。点 C が y 軸上を動くとき, 三角形 ABC の面積の最小値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　24 枚のカードから 2 枚を選ぶ ${}_{24}\mathrm{C}_2=12\times23$ 通りの場合が，同様に確からしい。

2 枚のカードの数が同じになる場合は，その数の選び方が 6 通りで，それぞれの数に対してカードの選び方が ${}_4\mathrm{C}_2=6$ 通りずつある。

よって，この確率は，$\dfrac{6\times6}{12\times23}=\dfrac{3}{23}$ である。

(2)　2 枚のカードの数の差が 3 以上となる場合は，その数の組の選び方が，(1, 4)，(1, 5)，(1, 6)，(2, 5)，(2, 6)，(3, 6) の 6 通りあり，それぞれの組に対してカードの選び方が ${}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1=16$ 通りずつある。

よって，この確率は，$\dfrac{6\times16}{12\times23}=\dfrac{8}{23}$ である。

(3)　2 枚のカードの数を組み合わせ，その和を計算してまとめると，右表のようになる。

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	―	4	5	6	7	8
3	―	―	6	7	8	9
4	―	―	―	8	9	10
5	―	―	―	―	10	11
6	―	―	―	―	―	12

まず，選んだ 2 枚のカードの数が同じとき，(1)より，その確率はそれぞれ $\dfrac{6}{12\times23}=\dfrac{3}{6\times23}$ となり，このときの数の和の期待値は，

$$(2+4+6+8+10+12)\times\frac{3}{6\times23}=\frac{42\times3}{6\times23}$$

また，選んだ 2 枚のカードの数が異なるとき，そのカードの選び方は ${}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1=16$ 通りずつであるので，その確率はそれぞれ $\dfrac{16}{12\times23}=\dfrac{8}{6\times23}$ となる。このときの数の和の期待値は，

$$(3+4+5\times2+6\times2+7\times3+8\times2+9\times2+10+11)\times\frac{8}{6\times23}=\frac{105\times8}{6\times23}$$

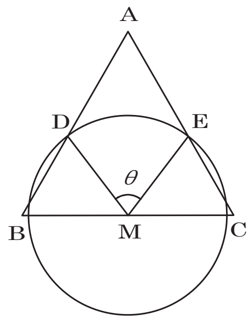
以上より，2 枚のカードの数の和の期待値は，$\dfrac{42\times3}{6\times23}+\dfrac{105\times8}{6\times23}=7$ である。

［解　説］

(3)の期待値は，表の数値をみると，その対称性から明らかに 7 であると判断できます。

2

問題のページへ



(1)　$\mathrm{BD}=\mathrm{AB}-\mathrm{AD}=\dfrac{1}{4}$から，△BMD に余弦定理を適用し，

$$r^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cos 60^\circ=\frac{3}{16}$$

よって，$r=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

(2)　$\mathrm{AD}=x$ のとき, (1)と同様にして,

$$r^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+(1-x)^2-2\cdot\frac{1}{2}(1-x)\cos 60^\circ$$
$$=x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}$$

(3)　$\angle\mathrm{BDM}=\angle\mathrm{DAM}+\angle\mathrm{DMA}=30^\circ+\dfrac{\theta}{2}$となり，△BMD に正弦定理を適用すると，

$$\frac{r}{\sin 60^\circ}=\frac{\frac{1}{2}}{\sin\left(30^\circ+\frac{\theta}{2}\right)},\quad r=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 60^\circ}{\sin\left(30^\circ+\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{\sin\left(30^\circ+\frac{\theta}{2}\right)}$$

ここで，$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$より，$\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$，$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3},\quad \cos\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

すると，$\sin\left(30^\circ+\dfrac{\theta}{2}\right)=\sin 30^\circ\cos\dfrac{\theta}{2}+\cos 30^\circ\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$より，

$$r=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{3}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

［解 説］

(3)では，(2)の結論を利用せずに，独立した設問として考えました。なお，問題文中の「頂点 A に近い方の点」という表現を，円と辺 AB, AC との共有点の個数がそれぞれ 2 個ずつであると読み込めば，その場合の r の範囲は$\dfrac{\sqrt{3}}{4}<r\leqq\dfrac{1}{2}$となり，(1)が解なしとなってしまいます。

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3$ より $f'(x)=3x^2$ となり，$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$ である。

また，$g(x)=ax^2+bx+c$ より，$g'(x)=2ax+b$ となる。

条件より，$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$ かつ $g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$ となるので，

$$\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c=\frac{1}{8},\ \ a+b=\frac{3}{4}$$

よって，$b=\frac{3}{4}-a$，$c=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-a\right)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}a$

(2)　$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと, (1)より，$h(x)=x^3-ax^2-\left(\frac{3}{4}-a\right)x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}a$

$$h'(x)=3x^2-2ax-\left(\frac{3}{4}-a\right)=\frac{1}{4}(2x-1)(6x-4a+3)$$

$h'(x)=0$ の解は，$x=\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}$ となり，

$$h\left(\frac{1}{2}\right)=0,\ \ h\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}\right)=-\frac{4}{27}a^3+\frac{2}{3}a^2-a+\frac{1}{2}$$

また，$h(0)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}a$，$h(1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}a$ から，$0\leqq x\leqq 1$ における $h(x)$ の最小値を m とおくと，

(i)　$\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}<0$ $\left(a<\frac{3}{4}\right)$ のとき

右表より，$m=h\left(\frac{1}{2}\right)=0$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

(ii)　$0\leqq\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$ $\left(\frac{3}{4}\leqq a<\frac{3}{2}\right)$ のとき

(ii-i)　$\frac{1}{4}-\frac{a}{4}>0$ $(a<1)$ のとき

右表より，$m=h\left(\frac{1}{2}\right)=0$

(ii-ii)　$\frac{1}{4}-\frac{a}{4}\leqq 0$ $(a\geqq 1)$ のとき

右表より，$m=h(0)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}a$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

(iii)　$\frac{1}{2}\leqq\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}<1$ $\left(\frac{3}{2}\leqq a<\frac{9}{4}\right)$ のとき

$h\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}\right)$ と $h(0)$ の大小関係を調べるために，差をとり，

$$d(a)=h\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}\right)-h(0)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	

すると，$d(a)=-\frac{4}{27}a^3+\frac{2}{3}a^2-\frac{3}{4}a+\frac{1}{4}$ となり，

$$d'(a)=-\frac{4}{9}a^2+\frac{4}{3}a-\frac{3}{4}=-\frac{1}{36}(4a-9)(4a-3)$$

このとき，$\dfrac{3}{2} \leqq a < \dfrac{9}{4}$ において，$d'(a) > 0$ より，$d(a) \geqq d\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{8} > 0$

よって，$h\left(\dfrac{2}{3}a - \dfrac{1}{2}\right) > h(0)$ となり，$m = h(0) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}a$ である。

(iv) $\dfrac{2}{3}a - \dfrac{1}{2} \geqq 1 \left(a \geqq \dfrac{9}{4}\right)$ のとき

$h(1) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}a > \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}a = h(0)$ より，

$$m = h(0) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}a$$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

(i)～(iv)より，$a < 1$ のとき $m = 0$，$a \geqq 1$ のとき $m = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}a$ である。

[解 説]

とにかく朴訥に場合分けをし，それぞれの場合について $h(x)$ の増減を調べました。難問ではないものの，かなりの時間を要します。

4

問題のページへ

点C$(0,\ t,\ 0)$とし，$\triangle$ABC の面積を S とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-6,\ 3,\ -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ t-1,\ -2)$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{36+9+4}=7,\ |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{1+(t-1)^2+4}=\sqrt{t^2-2t+6}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=6+3(t-1)+4=3t+7$$

すると，$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{49(t^2-2t+6)-(3t+7)^2}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{40t^2-140t+245}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{8\left(t-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{49}{2}}$$

よって，$t=\frac{7}{4}$のとき, Sは最小値$\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{49}{2}}=\frac{7\sqrt{10}}{4}$をとる。

［解 説］

三角形の面積公式への代入練習とも思える問題で，前問の 1 割程度の時間で，結論が導けます。